F1130

REFERAT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 1

IANUARIE — FEBRUARIE

1963

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul Politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu Redacția și Administrația Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Pelitehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. Б пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутскик сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 1

IANUARIE — FEBRUARIE

1963

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*; Prof. *M. Bercovici*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *E. Bratu*; Prof. *Gh. Buzdugan*; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand St. Th.; Prof. Dr. *D. Dumitrescu*, membru corespondent al Acad. R.P.R.; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Conf. *Gh. Hagymaș*, cand. St. Th.; Prof *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*; Conf. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*; Prof. *M. Postelnicescu*; Prof. Dr. *R. Rădulet*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Al Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

De la 1 ianuarie 1963 Buletinul Institutului Politehnic București va apare în 6 fascicole anual, o dată la două luni.

С первого января 1963 г Бюллетен Бухарестского Политехнического Института будет издаваться в 6 выпусках ежегодно (раз в два месяца).

Beginning with the 1st of January 1963 the Proceedings of the Polytechnic Institute of Bucarest will issue yearly in 6 booklets, every other month.

Depuis le 1 janvier 1963 le Bulletin de l'Institut Polytechnique Bucarest paraîtra en 6 cahiers, annuellement.

Ab 1 januar 1963 wird das Bulletin des Polytechnischen Instituts Buckarest jöhrlich in 6 Heften, einmal in zwei Monaten erscheinen.

SUMAR

MATEMATICĂ

M. TÎRNOVEANU — Despre o structură algebrică cu operatori definitivă în $E_Y^{P^P}$ 13

I. MIU — Asupra ecuațiilor diferențiale adjuncte 29

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

V. PĂRĂUȘANU — Adsorbția ionilor anorganici pe schimbători de ioni 41

REZISTENȚA MATERIALELOR

A. PETRE — Flambajul de răsucire la bare cu pereții subțiri sub sarcini axiale repartizate 53

ELECTROTEHNICĂ

A. TUGULEA, S. MASTERO — Errors in the presentation of some electrotechnical problems 71

N. GALAN — Cuplurile asincrone la motoarele sincrone reactive cu poli masivi 91

ELECTRONICĂ

C. VASILIU — Probleme și aspecte ale teoremei sondajelor . . 105

TRANSPORTURI

I. ZAGĂNESCU, I. BÎRSAN — Îmbunătățirea funcționării angrenajului de tracțiune cu roți dințate a boghiurilor locomotivei diesel electrice C. F. R. 060DA de construcție C. M. Reșița 123

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

М. ТЫРНОВЯНУ — О алгебре с операторами определяемой в EP_Y^P 13

И. МИУ — О вспомогательных уравнениях дифференциальных уравнений 29

ТЕХНОЛОГИЯ КИМИКИ

В. ПЭРЭУШАНУ, Ф. ДАНЕШ, К. МАТЕЕСКУ, О. ЛАНДАУЭР — Адсорбция неорганических ионов на ионообменниках 41

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

А. ПЕТРЕ — Продольный изгиб кручения у тонкостенных стержней под распределёнными осевыми нагрузками . 53

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. ЦУГУЛЯ, С. МАСТЕРО — Ошибочное истолкование некоторых вопросов электротехники 71

Н. ГАЛАН — Асинхронные моменты реактивного двигателя со сплатными полюсами 91

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

К. ВАСИЛИУ — Задачи и соображения о теореме отсчётов 105

ТРАНСПОРТ

И. ЗЭГЭНЕСКУ, И. БЫРСАН — Изучение работы тягового зубчатого зацепления тележек тепловоза с электрической передачей CFR. 060 DA производства Решицкого металлургического комбината 123

CONTENTS

MATHEMATICS

M. TIRNOVEANU — On an algebraic structure with operators defined in $E_Y^{P^F}$ 13

I. MIU — Concerning the adjoint equation of the differential straight equations 29

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

V. PĂRĂUȘANU — The adsorption of inorganic ions on ion-exchangers 41

STRENGTH OF MATERIALS

A. PETRE — Torsional bukling of the thim walled beans under axial distributed loads 53

ELECTRICITY

A. TUGULEA, S. MASTERO — Errors in the presentation of some electrotechnical problems 71

N. GALAN — The asynchronous torques of the reluctance synchronous motor with massive poles 91

ELECTRONICS

C. VASILIU — Problems and aspects of the sampling theorem. 105

TRANSPORT

I. ZĂGĂNESCU, I. BIRSAN — The functional impovement of the traction gear box for the trukcs of the 060DA diesel--electric locomotive, constructed for the Roumanian railway by the Reșița Metalurgical Works 123

SOMAIRE

MATHÉMATIQUE

M. TIRNOVEANU — Sur une structure algébrique avec des opérateurs définie dans $E_Y^{P^F}$ 13

I. MIU — Concernant les équations adjointes des équations différentielles linéaires 29

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

V. PĂRĂUȘANU — L'adsorbtion des ions anorganiques sur les échangeurs de ions 41

RÉSISTANCES DES MATÉRIAUX

A. PETRE — La flambage de torsion à des barres aux fines parois sous des charges axiales réparties 53

ELECTROTECHNIQUE

A. TUGULEA, S. MASTERO — Solutions erronées de quelques problèmes d'électrotechnique 71

N. GALAN — Les couples asynchrones du moteur synchron réactive à poles saillants 91

ELECTRONIQUE

G. VASILIU — Problèmes et aspects du théorême de l'échantillonnage 105

LES TRANSPORTS

I. ZAGANESCU, I. BIRSAN — Amélioration du fonctionnement de l'engrenage de traction à roues dentées des bogies pour locomotive diesel-électriques C.F.R. 060 D A construites par U.C.M. Reșița 123

INHALT

MATHEMATIK

A. TIRNOVEANU — Uber eine algebreische Struktur mit in $E_Y^{P^F}$ definitierten Operatoren 13

I. M. MIU — Über die Adjunkt — Gleichung der Differential Gleichung 29

TECHNOLOGISCHE CHEMIE

V. PĂRĂUȘANU — Die Adsorbtion der anorganischen Ionen auf Ionenaustauschern 41

FESTIGKEITSLEHRE

A. PETRE — Drehungsknickung bei Barren mit dunnen Wänden unter axialen verteilten Belastungen 53

ELEKTROTECHNIK

A. TUGULEA, S. MASTERO — Fehlerhafte Lösungen einiger Aufgaben der Elektrotechnik 71

N. GALAN — Die Asynchronen Drehmomente der Reaktionssynchronomotoren mit massiven Polen 91

ELEKTRONIK

C. VASILIU — Fragen und Aspekte des Abtasttheorems . . 105

TRANSPORT

I. ZĂGĂNESCU, I. BÎRSAN — „Die Verbesserung des Zahnrad Drehhestellantriebes bei der diesel-elektrischen Lokomotive 060 D.A. C.F.R. bauart U.C.M. Reșița 123

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 1

MATEMATICĂ

DESPRE O STRUCTURĂ ALGEBRICĂ CU OPERATORI DEFINITĂ ÎN $E_Y^{P^F}$

MIRCEA TÎRNOVEANU

§ 1. Extinderea unei mulțimi E prin operațiile P și P^F

Definiția 1.1. Simbolurile ε *și* $\dot{\varepsilon}$

Fie: M clasa totală a obiectelor nedeterminate; $\mathfrak{M}$ clasa totală a modelelor (realizărilor) obiectelor nedeterminate din M; P_τ mulțimea propozițiilor α — valente dintr-un sistem logistic α — valent Σ_α; $P'_\alpha \subset P_\alpha$ mulțimea propozițiilor α—valente semnificante de treapta I-a din Σ_τ; $R(x)$ $(x \in M)$ un predicat peste $M \cup \mathfrak{M}$; $(x \mid X)$ $(x \in M;\ X \in \mathfrak{M})$ o variabilă nedeterminată ce reprezintă variabila nedeterminată $x \in M$ modelată prin variabila nedeterminată $X \in \mathfrak{M}$; $\Diamond$ simbolul modalității logice „posibil"; Δ simbolul modalității logice „cert"; $(\exists x)$ simbolul cvantorului existenței. $\mathfrak{S}$ simbolul functonului conjuncție. a) Simbolul ε este definit de:

$$\varepsilon(R(x)) =_D (\Diamond \exists x) R(x)) \mathfrak{S} (\Diamond (\exists x \mid X) R(x \mid X))$$

b) simbolul $\dot{\varepsilon}$ este definit de:

$$\dot{\varepsilon}(R(x)) =_D (\Delta (\exists x) R(x)) \mathfrak{S} (\Diamond (\exists x \mid X) R(x \mid X)$$

Convenția 1.1. Reprezentarea semantică formală a simbolurilor ε, $\dot{\varepsilon}$.

a): $\varepsilon(R(x))$ are reprezentarea semantică formală: „E posibil să existe cel puțin un $x \in M$ astfel încît

$$R(x) \in P_\alpha$$

și e posibil să existe cel puțin un $X \in \mathfrak{M}$ astfel încît

$$R(x \mid X) \in P'_\alpha \subset P_\alpha$$

b): $\dot{\varepsilon}(R(x)$ are reprezentarea semantică formală: „Există în mod cert cel puțin un $x \in M$ astfel încît

$$R(x) \in P_a$$

și e posibil să existe cel puțin un $X \in M$ astfel încît

$$R(x \mid X) \in P'_\alpha \subset P_\alpha$$

Definiția 1.2. Simbolul $\dot{\Rightarrow}$

Fie: P_α clasa propozițiilor α—valente în sistemul logistic α—valent Σ_α; $P'_\alpha \subset P_\alpha$ clasa propozițiilor semnificante de treapta I din Σ_α; $\mathfrak{M}$ mulțimea realizărilor (modelelor) variabilelor propoziționale α—valente $p \in P_\alpha$; R un predicat peste mulțimea

$$P_\alpha \cup \mathfrak{M}.$$

Simbolul $\dot{\Rightarrow}$ este definit de:

$$x, y \ni P_\alpha) \Rightarrow [(x \dot{\Rightarrow} y) \Leftrightarrow (\varepsilon(\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y \subset \mathfrak{M}) \,\&\, \varepsilon((\mathfrak{M}'_x \subset \mathfrak{M}_x) \,\&$$

$$\&\,(\mathfrak{M}'_y \subset \mathfrak{M}_y)) \,\&\, (\operatorname{card} \mathfrak{M}'_x \leqslant \aleph_0) \,\&\, (\operatorname{card} \mathfrak{M}'_y \leqslant \aleph_0)$$

$$\downarrow$$

a) $(X \in \mathfrak{M}x) \,\&\, (Y \in \mathfrak{M}_y) \Rightarrow ((R(x \mid X) \in P'_\alpha) \,\&\, (R(y \mid Y) \in P'_\alpha) \,\&\, (x \Rightarrow y))$.

b) $\varepsilon((X \in \mathfrak{M}'_x) \,\&\, (Y \in \mathfrak{M}'_y)) \Rightarrow ((R(x \mid X) \in P_\alpha) \,\&\, (R(y \mid Y) \in P_\alpha) \,\&$

$$\&\,(\Diamond(x =/\Rightarrow y)))]$$

Convenția 1.2. Reprezentarea semantică formală a simbolului $\dot{\Rightarrow}$

Simbolul $\dot{\Rightarrow}$ are reprezentarea semantică formală: "$x \dot{\Rightarrow} y$ este echivalent cu $x \Rightarrow y$ pe toate modelele M_x ale lui x și pe toate modelele M_y ale lui y, exceptînd poate o mulțime cel mult numerabilă $\mathfrak{M}'_x$ de modele ale lui x pe care avem

$$x =/\Rightarrow y$$

sau exceptînd poate o mulțime cel mult numerabilă de modele ale lui y pe care avem

$$x =/\Rightarrow y$$

Definiția 1.3. Simbolul $\dot{\Leftrightarrow}$

Simbolul $\dot{\Leftrightarrow}$ este definit de

$$(x, y \in P_\alpha) \Rightarrow [(x \dot{\Leftrightarrow} y) \Leftrightarrow ((x \dot{\Rightarrow} y) \,\&\, (y \Rightarrow x)) \,V\, ((x \Rightarrow y) \dot{\Rightarrow}))]$$

Definiția 1.4. Simbolul $\dot{\Leftrightarrow}$

Simbolul $\dot{\Leftrightarrow}$ este definit de:

$$(x, y \in P_\alpha) \Rightarrow [(x \dot{\Leftrightarrow}) \Leftrightarrow ((x \dot{\Rightarrow} y) \,\&\, (y \dot{\Rightarrow} x))]$$

Definiția 1.5. Operația P.

Fie: E o mulțime abstractă; $\mathfrak{P}(E)$ mulțimea părților lui E; $(O_i)_{i\in I}$ o mulțime de operații generale definite pe mulțimea E; $(R_j)_{j\in J}$ o mulțime de reguli de definire unde

$$J=(0,1,2,\ldots,n,\ldots,\aleph_0,\ldots)$$

este o mulțime de numere cardinale astfel încît pentru:

$$j<\aleph_0$$

R_j este o regulă de definire *discret constructivă*, pentru

$$j=\aleph_0$$

R_j este o regulă de definire *formal constructivă*, pentru

$$\aleph_0<j\leqslant\mathfrak{Z}$$

R_j este o regulă de definire *sugerant constructivă*, iar pentru

$$j>\mathfrak{Z}$$

R_j este o regulă de definire *neconstructivă*; $\bigcup_{i\in I}E^{Oi}$ reuniunea extinderilor E^{Oi} ale mulțimii E prin operațiile generale Oi

Operația $P\in(Oi)_{i\in I}$ este aplicația

$$P:E\to\bigcup_{i\in I}E^{Oi}$$

definită de

$$(P:E\to\bigcup E^{Oi})\Leftrightarrow(E^P=_D[E:(R_j)_{j\in J}])$$

$$\downarrow$$

a) $(j<\aleph_0)\Rightarrow((R_0:E^{P_0}=_DE)\,\mathfrak{S}\,(R_1:E^{P_1}=_D\mathfrak{P}(E))\,\mathfrak{S}\,(R_2:E^{P_2}=\mathfrak{P}(\mathfrak{P}E)))\,\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S}(\ldots\mathfrak{S}(R_m:E^{P_m}=(E^{P_{m-1}})^P=\underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{m}(E))\ldots)\,\mathfrak{S}\ldots$$

$$\ldots\mathfrak{S}(R_{n\to\infty}:E^{P_{n\to\infty}}=\ldots\underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{\infty\leftarrow n}(E)\ldots))\ldots$$

b) $(j=\aleph_0)\Rightarrow(R_j:(E^{P_j}=_D\prod_1^\infty E_n)\,\mathfrak{S}\,(E_n=\ldots\underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{\infty\leftarrow n}(E)\ldots))\ldots))$

c) $\aleph_0<j\leqslant\mathfrak{Z})\Rightarrow(R_j:(E^{P_j}=_D\prod_{k\in K}E_k)\,\mathfrak{S}\,(\overline{\overline{K}}=j)\,\mathfrak{S}\,(j>j'\geqslant\aleph_0)\,\mathfrak{S}\,(E_k=_DE^{P_{j'}}))$

d) $(j>\mathfrak{Z})\Rightarrow(R_j:(E^{P_j}=_D\mathfrak{O}E_k)\,\mathfrak{S}\,(\overline{\overline{K}}=j)\,\mathfrak{S}\,(j>j\geqslant\mathfrak{Z})\,\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S}(E_k=_DE^{P_{j'}})\,\mathfrak{S}\,(O\in(Oi)_{i\in I})\,\mathfrak{S}\,(O:E_i\to\bigcup_{h\in H}E^{P_h})\,\mathfrak{S}\,(\overline{\overline{H}}\leqslant\mathfrak{Z})$$

e) $(j\in J)\Rightarrow(R_j^U:E_J^P=_D\bigcup_{j\in J}E^{P_{j'}})$

Definiția 1.6. Extinderea mulțimii E prin operația P

Fie E o mulțime abstractă și fie P operația generală determinată prin definiția 1.1. Mulțimea

$$E_J^P = {}_D\bigcup_{I \in J} E^{P_I}$$

se numește *extinderea* mulțimii E prin operația P în raport cu mulțimea de cardinali J.

Definiția 1.7. Subextinderea prin operația P

Fie E o mulțime abstractă și fie E_J^P extinderea sa prin operația P în raport cu J. Spunem că mulțimea

$$E' \subset E_J^P$$

este o subextindere a lui E prin operația P dacă

$$\dot{\varepsilon}\,(J' \subset J)$$
$$\downarrow$$
$$E' = E_{J'}^P = \bigcup_{I' \in J' \subset J} E^{P_I}$$

Definiția 1.8. Mulțime de proprietăți α—J^*— atașabile unei mulțimi E.

Fie: E o mulțime abstractă; F o mulțime de proprietăți; J, J^* două mulțimi de numere cardinale; E_J^P, $F_{J^*}^P$ extinderea lui E respectiv F prin operația P; P_α mulțimea propozițiilor α—valent Σ_α; $P''_\alpha \subset P_\alpha$ mulțimea propozițiilor semnificante de treapta a doua din Σ_α; $P'_\alpha \subset P''_\alpha \subset P_\alpha$ mulțimea propozițiilor semnificante de treapta I din Σ_α; (f) mulțimea tuturor aplicațiilor produsului cartezian $E_J^P \times F_{J^*}^P$ în orice domeniu posibil.

Spunem că mulțimea de proprietăți F este α—J^*— atașabilă mulțimii E și vom nota

$$E \overset{\alpha}{\underset{J^*}{|}} F$$

dacă

$$\varepsilon\,[(J_1 \subset J)\,\mathfrak{S}\,(J_1^* \subset J^*)\,\mathfrak{S}\,(f \in (f))\,\mathfrak{S}\,(P_\alpha^{*''} \subset P''_\alpha)$$
$$\downarrow$$
a) $f : E_{J_1}^P \times F_{J_1^*}^P \to P_\alpha^{*''}$

b) $(J_1 \neq \Phi)\,\mathfrak{S}\,(J_1^* \neq \Phi)\,\mathfrak{S}\,(P_\alpha^{*''} \neq \Phi)$

Definiția 1.9. Proprietăți compatibile pe o mulțime E

Fie: E o mulțime abstractă; F o mulțime de proprietăți α—J^*— atașabilă mulțimii E; $P''_\alpha \subset P_\alpha$ mulțimea propozițiilor α—valente semni-

ficante de treapta a doua ; $P'_\alpha \subset P''_\alpha \subset P_\alpha$ mulțimea propozițiilor semnifica de treapta I ; f funcția de atașare (def. 1.8.)

Spunem că $F^* \subset F$ este o mulțime de proprietăți α—J^* compatibile pe $E^* \subset$ și vom nota

$$E^* \overset{\alpha}{\underset{J^*}{\|}} F^*$$

dacă

$$\varepsilon\,[(J_1 \subset J) \,\&\, (J_1^* \subset J^*) \,\&\, (P_\alpha^{*\prime} \subset P'_\alpha \subset P''_\alpha \subset P_\alpha)$$

$$\downarrow$$

a) $f : E_{J_1}^{*P} \times F_{J_1^*}^{*P} \to P_\alpha^{*\prime}$

b) $(J_1 \neq \Phi) \,\&\, (J_1^* \neq \Phi) \,\&\, (P_\alpha^{*\prime} \neq \Phi)$

Definiția 1.10. Submulțimi α—J^*— compatibile.

Fie : $a, b, \in E_J^P$ și fie F o mulțime de proprietăți α—J^*— compatibile cu E.— Dacă

$$(a \overset{\alpha}{\underset{J' \subset J^*}{\|}} F' \subset F) \,\&\, (b \overset{\alpha}{\underset{J' \subset J^*}{\|}} F' \subset F)$$

atunci spunem că a, b sînt α—J'— compatibile în raport cu F' și vom nota

$$(a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'} .$$

Dacă :

$$\sim [(a \overset{\alpha}{\underset{J' \subset J^*}{\|}} F' \subset F) \,\&\, (b \overset{\alpha}{\underset{J' \subset J^*}{\|}} F' \subset F)$$

atunci spunem că a, b nu sînt α—J'— compatibile și vom nota

$$(a \overset{\alpha}{\underset{J'}{+\!+}} b)_{F'}$$

Teorema 1.1.

$$(E \,\|\, F) \,\&\, (a, b, c \in E_J^P) \Rightarrow \dot{\varepsilon}\,[(J'' \subset J' \subset J^*) \,\&\, (F' \subset F)$$

$$\downarrow$$

a) $(a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} a)_{F'}$

b) $(a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'} \Rightarrow (b \overset{\alpha}{\underset{J'' \subset J'}{\|}} a)_{F'}$

c) $(a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_F \,\&\, (b \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} c)_{F'} \Rightarrow (a \overset{\alpha}{\underset{J'' \subset J'}{\|}} c)_{F'}$

Definiția 1.11. Operați a P^F

Fie: E o mulțime abstractă; F o mulțime de proprietăți α—J— compatibile pe E; $\mathfrak{P}(E)$, $\mathfrak{P}(F)$ mulțimea părților lui E respectiv F; $(Oi)_{i\in I}$ o mulțime de operații generale definite pe E, F și pe EXF; $(R_j)_{j\in J}$ o mulțime de reguli de definire unde

$$J = (0, 1, \ldots, \aleph_0, \ldots \asymp \ldots)$$

este o mulțime de numere cardinale identică cu mulțimea de α—J— compatibilitate; $\bigcup_{i\in I} E^{Oi}$, $\bigcup_{i\in I} F^{Oi}$, $\bigcup_{i\in I}(E\times F)^{Oi}$ reuniunea extinderilor E^{Oi}, F^{Oi}, $(E\times F)^{Oi}$ ale respectiv mulțimilor E, F, EXF, prin operațiile generale Oi; E_J^P, F_J^P extinderile lui E și F prin operația P față de aceiași mulțime J de cardinali.

Operația $P^F(Oi)_{i\in I}$ este o aplicație

$$P^F : E \to \bigcup_{i\in I}(E\times F)^{Oi}$$

definită de

$$(P^F : E \to \bigcup_{i\in I}(E\times F)^{Oi}) \Leftrightarrow (E^{P^F} =_D [(E\times F) : (R_i)_{i\in I}])$$

$$\downarrow$$

a) $(j < \aleph_0) \Rightarrow ((R_0 : E^{P^F_0} =_D E\times F)\, \mathcal{S}\, R_1 : E^{P^F_1} =_D \mathfrak{P}(E)\times\mathfrak{P}(F))\, \mathcal{S}\, (R_2 : E^{P^F_2} =$

$$= ((E)^{P_1})^{P^F} = \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)\times\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)))\, \mathcal{S}\ldots\mathcal{S}\,(R_m : E^{P^F_m} = (E^{P^F_{m-1}})^{P^F} =$$

$$= \underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{m}(E))\ldots)\times\underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{m}(F)\ldots))\, \mathcal{S}\,(R_{n\to\infty} : E^{P^F_{n\to\infty}} =$$

$$= (\ldots\underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{\infty\leftarrow n}(E)\ldots))\ldots)\times(\ldots\underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{\infty\to n}(F)\ldots)))$$

b) $(j = \aleph_0) \Rightarrow (R_j : (E^{P^F_j} =_D (\prod_1^\infty E_n)\times(\prod_1^\infty F_n))\, \mathcal{S}\, (E_n =_D \ldots\underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{\infty\leftarrow n}(E)\ldots))\ldots)\, \mathcal{S}$

$$\mathcal{S}\,(F_n =_D \ldots\underbrace{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\ldots\mathfrak{P}}_{\infty\leftarrow n}(F)\ldots))\ldots)$$

c) $\aleph_0 < j \leqslant \asymp) \Rightarrow R_j : (E^{P^F_j} =_D (\prod_{k\in K} E_k)\times(\prod_{k\in K} F_k))\, \mathcal{S}\, (\overline{\overline{K}} = j)\, \mathcal{S}\, (j > j' \geqslant \aleph_0)\, \mathcal{S}$

$$\mathcal{S}\,(E_k =_D E^{P^F_{j'}})\, \mathcal{S}\,(F_k =_D F^{P_{j'}})$$

d) $(j > \asymp) \Rightarrow (R_j : (E^{P^F_j} =_D O_{k\in K}(E_k\times F_k)$

e) $(j \in J) \Rightarrow (R^{\cup}_j : E^{P^F}_J =_D \bigcup_{j\in J} E^{P^F_j})$

Definiția 1.12. Extinderea lui E prin operația P^F

Mulțimea

$$E_J^{P^F} =_D \bigcup_{i \in J}^{P^F}$$

se numește extinderea lui E prin operația P^F în raport cu mulțimea de cardinali J.

Definiția 1.13. Subextindere prin operația $P^{F'}$

Fie E o mulțime abstractă și fie E^{P^F} extinderea sa prin operația P^F. Spunem că mulțimea

$$E' \subset E_J^{P^F}$$

este o extindere a lui E prin operația P^F dacă

$$\dot{\varepsilon}(J' \subset J)\, \mathcal{S}\, (F' \subset F)$$
$$\downarrow$$
$$E' = E^{P^{F'}} = \bigcup_{i \in J' \subset J} E_J^{P^{F'}}$$

Teorema 1.2.

Fie: E o mulțime abstractă; E^{P^F} extinderea sa prin operația P^F; $(Oi)_{i \in I}$ o mulțime de operații generale definite pe $F_J^{P^F}$.

$$\dot{\varepsilon}\,(((a_h) \subset E_J^{P^F})_{h \in H \subset I})\, \mathcal{S}\, ((O_k)_{k \in K \subset I} \subset (Oi)_{i \in I})\, \mathcal{S} \cup, \cap, \Pi \in (O_k)_{k \in K \subset I})\, \mathcal{S}$$
$$\downarrow \qquad \mathcal{S}\, (J' \subset J\, \mathcal{S}\, (F' \subset F)$$
$$((a_h)_{h \in H}^{O_k}{}_{k \in K}) = E_{J' \subset J}^{P^{F'}}$$

§ 2. Proprietăți ale structurilor σ

Definiția 2.1. Structuri σ

Fie: E o mulțime abstractă; F o mulțime de proprietăți α—J— compatibile cu E într-un sistem logistic α—valent; $E_J^{P^F}$ extinderea lui E prin operația P^F; Ω o mulțime a cărei extindere Ω_J^P prin operația P este o mulțime de operatori pentru $E_J^{P^F}$; o operație algebrică în $E_J^{P^F}$ notată prin justapunere

$$AB = C;\ A, B, C \in E_J^{P^F}$$

și definită de

$$\varepsilon(E_J^{P^F} \times E_J^{P^F} \to E_J^{P^F})$$
$$\downarrow$$
$$(A, B \ni E^{P^F}) \Rightarrow (AB =_D A \underset{\rightarrow}{\cup} B)\ \mathfrak{S}\ (\varepsilon(<\in(Oi)_{i\in I}))\ \mathfrak{S}\ (\varepsilon(F' \subset F))$$
$$\downarrow$$
$$(a, b \in (A \underset{\rightarrow}{\cup} B)) \Leftrightarrow [((a, b \in (A \cup B))\ \mathfrak{S}\ (a \in A)\ \mathfrak{S}\ (b \in B) \Rightarrow (a < b)\ \mathfrak{S}\ (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'}) \vee$$
$$\vee ((a, b \in \subset A \cup B))\ \mathfrak{S}\ (b \in A)\ \mathfrak{S}\ (a \in B) \Rightarrow (b < a)\ \mathfrak{S}\ (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'}) \vee$$
$$\vee ((a, b \in (A \cup B))\ \mathfrak{S}\ ((a, b \in A) \vee (a, b \in B))) \Rightarrow (a \prec\!\!: b)\ \mathfrak{S}$$
$$\mathfrak{S}\ (b \prec\!\!: a)\ \mathfrak{S}\ (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{+}})_{F'}\ ;$$

o operație algebrică internă în Ω^P notată prin justapunere

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_3\ ;\ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega^P$$

și definită de

$$\varepsilon(\Omega_y^P \times \Omega_y^P \to \Omega_y^P$$
$$\downarrow$$
$$(X, Y \in \Omega_y^P) \Rightarrow (XY =_D X \underset{\rightarrow}{\cup} Y)\ \mathfrak{S}\ (\varepsilon(\dot{<}\in(Oi)_{i\in I}))\ \mathfrak{S}\ (\varepsilon(F' \subset F))$$
$$\downarrow$$
$$(x, y \in (X \underset{\rightarrow}{\cup} Y)) \Leftrightarrow [((x, y \in (X \cup Y))\ \mathfrak{S}\ (x \in X)\ \mathfrak{S}\ (y \in Y) \Rightarrow (x < y)\ \mathfrak{S}\ (x \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} y)_{F'}) \vee$$
$$\vee ((x, y \in (X \cup Y))\ \mathfrak{S}\ (y \in X)\ \mathfrak{S}\ (x \in Y) \Rightarrow (y < x)\ \mathfrak{S}\ (x \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}})_{F'}) \vee$$
$$\vee ((x, y) \in (X \cup Y)\ \mathfrak{S}\ (x, y \in X) \vee (x, y \in Y))) \Rightarrow (x \not< b)\ \mathfrak{S}$$
$$\mathfrak{S}\ (y \not< x)\ \mathfrak{S}\ (x \overset{\alpha}{\underset{J'}{+}})_{F'}\ ;$$

O operație algebrică externă pentru E

$$E_J^{P^F} \times \Omega_J^P \to E_J^{P^F}$$

notată exponențial

$$a^\omega = b\ ;\ a, b \in E_J^{P^F}\ ,\ \omega \in \Omega_J^P$$

Spunem că E este înzestrată cu o structură σ dacă este satisfăcut următorul sistem de axiome:

$$A\cdot 2\cdot 1 : (a \in E_J^{P^F})\ \mathfrak{S}\ (\omega \in \Omega_J^P) \Rightarrow \dot{\varepsilon}((b \in E_{J'}^{P^F})\ \mathfrak{S}\ (J' \subset J)\ \mathfrak{S}\ (L' \subset F))$$
$$\downarrow$$
$$(a^\omega = b)\ \mathfrak{S}\ (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'}\ \mathfrak{S}\ (\operatorname{card} \underset{i\in J'}{\amalg} a_i^{P^{F'}} = \operatorname{card} \underset{i\ J'}{\amalg} b_i^{P^{F'}})$$

$$A\cdot 2\cdot 2\ .\ (a, b, c \in E_J^{P^F})\ \mathfrak{S}\ (\omega \in \Omega^P)) \Rightarrow [(a\,b)\,c]^\omega = [a\,(b\,c)]^\omega\ \mathfrak{S} \subset [(ab)c]_F^\omega \overset{\alpha}{\underset{J'\subset J}{\|}} [a(bc)]_F^\omega\ \mathfrak{S}$$
$$\mathfrak{S}\ ((ab) \subset \not\equiv a\,(bc)\ ;\ \omega \in \Omega^{P_i>0},\ a, b, c \in F_J^{P_i>0}) \vee$$
$$\vee ((ab)c \equiv a(bc)\ ;\ \omega \in \Omega^{P_0},\ a, b, c \in F_J^{P_0^F})$$

$$A\cdot 2\cdot 3 : \varepsilon((J' \subset J)\ \mathfrak{S}\ (F' \subset F))$$
$$\downarrow$$
$$(a \in E_J^{P^F})\ \mathfrak{S}\ (\omega_1, \omega_2 \in \Omega_J^P) \Rightarrow ((a^{\omega_1})^{\omega_2} = a^{\omega_1\omega_2})\ \mathfrak{S}\ ((a^{\omega_1})^{\omega_2} \overset{\alpha}{\underset{J'\subset J}{\|}} a^{\omega_1\omega_2})_{F'\subset F}$$

$$A\cdot 2\cdot 4 : \varepsilon((\omega_0^j \in \Omega_j^{P_j})_{j\in J}\ \mathfrak{S}\ (J' \subset J)$$
$$\downarrow$$
$$(a_j \in E_J^{P_j^F})_{j\in J} \Rightarrow ((a_j^{\omega_0^j} = a_j) \vee (a_j^{\omega_0^j} \in a_j^{P_1}))\ \mathfrak{S}\ ((a_j^{\omega_0^j} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} a_j)_{F'}) \vee (a_j^{\omega_0^j} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b \in a_j^{P_1}))$$

$$A\cdot 2\cdot 5 : \varepsilon(\omega_j^* \in \Omega_j^{P_j})_{j\in J}\ \mathfrak{S}\ (J' \subset J)$$
$$\downarrow$$
$$((a_j \in E_J^{P_j^*})_{j\in J})\ \mathfrak{S}\ (\omega \in \Omega^P) \Rightarrow ((a_j^{\omega})^{\omega_j^*} = a_j^{\omega\omega_j^*} = a_j^{\omega_0^j})\ \mathfrak{S}\ ((a_j^{\omega_j^*} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} a_j^{\omega_0^j} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} a_j) \vee$$
$$\vee ((a_j^{\omega_j^*})^{\omega} = a_j^{\omega_j^*\omega} = a_j^{\omega_0^j}))\ \mathfrak{S}\ ((a_j^{\omega_j^*})^{\omega} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} a_j^{\omega_0^j} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b \in a_j^{P_1})_{F'}\ \mathfrak{S}\ (\omega\omega_j^* \not\equiv \omega_0^j))$$

$$A\cdot 2\cdot 6 : \varepsilon((a_0^j \in E_J^{P_j^F})_{j\in J}\ \mathfrak{S}\ (J' \subset J)\ \mathfrak{S}\ (F' \subset F))$$
$$\downarrow$$
$$(a_j \in E_J^{P_j^F})_{j\in J}\ \mathfrak{S}\ (\omega \in \Omega_J^P) \Rightarrow ((a_j\, a_0^j)^{\omega} = a_j^{\omega}) \vee (a_j\, a_0^j)^{\omega} = b \in (a_j^{\omega})^{P_1^F})\ \mathfrak{S}$$
$$\mathfrak{S}\ (((a_j\, a_0^j \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} a_j^{\omega})_{F'} \vee ((a_j\, a_0^j)^{\omega} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b \in (a_j^{\omega})^{P_1}))\ \mathfrak{S}\ (a_j\, a_0^j \not\equiv a_j\,;\ \omega \in \Omega_j^{P_j>0}) \vee$$
$$\vee (a_j\, a_0^j \equiv a_j\,;\ a_j \in E^{P_0^F},\ \omega \in \Omega_J^{P_0})$$

$$A\cdot 2\cdot 7 : \varepsilon((a_j^* \in E_j^{P_j^F})_{j\in J})\ \mathfrak{S}\ (J' \subset J)\ \mathfrak{S}\ (F' \subset F)$$
$$\downarrow$$
$$(a_j \in E^{P_j^F})\ \mathfrak{S}\ (\omega\ \Omega_J^P) \Rightarrow (((a_j\, a_j^*)^{\omega} = (a_0^j)^{\omega})\ \mathfrak{S}\ ((a_j\, a_j^*)^{\omega} \overset{\alpha}{\underset{\alpha}{\|}}$$
$$\overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} (a_0^5)^{\omega})_F \vee (((a_j^*\, a_j)^{\omega} = b^{\omega} \in ((a_0^j)^{P_1^F})\ \mathfrak{S}\ ((a_j^*\, a_j)^{\omega} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b \in ((a_0^j)^{\omega})^{P_1^F}_{F'}\ \mathfrak{S}$$
$$\mathfrak{S}\ ((a_j^*\, a_j \not\equiv a_j\, a_j^* \not\equiv a_0^j;\ \omega \in \Omega_{J'}^{P_j>1};\ a_j^*, a_j, a_0^j \in E_J^{P_j^F>1})\ \mathfrak{S}$$
$$\mathfrak{S}\ ((a_j^*\, a_j \equiv a_j\, a_j^* = a_0^j;\ \omega \in \Omega_J^{P_0};\ a_j^*, a_j, a_0^j \in E_J^{P_0^F}))$$

Definiția 2.2. Structuri σ parțiale

Fie o mulțime abstractă E și E^{P^F} extinderea sa prin operația P^F. Dacă în E^{P^F} nu sînt satisfăcute toate axiomele $A.2.1.$ — $A.2.7.$ din definiția 2.1., atunci spunem că E este înzestrată cu o structură σ parțială.

Observația 2.1. Dacă structura parțială este definită de axiomele $A.2\ m$, $A.2\ n, \ldots$ atunci vom însemna această structură prin $\sigma_{m,n\ldots}$

Definiția 2.3. Structură de F — grup

Fie E o mulțime abstractă ; τ simbolul structurii de grup ; F o mulțime de proprietăți α—j— atașabile mulțimii E.

Spunem că E este înzestrată cu o structură de F — grup notată prin $\sigma_{F\gamma}$, dacă

$$\varepsilon((F' \subset F) \mathbin{\&} (J' \subset J))$$
$$\downarrow$$
$$(E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma_{F\gamma}) \Leftrightarrow (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \gamma) \mathbin{\&} (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} F')$$

adică

a) E este înzestrată cu o structură de grup pe toate realizările (modelele) lui E, exceptînd poate o mulțime numerabilă de realizări ale lui E.

b) $F' \subset F$ este o mulțime de proprietăți α—J'— compatibile pe toate realizările E exceptînd poate o mulțime cel mult numerabilă de realizări ale lui E.

Teorema 2.1.

Fie: E o mulțime abstractă; F o mulțime de proprietăți α — J-atașabile mulțimii E; $\mathcal{C}_\alpha$ funcția consecință în sistemul logistic Σ_α.

$$\varepsilon((J' \subset J) \mathbin{\&} (F' \subset F)$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma_{F\gamma}) \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma)$$

Demonstrație:

Conform definiției 2.3. avem

$$(E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma_{F\gamma}) \dot{\Leftrightarrow} (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \gamma) \mathbin{\&} (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} F')$$

deci

$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma_{F\gamma}) \doteq \mathcal{C}_\alpha ((E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \gamma) \mathbin{\&} (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} F'))$$

de unde

$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma_{F\gamma}) \dot{:} \mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \gamma)) \cup (\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} F') \tag{1}$$

dar

$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} F') \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} F) \subset \mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma)$$

deci

$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} F') \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma) \tag{2}$$

Rămîne să demonstrăm că

$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \gamma) \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \gamma)$$

Fie structura $\sigma_{1,2,6,7}$, definită de axiomele *A*.2.1., *A*.2.2., *A*.2.6, *A*.2.7. din definiția 2.1. și fie structura $\sigma_{F\Upsilon}$ definită de axiomele

$$\Gamma_1 : (a, b \in E) \Rightarrow \dot{\varepsilon}\,(c \in E) \downarrow ab = c$$

$$\Gamma_2 : (a, b, c \in E) \Rightarrow ((ab)\,c = a\,(bc))$$

$$\Gamma_3 : \dot{\varepsilon}\,(e \in E) \downarrow (a \in E_J \Rightarrow (a\,e = a)$$

$$\Gamma_4 : (a \in F) \Rightarrow \dot{\varepsilon}\,(a' \in E) \uparrow (aa' = c)$$

Să considerăm *A*.2.1. Fie

$$(a \in F^{P_1^F}) \,\&\, (a = (a_1) \underset{\rightarrow}{\cup} (a_2)) \,\&\, ((a_1), (c_3) \in E_J^{P_0^\tau}$$

Avem

$$(a \in E^{P_1^F}) \,\&\, (\omega \in \Omega) \Rightarrow \dot{\varepsilon}\ (b \in E_J^{P^F}) \,\&\, (J' \subset J) \,\&\, (F' \subset F) \downarrow (a^\omega = b) \,\&\, (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F_1} \,\&\, (\operatorname{card} \prod_{j \in J'} a_{J'}^{P_j^F} = \operatorname{card} \prod_{j \in J'} b_{J'}^{P_j^F})$$

Însă

$$\operatorname{card} \prod_{j \in J'} a_{J'}^{P_j^F} = \operatorname{card} ((a_1) \times (a_2)) = 1$$

deci

$$\operatorname{card} \prod b_{J'}^{P_j^F} = 1\,,$$

și deci

$$b \in E_J^{P_0^F}$$

rezultă

$$A \cdot 2 \cdot 1 \cdot \dot{\Rightarrow}_1 \Gamma\,.$$

Să considerăm *A*.2.2. Fie

$$a, b, c \in E_J^{P_0^F} \subset E_J^{P_1^F}\,.$$

Avem

$$(a, b, c \in E_J^{P_0^F}) \,\&\, (\omega \in \Omega_J^{P_0}) \Rightarrow (((ab)c)^\omega = (a(bc))^\omega) \,\&\, ((ab)c = a(bc))$$

deci

$$A.2.2. \dot{\Rightarrow} \Gamma_2 \tag{4}$$

Să considerăm *A*.2.6. Fie $j = 0$. Avem

$$\varepsilon\,(a_0 \in E_J^{P_0^F}) \,\&\, (J' \subset J) \downarrow (a \in E_J^{P_0^F}) \,\&\, (\omega \in \Omega_J^{P_0}) \Rightarrow ((aa_0)^\omega = a^\omega) \,\&\, (aa_0 = a)$$

deci

$$A.2.6. \dot{\Rightarrow} \Gamma_3 . \tag{5}$$

Să considerăm $A.2.7$. Fie $j = 0$. Avem

$$\varepsilon((a^* \in E_J^{P_0^F}) \mathbin{\&} (J' \subset J))$$
$$\downarrow$$
$$(a \in E_J^{P_0^F}) \mathbin{\&} (\omega \in \Omega_J^{P_0}) \Rightarrow ((aa^*)^\omega = a_0^\omega) \mathbin{\&} (aa^* = a_0)$$

deci

$$A \cdot 2 \cdot 7 \cdot \dot{\Rightarrow} \Gamma_4 \tag{6}$$

din (3), (4), (5), (6) rezultă

$$\mathcal{C}_\alpha (E_J^{P_0^F} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma\, 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7) \dot{\supset} \mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \gamma) \tag{7}$$

dar

$$\mathcal{C}_\alpha (E_J^{P_0^F} \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma\, 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7) \dot{\supset} \mathcal{C}_\alpha (E_{J'}^{P_0^F} \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma\, 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 \tag{8}$$

și

$$\mathcal{C}_\alpha (E_J^{P^F} \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma) \dot{\supset} \mathcal{C}_\alpha (E_J^{P_0^F} \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma\, 1.2.6.7 \tag{9}$$

din (7), (8), (9), rezultă

$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}}, \gamma) \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha (E_J^{P^F} \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma) \tag{10}$$

din (2) și (10) avem

$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \gamma) \cup \mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\|} F') \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha (E_J^{P^F} \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma)$$

adică

$$\mathcal{C}_\alpha ((E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \gamma) \mathbin{\&} (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} F') \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha (E_J^{P^F} \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma)$$

dar

$$(E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \gamma) \mathbin{\&} (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} F') \dot{\Leftrightarrow} (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma\, F\, \gamma)$$

deci

$$\mathcal{C}_\alpha (E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma_{F\gamma}) \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha (E_J^{P^F} \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma)$$

Catedra de Matematică

BIBLIOGRAFIE

1. *E. Beth:* Les fondements logiques des matématiques, Paris, 1954.
2. *Г. Биркхов:* Теория структур, Москва, 1953.
3. *Bourbaki:* Théorie des ensembles, Chap. I, IV, Paris, 1951.
4. *А. Курош:* Теория групп, Москва, 1953.
5. *M. Tîrnoveanu:* Structuri „*S*", Lucrări ştiinţifice vol. IV, Inst. pol. Braşov, 1960, p. 17—30.
6. *M. Tîrnaveanu:* Despre un domeniu logic transfinit, Comunicările Acad. R.P.R., 1961, XI, 9, p. 1017—1024.
7. *M. Tîrnoveanu:* Despre unele proprietăţi ale structurilor *ST* — divizoare normele, Comunicările Acad. R.P.R., 1961, XI, 9, p. 1033—1038.
8. *M. Tîrnoveanu:* Despre funcţia de exprimare logică Φ, Comunicănile Acad. R.P.R., 1961, XI, 12, p. 1417—1422.
9. *M. Tîrnoveanu:* Despre funcţiile $\mathfrak{C}$ generalizate, Comunicările Acad. R.P.R., 1962, XII, 1, p. 29—36.
10. *M. Tîrnoveanu:* Despre funcţia de valenţă logică ψ Comunicările Acad. R.P.R., 1962, XII, 6, p. 623—630.
11. *M. Tîrnoveanu:* Structuri *D*—Topologice I, Lucrările consfătuirii de geometrie şi topologie Iaşi, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962, p. 207—214.

О АЛГЕБРЕ С ОПЕРАТОРАМИ ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ В $E_J^{P^F}$

(Краткое содержание)

В § 1 определяется символы ε, $\dot{\varepsilon}$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ $\dot{\Leftrightarrow}$ операция P, продолжение и подпродолжение E через P, $\alpha - J$ — свойства присвоимые множеству E, $\alpha - J$ — своиства совместимые на E, операция P^F, продолжение и подпродолжение E через P^F, и указывается теоремю:

Теорема 1.1.

$$(E \overset{\alpha}{\underset{J^*}{\|}} F) \,\&\, (a, b, c \in E_J^P) \Rightarrow \dot{\varepsilon}\,[(J'' \subset J' \subset J^*) \,\&\, (F' \subset F)]$$

$$\downarrow$$

$$a) \cdot (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} a)_{F'}$$

$$b) \cdot (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'} \Rightarrow (b \overset{\alpha}{\underset{J'' \subset J'}{\|}} a)_{F'}$$

$$c) \cdot (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'} \,\&\, (b \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} c)_{F'} \Rightarrow (a \overset{\alpha}{\underset{J'' \subset J'}{\|}} c)_{F'}$$

Теорема 1.2.

$$\dot{\varepsilon}\,(((a_h)\subset(E_J^{P^F})_{h\in H\subset J})\,\mathfrak{S}\,((O_k)_{k\in K\subset I}\subset(O_i)^{i\in I})\,\mathfrak{S}\,(\bigcup,\bigcap,\pi\in(O_k)_{k\in K\subset I})\,\mathfrak{S}\,(J'\subset J)\,\mathfrak{S}\,(F\subset F)$$

$$\downarrow$$

$$((O_h)^{Ok}_{h\in H,\,k\in K})=E^{P^{F'}}_{J'\subset J}$$

В § 2 определяются алгебры σ и указывается.

Теорема 2.1.

$$\varepsilon\,((J'\subset J)\,\mathfrak{S}\,(F'\subset F)$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{C}_\alpha(E\overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}}\sigma F\gamma)\,\dot{\subset}\,\mathcal{C}_\alpha(E\overset{\alpha}{\underset{J}{\|}}\sigma)$$

ON AN ALGEBRAIC STRUCTURE WITH OPERATORS DEFINED IN $E_J^{P^F}$

(Summary)

In § 1 there are defined the symbols $\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \dot{\Leftrightarrow}, P$ operation, the extension of E through P operation, underextention of E through P operations, properties

$\alpha - J$ — atachable to set E, properties $\alpha - J$ — compatible on E, P^F operation, the extension of E through P^F operation, underextention of E. through P^F operation, there are given the theorems.

Theorem 1.1.

$$(E\overset{\alpha}{\underset{J_*}{\|}}F)\,\mathfrak{S}\,(a,b,c\in E_J^P)\Rightarrow\dot{\varepsilon}\,[(J''\subset J'\subset J^*)\,\mathfrak{S}\,(F'\subset F)]$$

$$\downarrow$$

a) $(a\overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}}a)_{F'}$

b) $(b\overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}}b)_{F'}\Rightarrow(b\overset{\alpha}{\underset{J''\subset J'}{\|}}a)_{F'}$

c) $(a\overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}}b)_{F'}\,\mathfrak{S}\,(b\overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}}c)_{F'}\Rightarrow(a\overset{\alpha}{\underset{J''\subset J'}{\|}})_{F'}$

Theorem 1.2.

$$\dot{\varepsilon}\,(((a_h)_{h\in H\subset J}\subset E_J^{P^F})\,\mathfrak{S}\,((O_k)_{k\in K\subset I}\subset(O_i)_{i\in I}\,\mathfrak{S}\,(\bigcup,\bigcap,\Pi\in(O_k)_{k\in K})\,\mathfrak{S}\,(J'\subset J)\,\mathfrak{S}\,(F'\subset F)$$

In § 2 there are defined the structures σ and are given

Theorem 2.1.

$$\begin{array}{l} \varepsilon\,((J' \subset J)\ \mathfrak{S}\ (F' \subset F) \\ \uparrow \\ \mathcal{C}_\alpha\,(E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma_{F\gamma}) \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha\,(E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}}) \end{array}$$

SUR UNE STRUCTURE ALGEBRIQUE AVEC DES OPERATEURS DEFINIE DANS E^{P^F}

(Résumé)

Dans la § 1 on définit les symboles ε, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\Rightarrow}$, $\dot{\Leftrightarrow}$, $\dot{\Leftrightarrow}$ l'opération P, l'extension du E par l'opération P, la sousextension du E par l'opération P, lespropriétés α—J—attachables à l'ensemble E, les propriétés α—J—compatibles sur E, l'opération P^F, l'extention du E par l'opération P^F, la sousextention du E par l'opération P^F et on donne les théorêmes :

Théorême 1.1.

$$(E \overset{\alpha}{\underset{J_*}{\|}} F)\ \mathfrak{S}\ (a, b, c \in E_J^P) \Rightarrow \underset{\downarrow}{\dot{\varepsilon}}\,[(J'' \subset J' \subset J^*)\ \mathfrak{S}\ (F' \subset F)]$$

a) $(a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} a)_{F'}$

b) $(a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'} \Rightarrow (b \overset{\alpha}{\underset{J''\subset J'}{\|}} a)_{F'}$

c) $(a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'}\ \mathfrak{S}\ (b \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} c)_{F'} \Rightarrow (a \overset{\alpha}{\underset{J''\subset J'}{\|}} c)_{F'}$

Théorême 1.2.

$$\begin{array}{l} \varepsilon\,(((a_h)_{h\in H\subset I} \subset E_J^{P^F})\ \mathfrak{S}\ ((O_k)_{k\in K\subset I} \subset (N_i)_{i\in I})\ \mathfrak{S}\ (\bigcup, \bigcap, \prod \in (O_k)_{k\in K})\ \mathfrak{S}\ (J' \subset J)\ \mathfrak{S}\ (F' \subset F) \\ \downarrow \\ ((a_h)^{Ok}_{h\in H,\ k\in K}) = E^{P^{F'}}_{J'\subset I} \end{array}$$

Dans le § 2 on définit les structures σ et on donne la suivante

Théorême 2.1.

$$\begin{array}{l} \varepsilon\,((J' \subset J)\ \mathfrak{S}\ (F' \subset F) \\ \downarrow \\ \mathcal{C}_\alpha\,(E \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} \sigma_{F\gamma}) \dot{\subset} \mathcal{C}_\alpha\,(E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma) \end{array}$$

ÜBER EINE ALGEBREISCHE STRUKTUR MIT IN $E_J^{P^F}$ DEFINITIERTEN OPERATOREN

(Zusammenfassung)

In § 1 werden die Symbole $\varepsilon\ \dot{\varepsilon}\ \dot{\Rightarrow}\ \dot{\Leftrightarrow}\ .$ die Operation P, die Erweiterung von E mittels der Operation P, die Untererweiterung von E mittels der Operation P, die Eigenschaften α—J die der Menge E zugeodnet werden können, die auf E mit einander vereinbaren Eigenschaften die Erweiterung von E mittels der Operation P^F α—J, die Operation P^F, die Untererweiterung von E mittels der Operation P^F definiert.

Gleichzeitig werden din *Sätze* angegeben:

Satz 1.1.

$$(E \overset{\alpha}{\underset{J^*}{\|}} E)\ \mathfrak{S}\ (a, b, c \in E_J^P) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{\downarrow}[(I'' \subset J \supset J^*)\ \mathfrak{S}\ (F' \subset F)]$$

$$a)\ (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}})_{F'}$$

$$b)\ (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}})_{F'} \Rightarrow (b \overset{\alpha}{\underset{J \subset J}{\|}} a)_{F'}$$

$$c)\ (a \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} b)_{F'}\ (b \overset{\alpha}{\underset{J'}{\|}} c)_{F'} \Rightarrow (a \overset{\alpha}{\underset{J'' \subset J'}{\|}} c)_{F'}$$

Satz 1.2.

$$\varepsilon\ '((O_h)_{h \in H \subset J} \subset E_J^{D^F})\ \mathfrak{S}\ ((O_k)_{k \in k \subset I} \subset (O_i)_{i \in I})\ \mathfrak{S}\ (\bigcup, \bigcap, \pi \in (O_k)_{k \in k})\ \mathfrak{S}\ (J' \subset J)\ \mathfrak{S}\ \mathfrak{C}\ (F' \subset F$$

In § 2 werden din Strukturen σ definiert und *der Satz 2,1* angegeben:

$$\varepsilon\ ((J' c J)\ \mathfrak{S}\ (F' C F)$$
$$\downarrow$$
$$\mathfrak{C}_\alpha\ C E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma_{F_Y}) \dot{C}\ \mathfrak{C}\alpha\ (E \overset{\alpha}{\underset{J}{\|}} \sigma)$$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 1

ASUPRA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ADJUNCTE

I. M. MIU

În cele ce urmează vom da generalizări ale ecuației adjuncte în cazul ecuației diferențiale liniare și în cazul sistemelor de ecuații lineare.

A. Ecuații diferențiale lineare

a) Factori diferențiali de ordinul I.

Fie ecuația diferențială lineară

$$L_n(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{1}$$

unde coeficienții a_j sînt în general funcții de x, pe care o scriem sub forma:

$$L_n(D)\, y = (D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n D^0)\, y \tag{1'}$$

1°. Punem condiția ca în [3], ca ecuația diferențială 1) să se descompună într-un produs de doi factori diferențiali astfel ca primul să fie de ordinul I. Avem:

$$L_n(D)\, y = (D^1 - m D^0)(D^{n-1} + A_{11} D^{n-2} + A_{12} D^{n-3} + \cdots + A^{1,n-1} D^0)\, y \tag{2}$$

Am văzut [3] că dacă punem:

$$z = e^{-\int m\, dx} \tag{3}$$

valoarea lui m este dată prin intermediul lui z de ecuația adjunctă a ecuației 1), adică de

$$L_{an}(z) = z^{(n)} - (a_1 z)^{(n-1)} + (a_2 z)^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n a_n z = 0 \tag{4}$$

Coeficienții A_{1j} din 2) sînt dați de relațiile:

$$A_{11} - m = a_1,\ A_{12} + A'_{11} - m A_{11} = a_2, \cdots A_{1,n-1} + A'_{1,n-2} - m A_{1,n-2} = a_{n-1}$$

$$A'_{1,n-1} - m A_{1,n-1} = a_n \tag{5}$$

Acești coeficienți se obțin însă după cum am arătat în [3] și direct prin împărțirea:

$$\frac{L_n(D)}{(D^1 - m D^0)_s} = \frac{D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n D^0}{(D^1 - m D^0)_s} \tag{6}$$

care dă chiar factorul al doilea al produsului 2).

Indicele s, arată că împărțirea se face la stînga, adică $D^1 - m D^\circ$ este un factor la stînga al lui $L_n(D)$.

La împărțirea 6) se procedează ca la împărțirea unui polinom cu x-a, însă la aflarea cîtului, care este

$$L_{n-1}(D) = D^{n-1} + A_{11} D^{n-2} + A_{12} D^{n-3} + \cdots + A_{1,n-1} D^0 \tag{7}$$

se aplică operatorul împărțitor termenilor cîtului.

În acest mod rezultă expresia 7) ca un cît al împărțirii 6).

Această regulă provine din însăși faptul că produsul de operatori se efectuează de la stînga la dreapta.

Ecuația adjunctă se interpretează astfel:

Ea exprimă condiția ca ecuația diferențială 1) să admită un factor diferențial ca ecuația diferențială 1) să admită un factor diferențial de ordinul întîi la stînga.

— Rezultă că ecuația adjunctă se poate obține egalînd cu zero restul împărțirii lui $L_n(D)$ cu $D^1 - m D^\circ$.

Să găsim valorile coeficienților A_{1j}.

Ținînd cont de 3) obținem din prima ecuație 5):

$$A_{11} = (-z' + a_1 z) z^{-1}$$

și din ecuația doua din 5) avem:

$$A_{12} = [z'' - (a_1 z)' + a_2 z] z^{-1}$$

Se demonstrează prin inducție completă că:

$$A_{1j} = (-1)^j [z^{(j)} - (a_1 z)^{(j-1)} + (a_2 z)^{(j-2)} - \cdots + (-1)^j a_j z] z^{-1} \tag{8}$$

Se știe că valoarea lui m se poate obține și cu formula lui Floquet, cînd se cunoaște un sistem fundamental $I_1, I_2, \ldots I$ al ecuației 1). Astfel dacă scriem ecuația 1) sub formă de produs de factori diferențiali astfel:

$$L_n(D) y = \prod_{j=0}^{n-1} (D^0 - m_{n-j} D_0) y = 0 \tag{9}$$

coeficienții m_k sînt dați de formulele lui Floquet:

$$m_k = \frac{d}{dx} \ln \frac{W_k}{W_{k-1}} \tag{10}$$

unde W_k este wronskianul sistemului $y_1, y_2, \ldots y_k$

2° Să punem condiția ca ecuația 1) să se descompună în doi factori diferențiali, însă primul factor din dreapta să fie de ordinul I. Avem:

$$L_n(D) y = (D^{n-1} + B_{11} D^{n-2} + B_{12} D^{n-3} + \cdots + B_{1,n-1} D^0)(D^1 - p D^0) y \tag{11}$$

Anulînd primul factor se găsește că $z=e\int pdx$ este o soluție a ecuației 1) și deci $L_n(z)=0$ ne dă valoarea lui p.

Valorile coeficienților B_{1j} se pot găsi prin identificare sau prin împărțire, însă pentru a-i găsi sub o formă canonică procedăm astfel:

Egalăm ultimul factor din 11) cu e^{kx} și găsim:

$$y=z\int z^{-1}e^{kx}dx$$

Această valoarea înlocuită în aceeași egalitate dă:

$$L_n'z\int z^{-1}e^{kx}dx)=(k^{n-1}+k^{n-2}B_{11}+\cdots+k^{n-j-1}B_{1j}+\cdots+B_{1,n-1})e^{kx}$$

Derivînd aceasta de n-j-1 ori în raport cu k se obține valoarea lui B_{1j}:

$$B_{1j}=\frac{1}{(n-j-1)!}[L_n(z\int z^{-1}e^{kx}dx)]_{k=0}^{(n-j-1)} \tag{12}$$

b) Factori diferențiali la stînga și dreapta.

Între ecuațiile diferențiale lineare și cele algebrice s-au făcut analogii din unele puncte de vedere. Astfel Brasine [1] indică modul de aflare a rădăcinilor comune a două ecuații diferențiale lineare.

În cele ce urmează vom face o extindere introducînd noțiunea de cel mai mare divizor comun la stînga și la dreapta a două polinoame diferențiale.

1° Cel mai mare divizor comun la dreapta.

Fie două ecuații diferențiale:

$$L_n(D)y=0, \qquad L_m(D)y=0, \text{ unde } m\leqslant n \tag{13}$$

și să căutăm cel mai mare divizor comun al polinoamelor diferențiale $L_n(D)$, $L_m(D)$. Presupunem că ecuațiile 13) au r soluții particulare linear independente comune.

Împărțim simbolic la stînga polinomul $L_n(D)$ cu polinomul $L_m(D)$ și avem:

$$\frac{L_n(D)}{(L_m(D))_d}=Q_{s1}(D)+\frac{R_1(D)}{(L_m(D))_d} \tag{14}$$

unde d indică împărțirea la dreapta iar s indică factorul la stînga, $R_1(D)$ fiind restul cu ordinul mai mic ca m.

Împărțirea se face ca la polinoame, însă cîtul $Q_{s1}(D)$ fiind factor la stînga, iar $L_m(D)$ la dreapta, fiecare termen al cîtului îl înmulțim cu împărțitorul în sens de operator.

Expresia 14) se scrie:

$$L_n(D)=L_{s1}(D)\,L_m(D)+R_1(D) \tag{15}$$

Dacă $R_1(D)$ este nul, atunci $L_m(D)$ este rezultatul căutat.

Din 15) se vede că divizorii comuni lui $L_n(D)$ și $L_m(D)$ sînt comuni și lui $R_1(D)$. De aici se trage concluzia că se poate aplica algoritmul lui Euclid și la polinoame diferențiale pentru aflarea celui mai mare divizor

comun al lor și deci pentru găsirea soluțiilor comune mai multor ecuații diferențiale.

Astfel pentru a afla cel mai mare divizor comun la dreapta, împărțim la dreapta pe $L_n(D)$ cu $L_m(D)$ apoi pe $L_m(D)$ la primul rest $R_1(D)$, restul $R_1(D)$ la restul $R_2(D)$ și se continuă pînă împărțirea la dreapta se face exact. Ultimul împărțitor rest $R_p(D)$, care împarte exact, dă cel mai mare divizor comun la dreapta : $R_p(D) = L_{dr}(D)$.

Soluțiile comune ecuațiilor 13) sînt date de $L_{dr}(D)\, y = 0$.

2° Cel mai mare divizor comun la stînga.

Dacă polinoamele diferențiale $L_n(D)$, $L_m(D)$, admit la stînga cel mai mare divizor comun de ordinul r, avem :

$$L_n(D) = L_{sr}(D)\, L_{n-r}(D)$$

$$L_m(D) = L_{sr}(D)\, L_{m-r}(D)$$

Pentru aflarea lui $L_{sr}(D)$ procedăm prin împărțire analog ca în cazul precedent. Avem :

$$\frac{L_n(D)}{(L_m(D))_s} = Q_{d1}(D) + \frac{S_1(D)}{(L_m(D))_s} \qquad (16)$$

Aici împărțirea se face la stînga, $Q_{d1}(D)$ este cîtul la dreapta iar $S_1(D)$ este restul cu ordinul mai mic ca m.

Împărțirea se face de asemenea ca la polinoame, însă factorul $Q_{d1}(D)$ fiind la dreapta, împărțitorul se înmulțește în sens de operator cu fiecare termen al cîtului.

Expresia 16) se scrie :

$$L_n(D) = L_m(D) \cdot Q_{d1}(D) + S_1(D) \qquad (17)$$

Se observă de asemenea că factorii de la stînga comuni lui $L_m(D)$ și $L_n(D)$ sînt comuni și lui $S_1(D)$.

Rezultă, ca și în cazul precedent, că algoritmul lui Euclid este valabil și în acest caz.

Ultimul împărțitor rest $S_r(D)$, care împarte exact la stînga, este cel mai mare divizor comun la stînga, deci $S_r(D) = L_{sr}(D)$.

Se poate întîmpla să existe divizori comuni la dreapta și la stînga. În acest caz se găsesc pe rînd fiecare, însă pentru simplificare, după aflarea unuia din ei se împart polinoamele diferențiale cu acesta pentru a le reduce ordinul.

Reamintim teorema lui Frobenius (reine angew, Math, 76 (1873), p. 256 ; 77 (1874) p. 245) care spune :

Dacă un polinom diferențial este pus sub formă de produs de factori diferențiali astfel :

$$L_n(D) = L_{n_1}(D)\, L_{n_2}(D) \cdots L_{n_p}(D)$$

atunci polinomu diferențial adjunct $L_{an}(D)$ este egal cu produsul factorilor adjuncți în ordine inversă :

$$L_{an}(D) = L_{an_p}(D)\, L_{an_{p-1}}(D) \cdots L_{an_1}(D)$$

În baza acestei teoreme rezultă că dacă două polinoame diferențiale $L_n(D)$ și $L_m(D)$ au pe $L_{sr}(D)$ ca cel mai mare divizor comun la stînga, atunci ecuațiile lor adjuncte $L_{an}(D)y=0$, $L_{am}(D)y=0$ au soluțiile comune date de ecuația adjunctă $L_{asr}(D)y=0$.

c) Sisteme adjuncte ale unei ecuații diferențiale.

Dăm următoarele definiții:

Numim sistem adjunct stîng al unei ecuații diferențiale lineare, sistemul de ecuații diferențiale care determină un factor diferențial stîng al acestei ecuații.

Analog, numim sistem adjunct drept al unei ecuații diferențiale lineare, sistemul de ecuații diferențiale care determină un factor diferențial drept al ecuației considerate.

În cazul particular al factorului diferențial de ordinul I la stînga, obținem ecuația adjunctă propriu-zisă și în cazul factorului diferențial de ordinul I la dreapta obținem ecuația dată.

1° Sistem adjunct drept pentru factor diferențial de ordinul II.

Scriem polinomul diferențial al ecuației 1) astfel

$$L_n(D)=(D^{n-2}+B_{21}D^{n-3}+B_{22}D^{n-4}+\cdots+B_{2,n-2}D^0)(D^2+pD^1+qD^0) \quad (18)$$

Coeficienții B_{2j} se pot obține în funcție de p și q prin împărțire la dreapta membrului I din 18) cu $D^2+pD^1+qD^0$.

Se anulează apoi restul obținut din împărțire și se capătă sistemul adjunct în p și q.

Aplicația 1.

În cazul ecuației diferențiale de ordinul 3:

$$L_3(D)y=(D^3+a_1D^2+a_2D^1+a_3D^0)y=0$$

sistemul adjunct drept este:

$$p'+p(a_1-p)+q-a_2=0$$

$$q'+q(a_1-p)-a_3=0$$

Aplicația 2.

Pentru ecuația diferențială de ordinul 4:

$$L_4(D)y=(D^4+a_1D^3+a_2D^2+a_3D^1+a_4D^0)y=0$$

împărțind cu $D^2+pD^1+qD^0$, se obține sistemul adjunct la dreapta:

$$p''+2q'+(p'+p-p^2)(a_1-p)+p(a_2-2p'-q)-a_3=0$$

$$q''+(q'-pq)(a_1-p)+q(a_2-2p'-q)-a_4=0$$

cu funcții necunoscute p și q.

2° Sistem adjunct stîng pentru factor diferențial de ordinul II.

Ecuația 1) se scrie:

$$L_n(D)y=(D^2+rD^1+sD^0)(D^{n-2}+A_{21}D^{n-3}+\ldots A_{2,n-2}D^0)y. \quad (18')$$

Coeficienții A_{2j} r, s, se pot determina fie prin identificare, fie prin împărțire la stînga.

Putem însă reduce problema la cazul precedent scriind pentru (18′) relația adjunctă între adjunctele polinoamelor respective, conform teoremei lui Frobenius. Avem:

$$L_{an}(D) = L_{a,n-2}(D)\,[D^2 - rD^1 + (s - r')\,D^0],$$

unde $L_{a,n-2}(D)$ este adjunctul ultimului polinom din 18′). Din condițiile ca $L_{an}(D)$ să se împartă exact cu $D^2 - rD^1 + (s - r')D^0$, obținem sistemul adjunct stîng pentru factor de ordinul II.

Analog se obțin sisteme adjuncte pentru factori de orice ordin.

B. Sisteme de ecuații diferențiale

Fie sistemul linear:

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ik}y_k + \cdots + a_{in}y_n, \qquad i = 1, 2, \cdots n. \tag{1}$$

Se știe că sistemul adjunct al acestuia este sistemul linear:

$$\frac{dY_i}{dx} = -a_{1i}Y_1 - a_{2i}Y_2 - \cdots - a_{ki}Y_k - \cdots - a_{ni}Y_n, \qquad i = 1, 2, \cdots n. \tag{2}$$

(coeficienții a_{pq} sînt în general funcții de x)

Rezultă că dacă se cunoaște un sistem particular de soluții al sistemului adjunct 2) avem o integrală primă:

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k y_k = C \tag{3}$$

a sistemului 1).

În cele ce urmează vom da o extindere a sistemului adjunct al unui sistem de ecuații diferențiale lineare.

Definiția I. Vom numi sistem adjunct al unui sistem linear de ecuații diferențiale orice sistem linear de ecuații, dacă prin cunoașterea unui sistem particular de soluții al lui, se poate obține o integrală primă a sistemului dat, de forma:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x)\,Y_k y_k = C\psi(x) \tag{4}$$

unde $m_k(x), \psi(x)$ sînt funcții cunoscute.

După această definiție, unui sistem 1) îi corespunde o mulțime de sisteme adjuncte. Astfel un sistem adjunct al sistemului 1) este:

$$\frac{dY_i}{dx} = -a_{1i}Y_1 - a_{2i}Y_2 - \cdots - a_{i-1,i}Y_{i-1} - (a_{ii} + \varphi)\,Y_i - \\ - a_{i+1,i}Y_{i+1} - \cdots - a_{ni}Y_n, \qquad i = 1, 2, \cdots n \tag{5}$$

Pentru sistemele 1) și 5) rezultă:

$$(\sum_{k=1}^{n} Y_k y_k)' = -\varphi(\sum_{k=1}^{n} Y_k y_k)$$

de unde se găsește:

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k y_k = C e^{-\int \varphi dx}. \tag{6}$$

Formula 6) arată că între 1) și 6) există reciprocitate.

Fie sistemul

$$\frac{dY_i}{dx} = b_{1i} Y_1 + b_{2i} Y_2 + \cdots + b_{ni} Y_n, \qquad i = 1, 2, \cdots n, \tag{7}$$

unde b_{ki} sînt în general funcții de x și să găsim condițiile ca acesta să reprezinte un sistem adjunct al lui 1).

Punem condiția:

$$(\sum_{k=1}^{n} m_k Y_k y_k)' = \varphi(\sum_{k=1}^{n} m_k Y_k y_k) \tag{8}$$

Avem:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k' Y_k y_k + \sum_{k=1}^{n} m_k Y_e (a_{k1} y_1 + \cdots + a_{kn} y_n) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k y_k (b_{1k} Y_1 + \cdots + b_{nk} Y_n) = \varphi(\sum_{k=1}^{n} m_k Y_k y_k)$$

Punem condițiile:

$$\begin{cases} m_k' + m_k a_{kk} + m_k b_{kk} = m_k \varphi \\ m_k a_{kj} + m_j b_{kj} = 0 \text{ pentru } k \neq j \end{cases} \tag{9}$$

Din acestea găsim:

$$m_k = C_k e^{-\int (a_{kk} + b - \varphi) dx}$$

$$b_{kj} = -\frac{C_k}{C_j} a_{kj} e^{-\int (a_{kk} + b_{kk} - a_{jj} - b_{jj}) dx}, \quad k \neq j \tag{10}$$

În relațiile 10) considerăm dat sistemul 1), apoi presupunem luați arbitrar coeficienții b_{kk}, funcția φ și constantele C_k, C_j și rezultă coeficienții m_k și b_{kj} cu $k \neq j$.

În modul acesta am determinat sistemul 7), adjunctul lui 1).

Integrala primă a sistemului 1) se deduce din 8) și este:

$$\sum m_k Y_k y = C e^{\int \varphi dx}.$$

De asemenea, din însăși definiția dată rezultă că între sistemele 1) și 7) există reciprocitate.

Consecință. Dacă sistemul 1) are coeficienți constanți, sistemul 7) cu coeficienții dați de 10) se integrează cu ajutorul a n integrale prime date de 11).

Definiția II. Fie sistemul:

$$\frac{dY_i}{dx} = b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + \cdots + b_{in}Y_n, \qquad i = 1,2,\cdots n. \tag{12}$$

Numim sistemul 12) adjunctul sistemului 1), atunci cînd cunoscînd un sistem particular de soluții al lui, obținem o integrală primă pentru 1) de forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i Y_{i+k} y_i + p_i Y_i Y_i y_{i+k}) = C\psi(x) \tag{13}$$

unde funcțiile m_i, p_i, ψ sînt cunoscute iar C este constantă arbitrară.

Pentru valorile lui i care dau $i+k>n$, astfel ca $i+k=n+j$ se pune j în loc de $i+k$.

Pentru determinarea sistemului adjunct 12) punem condiția:

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i Y_{i+k} y_i + p_i Y_i y_{i+k})' = \varphi\left[\sum_{i=1}^{n}(m_i Y_{i+k} y_i + p_i Y_i y_{i+k})\right] \tag{14}$$

care devine:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[m_i' y_i Y_{i+k} + m_i Y_{i+k}(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n) + m_i y_i (b_{i+k,1}Y_1 + \right.$$

$$+ b_{i+k,2}Y_2 + \cdots + b_{i+k,n}Y_n) + p_i' y_{i+k} Y_i + p_i Y_i (a_{i+k,1}y_1 +$$

$$\left. + a_{i+k,2}y_2 + \cdots + a_{i+k,n}y_n) + p_i y_{i+k}(b_{i1}Y_1 + b_{i2}Y_2 + \cdots + b_{in}Y_n)\right] =$$

$$= \varphi\left[\sum_{i=1}^{n}(m_i Y_{i+k} y_i + p_i y_{i+k})\right] \tag{15}$$

Din identificarea coeficienților se obțin condițiile din care se determină coeficienții sistemului 12).

De asemenea între sistemele 1) și 12) există reciprocitate. Integrala primă a sistemului 1), cînd se cunoaște un sistem particular de soluții a lui 12) este dată de 18) unde $\psi = e^{\int \varphi\, dx}$

Să considerăm cazul particular cînd $p_i = 0$. În acest caz din 15) rezultă condițiile:

$$\begin{cases} m_j' + m_j a_{jj} + m_j b_{j+k,j+k} = \varphi m_j \\ m_r a_{rs} + m_s b_{s+k,r+k} = 0 \text{ pentru } r \neq s \end{cases} \tag{16}$$

Din 16) găsim

$$m_j = C_j e^{-\int (a_{jj} + b_{j+k,j+k} - \varphi)\, dx}$$

$$b_{s+k,r+k} = -\frac{C_r}{C_s} a_{rs} e^{-\int (a_{rr} + b_{r+k,r+k} - a_{ss} - b_{s+k,s+k})\, dx}, \quad s \neq r$$

Aceste formule sînt analoage cu 10) și în ele se pot considera dați arbitrar coeficienții $b_{j+k,j+k}$, determinîndu-se m_j și

$$b_{s+k,r+k}\ ,\quad s \neq r\ .$$

În același fel se pot da și alte extensiuni sistemelor adjuncte ale unui sistem de ecuații diferențiale lineare dat.

Observație.

Fiind dată ecuația [3]:

$$F \equiv au_{x2} + bu_{xy} + cu_{y2} + du_x + eu_y + fu = 0\ , \tag{17}$$

condiția ca să poată fi pusă sub formă de produs de factori diferențiali de ordinul I de forma:

$$F \equiv \left(A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial^0}{\partial x^0}\right)\left(M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial^0}{\partial x^0}\right)u$$

am văzut că este:

$$a\theta_x + \frac{c}{\mu}\theta_y - a\theta^2 + d\theta - f = 0 \tag{18}$$

unde

$$\theta = \frac{a\mu\mu_x + c\mu_y - e\mu + d\mu^2}{a\mu^2 - c}$$

iar μ este o rădăcină a ecuației $a\mu^2 - b\mu + c = 0$

Expresia din membrul I a ecuației 18) este un invariant față de schimbarea funcției u prin alta w dată de $u = zw$ sau față de schimbarea de variabile independente.

Menționăm deci că 18) nu poate fi o rezolvantă a ecuației 17) și dacă ea nu este satisfăcută de coeficienții ecuației date, nici coeficienții ecuației transformate ca mai sus nu o vor satisface. Dacă ecuația 17) nu este decompozabilă, nici transformatele ei indicate nu sînt decompozabile.

Catedra de Matematică

BIBLIOGRAFIE:

[1] *Acad. Miron Nicolescu:* Le problème de Lauricella pour les domaines hyperspherique (Disquisitiones Mathematicae et Physicae, t. I. fasc. 3—4, 1941.

[2] *Georges Valiron:* Cours d'analyse mathèmatique deuxième édition 1950.

[3] *I. M. Miu:* Integrarea unor clase de ecuații diferențiale cu ajutorul operatorilor diferențiali. Buletinul Institutului Politehnic, Buc. 1960, nr. 2.

О ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Краткое содержание)

Даётся новая формулировка вспомогательных уравнений и вводится понятие правой и левой системы.

Даётся обобщение вспомогательных систем для систем дифференциальных уравнений.

CONCERNING THE ADJOINT EQUATION OF THE DIFFERENTIAL STRAIGHT EQUATIONS

(Summary)

In this work the division to left and right of two differential polynominals are introduced, for which the algorythm of Euclide is valuable.

A new definition of the classic adjoint equation is given, as being the condition that the differential polynominal of the equation should divide through a differential factor of the first order.

Thus one generalizes the problem attaining to the adjoint systems. For the system of differential equations, generalizations of their adjoint systems are given.

CONCERNANT LES ÉQUATIONS ADJOINTES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

(Résumé)

Dans cet ouvrage on introduit la division à gauche et à droite de deux polynomes différientiels pour lesquels est valable l'algorythme d'Euclide.

On donne une définition de l'équation adjointes classique, comme constituant la condition que le polynome différentiel de l'équation soit divisé par un facteur différentiel de premier ordre.

De cette manière on généralise le problème atteignant des systèmes adjoints.

Pour les systèmes de l'équation différentielle on donne des généralisations de leurs systèmes adjoints.

ÜBER DIE ADJUNKT — GLEICHUNG DER DIFFERENTIAL — GLEICHUNG

(Zusammenfassung)

In diesem Aufsatz wird die Teilung nach links und rechts zweier Differential-Polynomen eingeführt, wofür der Algorythm von Euclid gültig ist.

Eine neue Definition der Adjunkt-Differentialgleichung wird angegeben, u. zw. dass der Differential-Polynom der Gleichung geteilt wird durch einen Differentialfaktor erster Ordnung.

In diesem Falle wird das Problem generalisiert, um das Adjunktsysthem zu erreichen.

Für die Differentialgleichungs-Systheme, werden Generalisierungen des Adjunktsysthems gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 1

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

ADSORBȚIA IONILOR ANORGANICI PE SCHIMBĂTORI DE IONI *

V. PĂRĂUȘANU, F. DANEȘ, C. MATEESCU, O. LANDAUER

Adsorbția ionilor pe ioniți este bine cunoscută și studiată în cazul ionilor organici voluminoși [1, 2, 3]. Pentru ionii anorganici, însă, se consideră, de obicei, capacitatea de reținere a ionitului ca fiind independentă de natura ionului de saturare și egală cu concentrația grupelor ionogene din rășină [4]. Totuși, Bonner și alți cercetători [5, 6] au demonstrat indirect existența adsorbției pe ioniți a ionilor anorganici, punînd în evidență acest fenomen prin variația concentrației totale a mediului lichid după introducerea ionitului. Pentru schimbul ionic hidrogen-amoniu pe cationiți polistiren sulfonici, s-au găsit capacități de adsorbție a ionului de schimb de 0,02 ... 0,04 mval/g rășină.

Din datele experimentale reiese însă, că studiul respectiv nu este complet și precis, deoarece :

a) adsorbția se evaluează indirect prin modificarea concentrației în fază lichidă ;

b) nu se pun în evidență efecte specifice unui ion, ci efecte condiționate de prezența unei perechi de ioni ;

c) nu se determină o izotermă de adsorbție, ci numai cantitatea maximă de ioni care se adsoarbe pe ionit.

Din aceste motive ne-am propus să studiem adsorbția ionilor anorganici pe ioniți, cu ajutorul unei metode adecvate, metoda diferențială, care permite determinarea cu o precizie mai mare a cantității de ioni adsorbită la o anumită concentrare a soluției externe. S-a lucrat în condiții în care poate fi adsorbit un singur ion. Datele obținute se raportează numai la acest ion și nu la o pereche de ioni.

S-a studiat sorbția suplimentară a ionilor Na^+ și Ca^{2+} pe cationit polistiren sulfonic Katex S_1 din soluția apoasă. Au fost aleși acești ioni cu valențe diferite, pentru a putea compara izotermele de adsorbție și pentru faptul că acești ioni se comportă ca ioni ai unor baze tari, puternic disociate, ceea ce elimină fenomenele legate de disocierea incompletă a electroliților în soluție apoasă. De asemenea, atît Ca^{2+}, cît și Na^+, nu sînt susceptibili a forma legături covalente sau chelatice cu rețeaua sau grupele ionogene ale schimbătorului.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din I.P.B., 7—8 aprilie 1962.

Alegerea unui cationit puternic disociat de tip Dowex 50 a permis să fie neglijată tendința de formare a unor combinații nedisociate insolubile între ionit și ionii respectivi [7].

Domeniul de concentrații studiat a fost de 0,01...0,4 n, în soluție apoasă, atît pentru Na^+, cît și pentru Ca^{2+}. Limita superioară a concentrației a fost determinată de considerente practice, deoarece în industrie nu este rațională utilizarea schimbului ionic în soluții prea concentrate [8], iar cea inferioară de precizia metodei analitice folosite.

Metoda de lucru a fost următoarea: O anumită cantitate de cationit adus în forma A (A fiind Na^+ sau Ca^{2+}) s-a pus în contact cu un mare exces de soluție apoasă a unei sări (clorură) a aceluiași cation, A. După echilibrarea și spălare foarte rapidă, astfel încît să nu se poată restabili un alt echilibru de adsorbție, s-a evacuat lichidul din ionit și s-a pus în contact ionitul cu o cantitate bine determinată de apă distilată, conținînd cantități mici din ionitul respectiv. După un timp suficient de mare pentru stabilirea echilibrului, s-a analizat concentrația ionului A în lichidul respectiv. S-a constatat că echilibrul se stabilește după 30 minute în cazul agitării și 3...4 ore în absența agitării.

Temperatura de lucru a fost de 20°C.

Determinarea concentrației inonilor de Na^+ și Ca^{2+} s-a făcut flamfotometric, cu o precizie de 1%. Rezultatele sînt prezentate în tabelele 1 și 2, unde:

c = concentrația ionului A în apă distilată după desorbție mmol/ml;
c_0 = concentrația ionului A în apa distilată înainte de desorbție mmol/ml;
c = concentrația ionului A în apă distilată după desorbție mmol/ml;
L = volumul apei distilate în ml;
S = cantitatea de ionit în grame rășină uscată forma H.

Tabela 1

Desorbția sodiului de pe cationit Catex S1 în soluție apoasă; t = 20—22°C

Determinarea Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S, g	10	10	10	10	14	7	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	14
L, ml	30	30	30	30	140	210	350	350	350	350	350	1400
10^3 c', mmol/ml	9,3	27,8	93	278	278	278	9,3	278	278	278	278	278
10^3 c_0, mmol/ml	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,013	0,039	0,13	1,3
10^3 c, mmol/ml	0,78	1,01	1,22	1,26	0,545	0,202	0,0905	0,108	0,065	0,082	0,170	1,323

Tabela 2

Desorbția calciului de pe cationit Catex S1 în soluție apoasă t = 20—22°C

Determinarea Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S, g	3,5	3,5	3,5	3,5	7	14	10	10	10	10
L, ml	350	350	350	350	210	140	30	30	30	30
10^3 c', mmol/ml	10	10	10	300	300	300	300	100	30	10
10^3 c_0, mmol/ml	0	0,1	0,05	0	0	0	0	0	0	0
10^3 c, mmol/ml	0,032	0,130	0,081	0,043	0,140	0,390	1,13	1,09	1,01	0,80

Procesul poate să aibă loc ca urmare: a unei desorbții a ionilor adsorbiți sau a unui schimb ionic la care participă ionii apei.

Pentru a putea distinge dacă este vorba de o desorbție efectivă sau de un schimb la care participă ionii apei, am analizat ambele posibilități.

Schimbul ionic $Na^+ - H^+$. Notăm: c_{OH}, c_H concentrațiile ionilor respectivi din apă după desorbție;

c'_H, c'_{OH} concentrațiile acelorași ioni în soluție de NaCl de concentrație c';

q = 4,6 mval/g ionit uscat în forma H = capacitatea de schimb a ionitului;

q_H, q_{Na} concentrația ionilor respectivi în ionit după desorbție;

q'_H, q'_{Na} concentrația ionilor respectivi în ionit la echilibru cu soluția de NaCl de concentrația c';

K constanta de schimb ionic;

K_w produsul ionic al apei.

Ecuațiile de echilibru de schimb și de disociere a apei sînt:

$$K = \frac{q_H c_{Na}}{q_{Na} c_H} \tag{1}$$

$$K = \frac{q'_H c'_{Na}}{q'_{Na} c'_H} \tag{1'}$$

$$K_w = c_H \cdot c_{OH} \tag{2}$$

$$K = c'_H \cdot c'_{OH}. \tag{2'}$$

Considerînd electrolitul complet disociat și ținînd seama de neutralitatea electrică a soluției, avem:

$$c = c_H = c_{OH} \tag{3}$$

Experimental, se constată că în toate determinările concentrația c este mai mică decît 10^{-5}; cum din relația (3) rezultă $c_{OH} > c$, deci $c_{OH} > 10^{-5}$ și ținînd seama și de disocierea apei, rezultă:

$$c_H = \frac{K_w}{c_{OH}} < \frac{10^{-14}}{10^{-5}} = 10^{-9}.$$

Deci, $c_H \ll c_{OH}$ și în consecință relația (3) devine:

$$c_{OH} \simeq c$$

și analog

$$c'_{OH} \simeq c'.$$

Ecuațiile (2) devin:

$$c_H \simeq \frac{K_w}{c} \tag{4}$$

$$c'_H \simeq \frac{K_w}{c'} \tag{4'}$$

Înlocuind aceste valori în relația (1), se obține:

$$\frac{q_H}{q_{Na}} = \frac{D K_w}{c^2} \tag{5}$$

Dar, la schimbul ionic K nu depășește valoarea 10 [9] și cum experimental se constată că $c < 10^{-5}$, rezultă:

$$\frac{q_H}{q_{Na}} < 10 \frac{10^{-14}}{(10^{-5})^2} = 10^{-3},$$

deci, $q_H \ll q_{Na}$. În consecință, concentrația Na^+ în ionit poate fi considerată aproximativ egală cu capacitatea de schimb a ionitului:

$$q_{Na} \simeq q_0$$

iar

$$q_H = \frac{K K_w q_0}{c^2} \tag{6}$$

și analog

$$q'_H = \frac{K K_w q_0}{c'^2} \tag{6'}$$

Dintr-un bilanț de materiale rezultă:

$$S(q_H - q'_H) = L(c - c_0)$$

sau

$$\frac{L}{S}(c - c_0) = K_w K q_0 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c'^2}\right)$$

și cum $c' \gg c$:

$$\frac{L}{S}(c - c_0) = \frac{K K_w q_0}{c^2} \tag{7}$$

Adbosrbția inoilor Na^+. Ecuația izotermei de adsorbție de tip Langmuir are forma:

$$x = \frac{b \cdot \lambda c}{1 + \lambda c} \tag{8}$$

în care: x = cantitatea adsorbită mval/g ionit;
b = capacitatea de adsorbție mval/g ionit;
λ = coieficient de adsorbție ml/mval.

Notînd cu $a = 1/\lambda$, se obține pentru echilibru cu soluțiile de concentrație c', respectiv c:

$$x = \frac{bc}{a + c} \tag{9}$$

$$c' = \frac{b c'}{a + c'} \tag{9'}$$

Bilanțul de materiale arată că:

$$S(x' - x) = L(c - c_0)$$

Înlocuind pe x și x' din relațiile (9) și (9'), se obține:

$$\frac{L}{S}(c - c_0) = \frac{ab(c' - c)}{(a + c')(a + c)}$$

Dar, întrucît $c' \gg c$

$$\frac{L}{S}(c - c_0) = \frac{a\,b\,c'}{(a + c')(a + c)} \qquad (10)$$

Introducînd următoarele notații:

$$y = \frac{L(c - c_0)}{S};\ A = \frac{1}{K K_w q_0};\ B = \frac{a + c'}{b\,c'};\ D = \frac{a + c'}{a\,b\,c'}$$

la concentrație c' constată, valorile care dau termenii A, B și D sînt constante și ecuațiile (7) și (10) devin:

a) pentru schimb ionic:

$$1/y = A\,c^2 \qquad (11)$$

b) pentru adsorbție:

$$1/y = B + D\,c \qquad (12)$$

(Cu y s-a notat scăderea concentrației sodiului din faza răşină „desorbția").

În fig. 1 este prezentată alura comparată a curbelor date de ecuațiile 11 și 12 și curba experimentală $1/y = f(c)$.

Se observă că dependența reală dintre 1/y și c este liniară și nu parabolică, ceea ce corespunde adsorbției și nu schimbului ionic.

În mod corespunzător, pentru schimbul de ioni ai Ca^{2+} ecuația echilibrului de schimb ionic va fi:

$$K = \frac{q_H \sqrt{c_{Ca}}}{\sqrt{q_{Ca}} \cdot c_H}$$

și

$$\frac{L}{S}(c - c_0) = \frac{K K_w \sqrt{q_0}}{c^{3/2}} \qquad (13)$$

În cazul adsorbției, procesul se poate desfășura în două moduri: pe unul sau pe doi centri activi de adsorbție din ionit. (Pot fi adsorbiți ionii de Ca^{2+} sau moleculele $Ca(OH)_2$, întrucît raționamentul este independent de natura particolei adsorbite).

Fixarea pe un centru activ corespunde următoarei izoterme:

$$x = \frac{b\,\lambda\,c}{1 + \lambda c}$$

corespunzător :

$$\frac{L}{S}(c - c_0) = \frac{a\,b\,c'}{(a + c)(a + c')} \tag{14}$$

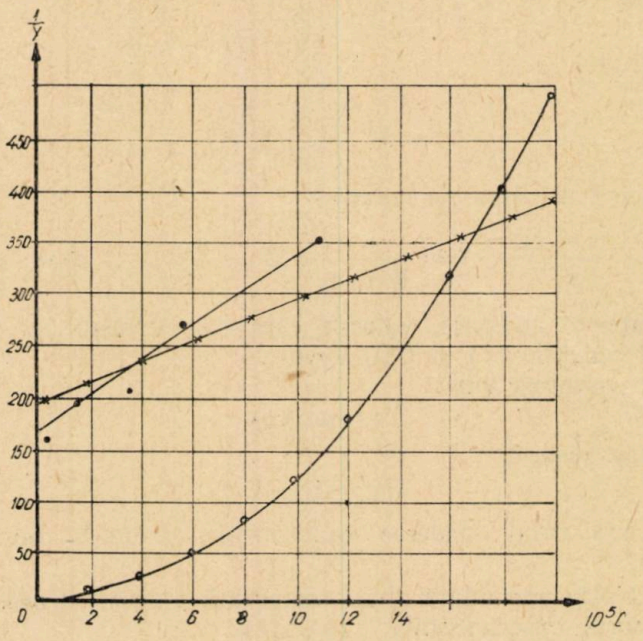


Fig 1
Curbe teoretice de desorbție Na^+
o schimb ionic
x adsorbție
• Curba experimentală de desorbție Na^+

Fixarea pe doi centri activi corespunde izotermei [10] :

$$x = \frac{b \cdot \sqrt{\lambda c}}{1 + \sqrt{\lambda c}}$$

de unde :

$$\frac{L}{S}(c - c_0) = \frac{a'\,b\sqrt{c'}}{(a' + c)(a' + c')} \tag{15}$$

în care

$$a' = \frac{1}{\lambda}.$$

Introducînd notațiile:

$$1/y = \frac{S}{L(c - c_0)}; \quad A' = K K_w \sqrt{q_0}; \quad B' = \frac{b c'}{a' + \sqrt{c'}};$$

$$B = \frac{b c'}{a + c'}; \quad D = \frac{a b c'}{a + c'}; \quad D' = \frac{a' b \cdot \sqrt{c'}}{a' + \sqrt{c'}}$$

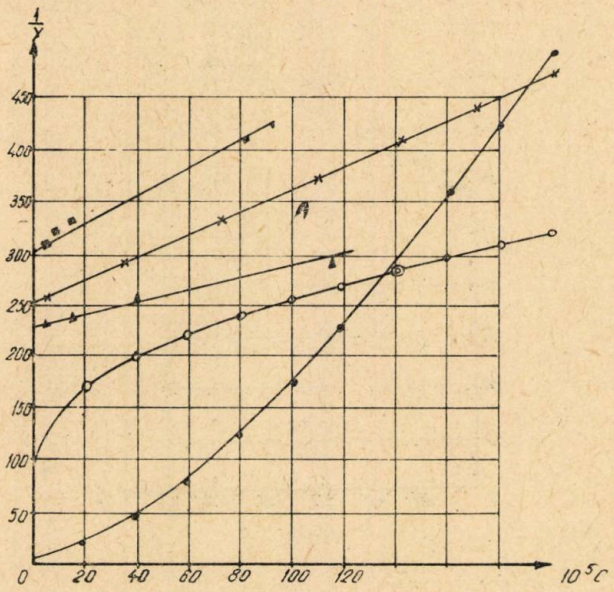


Fig. 2
Curbe teoretice de desorbție Ca^{2+}
• *Schimb ionic*
× *Adsorbție pe cîte un centru activ*
○ *Adsorbție pe cîte doi centri activi*
Curbe experimentală de desorbție Ca^{2+}
■ *C = 0,01 N*
▲ *C = 0,3 N*

în care la concentrație c' = constant, mărimile A', B, B', D, D', sînt constante, se obțin din relațiile (13), (14), (15) ecuațiile:

a) pentru schimb ionic:

$$1/y = A' c^{3/2} \tag{16}$$

b) pentru adsorbție pe cîte un centru activ

$$1/y = B + D c \tag{17}$$

c) pentru adsorbție pe cîte doi centri activi

$$1/y = B' + D' c^{1/2} \tag{18}$$

În figura 2 este comparată alura curbelor corespunzînd relațiilor (16), (17), (18) și curba de dependență experimentală $1/y = f(c)$ la c' = con-

stant pentru ionii Ca^{2+}. Se observă că datele experimentale duc la o dependență liniară, deci fenomenul care are loc nu este schimbul ionic, ci adsorbția și anume adsorbția pe cîte un centru activ ca și în cazul

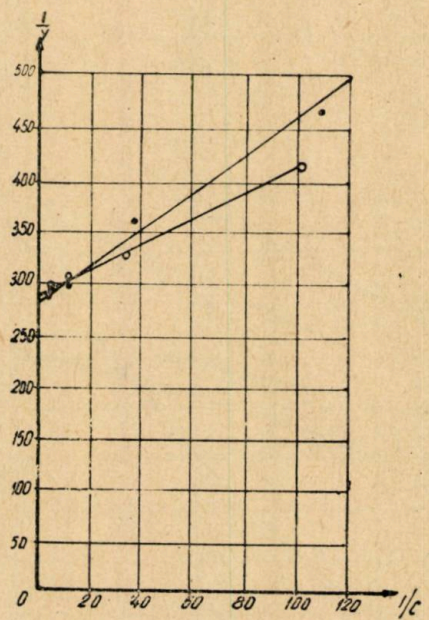


Fig. 3

$$y = f(C')$$

$$Na^{+}\ \frac{l}{5} = 3;\ C_0 = 6{,}5\ 10^{-5}$$

$$Ca^{++}\ \frac{1}{3} = 3;\ C_0 = 0$$

sodiului și nu pe doi centri, cum ar fi fost de așteptat avînd în vedere valența calciului.

Se trage concluzia că în mod efectiv are loc o adsorbție și nu un schimb ionic și că sorbția se face pe cîte un centru activ în ambele cazuri.

În cazul determinărilor efecuate la diferite concentrații c', schimbul ionic este redat de o expresie după care mărimea desorției $y = \frac{L(c - c_0)}{S}$ nu depinde de concentrația c' (ecuația (7) și (13)). Adsorbția pe un centru activ prevede o dependență liniară între 1/y și 1/c' (ecuația (10) și (14)). Adsorbția pe doi centrii activi duce la dependență liniară între 1/y și $1/\sqrt{c'}$ (ecuația (15)).

În fig. 3 este prezentată dependența experimentală a valorilor 1/y de 1/c'.

Se constată că în ambele cazuri există o dependență liniară, ceea ce confirmă încă o dată că atît în cazul sodiului, cît și în cazul calciului, adsorbția are loc pe un centru activ.

Din valorile experimentale se poate calcula valoarea constantelor ce intervin în procesul de adsorbție:

λ — coeficientul de adsorbție și

b — capacitatea de adsorbție.

Pentru Na rezultă:

$\lambda = 159$ ml/mmol și $b = 4{,}42 \cdot 10^{-3}$ mmol/g rășină uscată în forma H.

Pentru Ca^{++} avem:

$\lambda = 253$ ml/mmol și $b = 4{,}35 \cdot 10^{-3}$ mmol/g rășină uscată în forma H.

În tabelele 3 și 4 sînt prezentate comparativ desorbția ionilor Na^{+} și Ca^{2+} (y) calculate cu ecuațiile de adsorbție (12) și (14) în care pentru λ și b s-au introdus valorile obținute mai sus, în funcție de concentrațiile c obținute experimental.

Concordanța observată se menține în limitele erorilor de analiză.

Tabela 3

Concordanța valorilor experimentale ale desorbției sodiului cu cele teoretice

Determinarea Nr.	10^4_c	$10^4_{c_t}$	$10^4_{c_{si}}$	10^4_y	$10^4_{y_t}$	$10^4_{y_{si}}$
1	7,8	7,75	0,86	21,45	21,3	0,62
2	10,1	10,27	0,86	28,35	28,84	0,62
3	12,2	12,06	0,86	34,65	34,23	0,62
4	12,6	12,5	0,86	35,85	35,55	0.62
5	4,55	4,65	0,74	39,0	40,0	0,86
6	2,02	2,036	0,68	41,1	40,58	0,99
7	0,905	0,91	0,66	25,5	26,0	1,05
8	1,08	0,07	0,66	43,0	42,0	1,05
9	0,65	0,658	0,22	52,0	52,8	9,5
10	0,82	0,812	0,42	42,0	41,2	2,6
11	1,70	1,71	1,3	40,0	41,0	0,27
12	13,23	13,21	13,0	23,0	21,0	0,027

Tabela 4

Concordanța valorilor experimentale ale desorbției calciului cu cele teoretice

Determinarea Nr.	10^4_c	$10^4_{c_t}$	$10^4_{c_{si}}$	10^4_y	$10^4_{y_t}$	$10^4_{y_{si}}$
1	0,32	0,315	0,0135	32,0	31,5	1 ,35 10^{-2}
2	1,30	1,304	1,00	30,0	30,4	2,14 10^{-8}
3	0,81	0,807	0,50	31,0	30,7	$6{,}1 \cdot 10^{-6}$
4	0.43	0,43	0,0135	43,0	43,0	$1{,}35 \cdot 10^{-2}$
5	1,40	1,394	0,0219	42,0	41,82	$2{,}19 \cdot 10^{-2}$
6	3,90	3.93	0,034	39,0	39,3	$3{,}4 \cdot 10^{-2}$
7	11,3	11,15	0,055	33,9	33,45	$5{,}5 \cdot 10^{-2}$
8	10,9	10,87	0,055	32,70	32,61	$5{,}5 \cdot 10^{-2}$
9	10,1	10,18	0,055	30,3	30,54	$5.5 \cdot 10^{-2}$
10	8,0	8,08	0,055	24,0	24,24	$5{,}5 \cdot 10^{-2}$

y = desorbția constatată experimental : $y = \frac{L(c - c_0)}{S}$

y_t = desorbția calculată din izoterma de adsorbție tip Langmuir ecuația (12) ;

$y_t = \frac{a\,b\,c'}{(a + c')(a + c_t)}$, unde c_t satisface relația :

$$\frac{L}{S}(c_t - c_0) = \frac{a\,b\,c'}{(a + c')(a + c_t)}$$

$y_{s\cdot i}$ = desorbția de schimb ionic, calculată din ecuația (7) și (13) pentru valorile $q_0 = 4{,}6$ mval/g

$$K_w = 10^{-14}\,;\ K = 10$$

$y_{s\cdot i} = \frac{K K_w q_0}{c^2}$ unde $c_{s\cdot i}$ satisface relația :

$$\frac{L}{S}(c_{s\cdot i} - c_0) = \frac{K K_w q_0}{c_{s\cdot i}^2}$$

Deși valoarea constantei de echilibru a schimbului ionic luată este probabil mai mare decît cea reală, totuși valorile obținute pentru această desorbție $y_{s\cdot i}$ sînt cu cîteva ordine de mărime mai mici decît valorile experimentale ale desorbției, y, ceea ce arată că schimbul ionic nu intervine, în condițiile în care s-a lucrat, în măsură apreciabilă. Este de presupus, însă, că la concentrații mai mici, ponderea schimbului ionic în desorbția totală să crească în detrimentul adsorbției, deoarece la scăderea concentrației viteza de schimb ionic crește mult mai repede decît adsorbția.

Această constatare prezintă importanță practică în cazul demineralizării înaintate a diferitelor lichide. Conform celor de mai sus, este de așteptat ca, chiar în cazul unor soluții foarte diluate și a unui ionit spălat în repetate rînduri să se constate o impurificare a lichidului cu ionii din ionit, deoarece, deși adsorbția nu va mai juca un rol important, va avea totuși loc schimbul între ionul metalic din ionit și ionul H^+ al apei. Acest schimb va continua la introducerea fiecărei porțiuni de lichid proaspăt pînă la dispariția totală a ionului metalic din ionit.

Rezultă de aici că posibilitatea purificării avansate prin metoda schimbului ionic este limitată superior de schimbul cu ionii apei. Această concluzie este valabilă nu numai pentru cationiți, ci și pentru anioniți, rolul ionului H jucîndu-l în acest caz OH. Din punct de vedere al posibilităților de a obține purificări deosebit de înaintate, rezultă că este mai favorabil varianta care utilizează membrane ionitice, întrucît în acest caz ionii ce impurifică sînt transferați prin membrane în spațiile electrodice și antrenați de acolo cu curentul de lichid părăsind sistemul.

Efectele specificate nu apar decît la concentrații ale impurităților de ordinul de mărime al concentrației ionilor apei la punctul de neutralitate ($p_H = 7$) și sînt, deci, sensibile numai la atingerea unor concentrații ale ionilor impurități de ordinul 10^{-6} echivalenți-gram/litru.

Din valorile capacității de adsorbție (b) calculate mai sus se constată că valoarea capacității de adsorbție pentru Na^+ și Ca^{2+} este identică sau foarte apropiată; aproximativ $4{,}40.10^{-3}$ mmol/g rășină uscată în forma H. Se deduce, deci, că sînt capabili de a reține prin adsorbție ionii Na^+ și Ca^{2+} unii și aceeași centri activi și că se poate vorbi prin urmare de o „capacitate de adsorbție" ca o caracteristică generală a ioniților ca și „capacitatea de schimb ionic" și care este independentă de natura ionului.

De remarcat, că ionii organici sînt de multe ori adsorbiți în cantități mult mai mari (de ordinul a 2...3 mmol/g rășină) [11]. Aceleași valori sporite ale mărimii adsorbției au fost constatate pentru unii anioni minerali ai acizilor oxigenați, ca sulfați, fosfați etc. În aceste cazuri este vorba de ioni voluminoși capabili de o polarizare internă, ceea ce ne face să credem că nu este vorba de o simplă adsorbție, ci de o intervenție a unor legături suplimentare de natură chimică sau cel puțin polară cu rețeaua sau cu grupele ionogene ale ionitului.

Catedra de chimie fizică

BIBLIOGRAFIE

[1] *Kressan T. R. E.*, — J. Phys. Chem. (1952), *56*, 118.
[2] *Davies C. W., Owen B. D. R.* — J. Chem. Soc., (1956), *6*, 1681.
[3] *Davidov A. T., Skoblionok P. F.* — Koll. Jurn. (1957), *19*, 183.
[4] *Samsonov G. V.* — Insb. „Ionii obmen i ego primenenie", Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1959, pag. 223.
[5] *Bonner O. D., Argersinger W. J., Davidson A.* — J. Am. Chem. Soc. (1952), *74*, 1044
[6] *Lowen W. K., Stonner R. W., Argersinger W. J., Davidson A. W., Hume N. D.* — J. Am. Chem. Soc. (1951) *73*, 2066.
[7] *Bressler S. E.* — Uspehi himii (1960) nr. 8.
[8] *Adel I. B., Dmitriev S. A.* — Insb. „Ionnii obmen i ego primenenie". Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1959, pag. 255.
[9] *Gable R. W., Strobel H. A.*, — Journ. Phys. Chem. (1956), 5, 60.
[10] *German J. E.* — Geterogennîi kataliz — Moscova, 1959, pag. 61.
[11] *Davidov A. T., Ponirovskaia L. T., Skoblionok P. F.* — In sb. „Hromatografiia, ee teoriia i primenenie, Akad. Nauk SSSR, Moscova,

АДСОРБЦИЯ НЕОРГАНИЧЕСКИХ ИОНОВ НА ИОНООБМЕННИКАХ

(Резюме)

Выявляется адсорбция, сопровождающая обмен ионов в водных растворах между неорганическими ионами и кислотными сильно диссоциированными ионообменниками.

Дается теоретическое объяснения этого явления и устанавливаются практические последствия ввиду применения ионного обмена для повышенной очистки неорганических ионов.

THE ADSORPTION OF INORGANIC IONS ON ION-EXCHANGERS

(Summary)

The adsorption which accompanies the ionic change in aqueous solutions between inorganic ions (Na^+ and Ca^{2+}) and strongly dissociated acid ion-exchangers is pointed out.

A theoretical interpretation of this phenomenon is given and the practical consequences for ion-exchange applications to high purification of inorganic ions are established.

L'ADSORBTION DES IONS ANORGANIQUES SUR LES ÉCHANGEURS DE IONS

(Résumé)

On met en évidence l'adsorbtion accompagnant l'échange ionique dans des solutions aqueuse entre les ions anorganiques (Na^+ et Ca^{2+}) et les échangeurs de ions acides fortement dissociés.

On donne une interprétation théorique de ce phénomène et on établit les conséquences pratiques concernant les applications de l'échange ionique pour les purifications avancées des ions anorganiques.

DIE ADSORBTION DER ANORGANISCHEN IONEN AUF IONENAUSTAUSCHERN

(Zusammenfassung)

Es wird die Adsorbtion hervorgehoben, welche den Ionenaustausch in wässerigen Lösungen zwischen den anorganischen Ionen (Na^+ und Ca^{2+}) und den stark dissoziierten säurereichen Ionen begleitet.

Es wird die theoretische Auslegung dieses Vorgangs gezeigt und die praktischen Folgen für die Anwendung des Ionenaustausches bei der fortgeschrittenen Reinigung der anorganischen Ionen festgestellt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 1

REZISTENȚA MATERIALELOR

FLAMBAJUL DE RĂSUCIRE LA BARE CU PEREȚI SUBȚIRI SUB SARCINI AXIALE REPARTIZATE *

PETRE AUGUSTIN

1. Flambajul de răsucire la bare cu pereții subțiri sub sarcini axiale uniform distribuite

Se consideră pentru soluționarea acestei probleme ecuațiile diferențiale de încovoere și răsucire

$$EI_z \eta^{IV} + [P(x)(\eta' - a_z \varphi')]' + [P(x) e_z \varphi]'' = 0 \qquad (1)$$
$$EI_y \zeta^{IV} + [P(x)(\zeta' + a_y \varphi')]' - [P(x) e_y \varphi]'' = 0$$
$$EI_\omega \varphi^{IV} - GI_d \varphi'' + [P(x)(r_0^2 + 2\beta_y e_y + 2\beta_z e_z)\varphi']' -$$
$$- a_z [P(x)\eta']' + a_y [P(x)\zeta']' - P(x) e_y \zeta'' + P(x) e_z \eta'' = 0$$

Pentru o bară a cărei secțiune are două axe de simetrie și este solicitată centric, se introduce în ecuațiile (1) $a_y = a_z = e_y = e_z = 0$ și sistemul integrat odată devine:

$$EI_z \eta''' + P(x)\eta' + C_1 = 0$$
$$EI_y \zeta''' + P(x)\zeta' + C_2 = 0 \qquad (2)$$
$$EI_\omega \varphi''' + GI_j \varphi' + P r_0^2 \varphi' + C_3 = 0$$

În aceste relații, constantele C_1, C_2, C_3 au rol respectiv de forțe tăietoare și moment de răsucire în origine. Se observă deasemenea că sistemul se decuplează, primele două ecuații prezentînd flambajul de încovoiere, pentru bare avînd centrul de încovoiere al secțiunii transversale în centrul de greutate al acesteia, solicitată la compresiune centrică.

Ultima ecuație prezintă flambajul de răsucire sub forțe axiale de compresiune și este propriu barelor cu pereți subțiri.

Deoarece flambajul de încovoiere sub sarcini axiale repartizate este studiat, în cele ce urmează se va considera flambajul de răsucire studiat în cele ce urmează, după cunoștințele noastre pentru prima dată.

* Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 18 decembrie 1960.

Pentru cazul sarcinilor uniform repartizate, forța axială se poate scrie sub forma

$$P(x) = \frac{P_1 x}{l} + P_2 \tag{3}$$

unde P_2 este presupus cunoscut, astfel încît ultima ecuație a sistemului (2) se va scrie

$$EI_\omega \varphi''' + \left(\frac{P_1 r_0^2}{l} x - GI_d + P_2 r_0^2\right)\varphi' + C_3 = 0 \tag{4}$$

În caz că nu există moment de răsucire aplicat în origină

$$C_3 = 0 \tag{5}$$

iar ecuația (4) devine

$$\varphi''' + \left(\frac{P_1 r_0^2}{l\, EI_\omega} x - \frac{GI_d - P_2 r_0^2}{EI_\omega}\right)\varphi' = 0 \tag{6}$$

Notînd

$$\varphi' = \alpha \tag{7}$$

cu schimbare de variabilă

$$y = \frac{x}{l} - \frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2} \tag{8}$$

ecuația (6) devine

$$\alpha'' + \frac{P_1 r_0^2}{EI_\omega} l^2 y\, \alpha = 0 \tag{9}$$

Soluția acestei ecuații este

$$\alpha = C_1 \sqrt{y}\, J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{P_1 r_0^2 l^2}{EI_\omega}}\, y^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 \sqrt{y}\, J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{P_1 r_0^2 l^2}{EI_\omega}}\, y^{\frac{3}{2}}\right) \tag{10}$$

unde J este funcție Bessel.

1. *Bara încastrată la ambele capete*

În cazul barei încastrată la ambele capete, deplanările la ambele capete vor fi nule. Deplanările fiind proporționale respectiv cu α rezultă

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad \alpha = 0 \\ x &= l \qquad \alpha = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

respectiv ținînd seama de (8)

$$y = -\frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2} \qquad \alpha = 0$$

$$y = 1 - \frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2} \qquad \alpha = 0$$

condiții care introduse în (10) conduc la

$$C_1 \sqrt{-\frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2}}\, J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 \sqrt{-\frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2}}\, J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}\right) = 0$$

$$C_1 \sqrt{1 - \frac{GI_d - P_1 r_0^2}{P_1 r_0^2}}\, J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\right) + C_2 \sqrt{1 - \frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2}}\, J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\right) = 0 \tag{12}$$

unde sa notat

$$a = \left(\frac{P_1 r_0^2 l^2}{EI_\omega}\right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2}\right)$$

$$b = \left(\frac{P_1 r_0^2 l^2}{EI_\omega}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2}\right) \tag{13}$$

Pentru a exista soluții nenule, deci pentru a exista flambajul la răsucire este necesar ca

$$\begin{vmatrix} J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}\right) & J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}\right) \\ J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\right) & J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

sau

$$\frac{J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}\right)}{J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\right)}{J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} b^{\frac{3}{2}}\right)} \tag{15}$$

Deoarece între funcțiile Bessel și funcțiile Airy există relația

$$U_1(s, \alpha) = (\alpha + z)^{-\frac{1}{\alpha+2}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) \sqrt{s}\, J_{-\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2} s^{\frac{\alpha+2}{2}}\right)$$

$$U_2(s, \alpha) = (\alpha + z)^{\frac{1}{\alpha+2}} \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right) \sqrt{s}\, J_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{\alpha}{\alpha+2} s^{\frac{\alpha+2}{2}}\right) \tag{16}$$

condiția (15) se poate scrie

$$\frac{U_2(a, 1)}{U_1(a, 1)} = \frac{U_2(b, 1)}{U_1(b, 1)} \tag{17}$$

Eliminînd forța critică P din sistemul (15) se obține

$$P_{1\omega} = \frac{l}{r_0^2} \sqrt{-\frac{(GI_d - P_2 r_0^2)^3}{a^4 EI_\omega}} \tag{18}$$

$$(b - a)^2 a = -\frac{GI_d - P_2 r_0^2}{EI_\omega} l^2 \tag{19}$$

Pentru rezolvarea sistemului (17), (18) în necunoscute a și b se trasează curba (tab. 1 și fig. 1)

$$f = \frac{U_2(s, 1)}{U_1(s, 1)} \tag{20}$$

Ecuația (17) se poate reprezenta grafic ca relația între a și b din (20) (fig. 2), observînd că a trebuie să fie negativ (a se vedea 18).

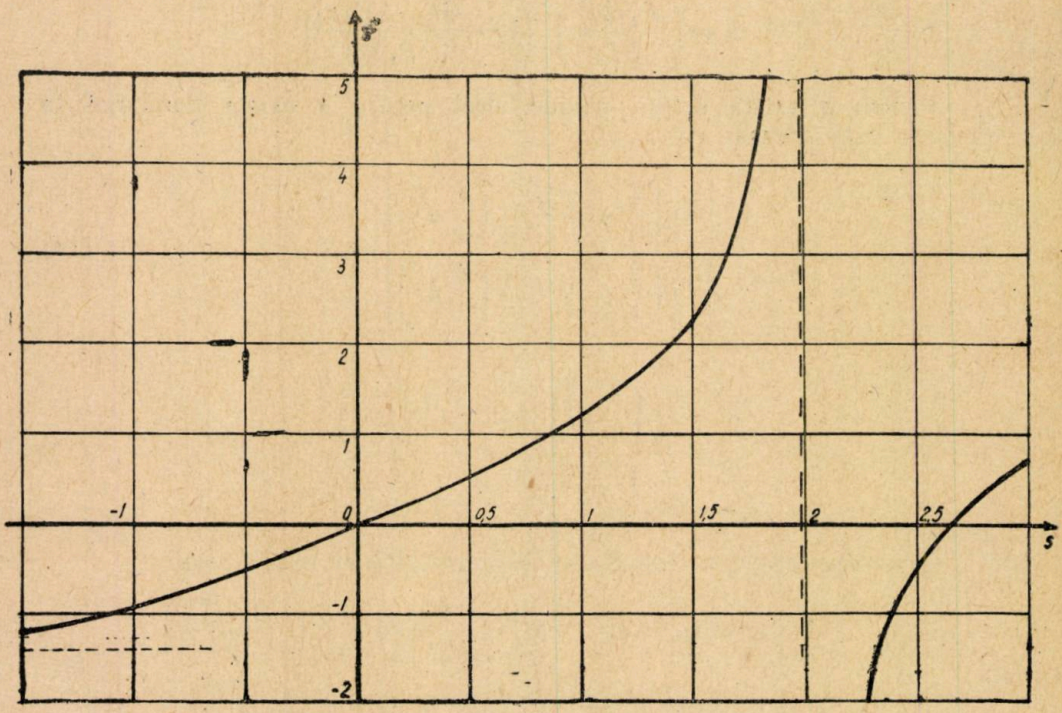


Fig. 1

Porțiunea pentru abscise negativă a curbei f (fig. 1) va avea în abscisă deci variabila a iar variabila b corespunzătoare se obține măsurînd pentru diferite valori a, abscisa proximei curbe la aceiași ordonată.

Se obține astfel tabela 2 și 3 respectiv (fig. 2) curba I.

Tabela 1

s	U_2 (s, 1)	U_1 (s, 1)	f	s	U_2 (s, 1)	U_1 (s, 1)	f
—6	—72 904	5314,8	—1,3717	0	0,000	1,000	0
—5	—733,67	534,85	—1,3717	0,5	0,4948	0,9792	0,505
—4	—93, 17	68,178	—1,3716	1	0,9186	0,8388	1,095
—3	—15,64	11,42	—1,369	1,5	1,111	0,4979	2,23
—2,5	—7,199	5,292	—1,36	1,98	0,9165	0,0069	132
—2,25	—5,044	3,744	—1,35	2,0	0,8992	—0,0150	—60
—2	—3,611	2,731	—1,32	2,1	0,8020	—0,1242	—6,46
—1,8	—2,804	2,177	—1,29	2,2	0,6880	—0,2308	—2,99
—1,6	—2,202	1,781	—1,24	2,3	0,5590	—0,3323	—1,68
—1,4	—1,742	1,501	—1,16	2,35	0,4895	—0,3803	—1,28
—1,2	—1,380	1,305	—1,055	2,4	0,4171	—0,4262	—0,977
—1,0	—1.085	1,172	—0,925	2,45	0,3423	—0,4694	—0,73
—0,9	—0,2556	1,124	—0,85	2,5	0,2653	—0,5098	—0,522
—0,8	—0,8345	1,087	—0,768	2,55	0,1867	—0,5469	—0,342
—0,7	—0,7202	1,058	—0,685	2,6	0,1069	—0,5807	—0,183
—0,9	—0,6109	1,036	—0,593	2,65	0,0264	—0,6106	—0,0433
—0,5	—0,5052	1,021	—0,495	2,7	—0,0543	—0,6365	0,085
—0,4	—0,4021	1,011	—0,398	2,75	—0,1346	—0,6581	0,204
—0,3	—0,3007	1,004	—0,299	2,8	—0,2139	—0,6752	0,308
—0,2	—0,2001	1,001	—0,200	2,9	—0,3676	—0,6950	0,527
—0,1	—0,1000	1,000	—0,1	3,0	—0,5106	—0,6947	0,746
—0	—0,000	1,000	0	3,6	—0,9139	—0,3915	2,35

Pe aceiași figură sînt trasate și curbele date de ecuația (19) pentru diferite valori ale membrului drept, al acestuia, notat pe figură cu K, respectiv

$$\frac{GI_d - P_2 r_0^2}{EI_\omega} l^2 = K \tag{21}$$

Forța critică cu această notație se poate scrie

$$P_{1cr} = \frac{K^{1/2}}{a^{3/2}} \left(\frac{GI_d}{r_0^2} - P_2 \right) \tag{22}$$

sau

$$P_{1cr} = c \left(\frac{GI_d}{r_0^2} - P_2 \right) \tag{23}$$

unde

$$c = \frac{K^{1/2}}{a^{3/2}} \tag{24}$$

a cărei valori sînt date de curba din fig. 3 și tabela 4 și reprezintă efectul împiedicării deplanării.

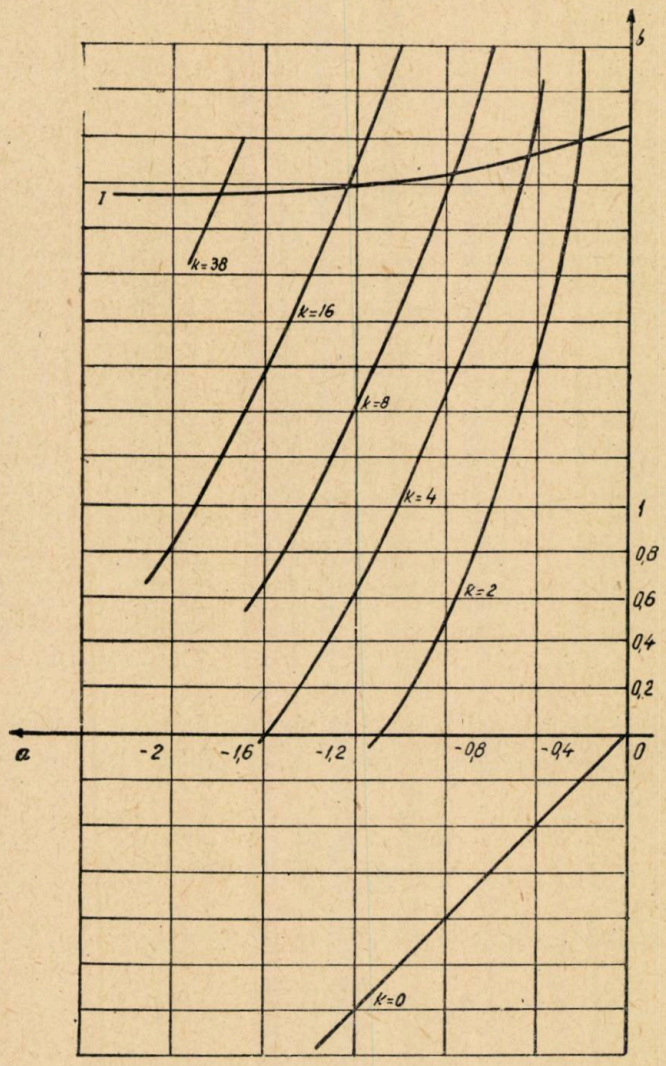


Fig. 2

Se observă deasemenea că pentru valori ale constanei K mai mari decît 30 se poate considera

$$b = 2{,}34 \tag{25}$$

astfel încît constanta c (24) se poate scrie, calculînd pe a din (19) fără a mai fi necesară utilizarea ecuației (17).

Tabela 2

I	*a*	0	—0,2	—0,4	—0,6	—0,8	—1	—1,2	—1,4	—1,6	—2	∞	
	b	2,65	2,59	2,52	2,48	2,43	2,41	2,39	2,37	2,35	2,34	2,34	

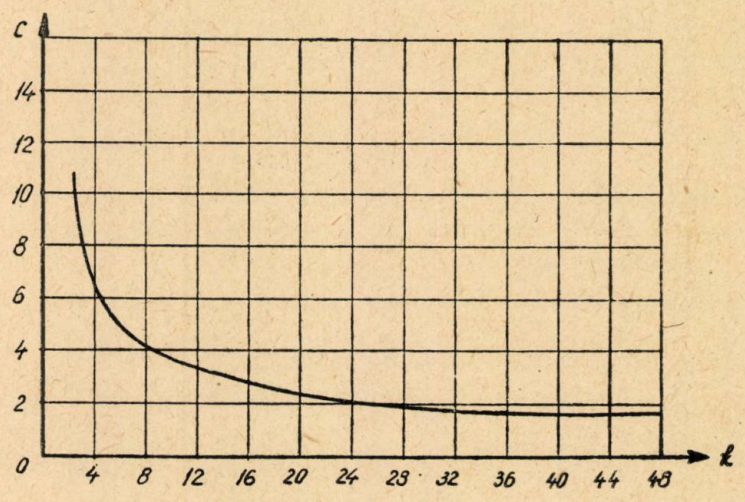


Fig. 3

Tabela 3

a	*b*			
0	$K=2$	$K=4$	$K=8$	$K=16$
0	∞	∞	∞	∞
—0,2	2,96	4,3	6,12	
—0,4	1,64	2,76	4,1	
—0,6	0,98	1,98	3,05	
—0,8	0,49	1,44	2,36	
—1	0,12	1,0	1,83	3
—1,2		0,63	1,38	2,45
—1,4		0,28	0,99	1,98
—1,6			0,64	1,56
—2				0,83
$-\infty$				

Tabela 4

a	0,23	0,46	0,78	1,23	2	40	∞
K	2	4	8	16	38	70 000	∞
c	13,1	6,45	4,25	2,94	2,17	1,05	1

2. *Bara simplu rezemată la capete*

În cazul barei simplu rezemată la capete deplanările sînt libere să se producă, respectiv eforturile unitare normale suplimentare din cazul răsucirii împiedicate sînt nule.

Condițiile la limită se vor scrie în acest caz

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad \alpha' = 0 \\ x &= l \quad \alpha' = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

respectiv ținînd seama de (8)

$$\begin{aligned} x &= -\frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2} \quad \alpha' = 0 \\ x &= 1 - \frac{GI_d - P_2 r_0^2}{P_1 r_0^2} \quad \alpha' = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

condiții care, ținînd seama de relațiile

$$\begin{aligned} \frac{d}{zdz}[z^p J_p(z)] &= z^{p-1} J_{p-1}(z) \\ \frac{d}{zdz}[z^p J_{-p}(z)] &= -z^{p-1} J_{-p+1}(z) \end{aligned} \tag{28}$$

se pot scrie

$$\begin{aligned} C_1 J_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} a^{3/2}\right) - C_2 J_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} a^{3/2}\right) &= 0 \\ C_1 J_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} b^{3/2}\right) - C_2 J_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} b^{3/2}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

unde a și b au semnificațiile date la (13).

Pentru a exista soluții nenule, deci pentru a se produce flambajul de răsucire este necesar ca :

$$\frac{J_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}a^{3/2}\right)}{J_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}a^{3/2}\right)} = \frac{J_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}b^{3/2}\right)}{J_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}b^{3/2}\right)} \tag{30}$$

Deoarece între funcțiile Bessel și derivatele funcției Airy există relațiile

$$\begin{aligned} U_1'(s,\alpha) &= -(\alpha+2)^{-\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)s^{\frac{\alpha+1}{2}}\,J_{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}s^{\frac{\alpha+2}{2}}\right) \\ U_2'(s,\alpha) &= (\alpha+2)^{\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right)s^{\frac{\alpha+1}{2}}\,J_{-\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}s^{\frac{\alpha+2}{2}}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

condiția se poate scrie :

$$\frac{U_2'(a,1)}{U_1'(a,1)} = \frac{U_2'(b,1)}{U_1'(b,1)} \tag{32}$$

Forța critică va avea expresia (18) în care constanta a va avea valoarea obținută prin eliminarea lui b între (24) și (32).

Pentru soluționarea problemei, se trasează curba (fig. 4) (tabela 5).

$$f = \frac{U_2'(s,1)}{U_1'(s,1)} \tag{33}$$

Tabela 5

s	$U_1'(s,1)$	$U_1'(s,1)$	f	s	$U_2'(s,1)$	$U_1'(s,1)$	f
0	1,000	0	$-\infty$	0	1	0,	$-\infty$
0,5	0,9595	—0,1239	—7,75	—0,5	1,042	—0,126	—8,3
0,7	0,8873	—0,2394	3,71	—0,7	1,116	—0,2506	—4,45
0,8	0,8329	—0,3092	2,77	—0,8	1,174	—0,3310	—3,55
0,9	0,7643	—0,3856	1,98	—0,9	1,250	—0,4250	—2,95
1	0,6803	—0,4673	—1,462	—1	1,347	—0,534	—2,52
1,25	0,4003	—0,6836	—0,586	—1,5	2,292	—1,396	—1,64
1,515	0	—0,898	0	—2	4,676	—3,359	—1,434
2	—0,8834	—1,097	0,807	—2,5	10,559	—7,623	—1,385
2,95	—1,432	0	∞	—3	25,589	—18,621	—1,374
3,5	—0,1096	1,0472	—0,145	—4	180,61	—131,66	—1,3717

Reluînd procedeul utilizat, se calculează tabela 6 respectiv curba II din fig. 5. Suprapunînd peste această curbă, curbele date de relația (19) se obține, pentru diferite valori ale lui K, valori pentru coeficientul a

astfel încît forța critică se poate scrie sub forma (23) unde a este dat de tabela 7 respectiv fig. 6.

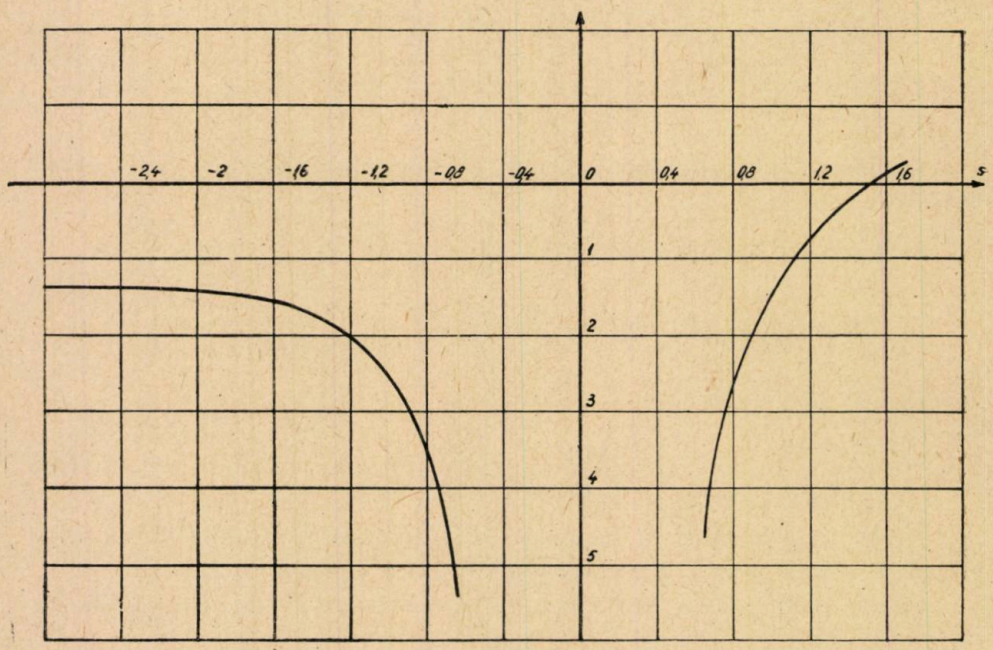


Fig. 4

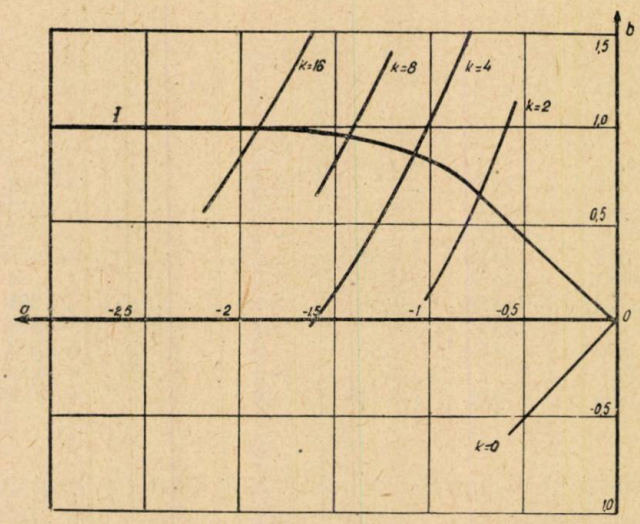


Fig. 5

Tabela 6

II	*a*	$-\infty$	—3	—2	—1,5	—1	—0,9	—0,3	—0,8	0
	b	1,01	1,01	1	0,96	0,82	0,77	0,71	0,64	0

Tabela 7

a	—0,73	—1,07	—1,43	—1,90	—3	—20	$-\infty$
k	2	4	8	16	48	8300	∞
c	2,31	1,805	1,655	1,52	1,33	1,01	1

Se observă că pentru $K > 16$ valoarea lui b tinde către 1,01 astfel încît pentru determinarea constantei a în acest caz, este suficientă ecuația (13) fără a se mai recurge la condiția (32).

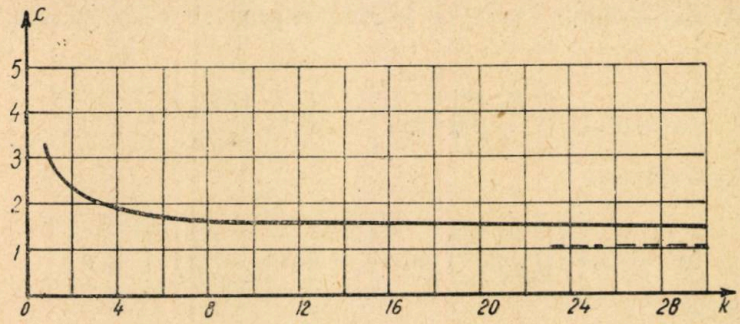


Fig. 6

3. *Valori speciale ale forței* P_2 (3)

Forța P_2 din origine nu pune probleme speciale. Ea poate fi, pentru generalitate pozitivă, negativă sau nulă, rezultînd forța critică P_1 în modul arătat.

Dacă forța în origină P_2 are valoarea specială

$$P_2 = \frac{GI_d}{r_0^2} \tag{34}$$

respectiv este egală cu forța critică la răsucire liberă, calculul se simplifică mult.

În cazul barei încastrate la ambele capete prima condiție (11) conduce la

$$C_2 = 0$$

iar a doua la

$$J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{P_1 r_0^2 l^2}{EI_\omega}}\right) = 0 \tag{35}$$

de unde rezultă

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{P_1 r_0^2 l^2}{EI_\omega}} = 2{,}9026$$

respectiv

$$P_{1cr} = 18{,}88\,\frac{EI\omega}{r_0^2 l^2} \tag{36}$$

Introducînd ca forță critică forța totală respectiv

$$P = P_1 + P_2 \tag{37}$$

se obține

$$P_{cr} = 18{,}88\,\frac{EI_\omega}{r_0^2 l^2} + \frac{GI_d}{r_0^2} \tag{38}$$

Pentru cazul barei libere la ambele capete, se scrie soluția (10) în funcții Airy

$$\alpha = C_1 U_1\left[\left(\frac{P_1 r_0^2}{l\,EI_\omega}\right)^{\frac{1}{3}} x, 1\right] + C_2 U_2\left[\left(\frac{P_1 r_0^2}{l\,EI_\omega}\right)^{\frac{1}{3}} x, 1\right] \tag{39}$$

a cărei derivată este

$$\alpha' = C_1 U_1'\left[\left(\frac{P_1 r_0^2}{l\,EI_\omega}\right)^{\frac{1}{3}} x, 1\right] + C_2 U_2'\left[\left(\frac{P_1 r_0^2}{l\,EI_\omega}\right)^{\frac{1}{3}} x, 1\right] \tag{40}$$

Deoarece

$$U_1'[0,1] = 0$$

$$U_2'[0,1] = 1$$

prima condiție (25) conduce la

$$C_2 = 0$$

iar cealaltă la

$$U_1'\left[\left(\frac{P_1 r_0^2}{l\,EI_\omega}\right)^{\frac{1}{3}} l, 1\right] = 0 \tag{41}$$

de unde

$$\left(\frac{P_1 r_0^2}{l\,EI_\omega}\right)^{\frac{1}{3}} l = 2{,}948$$

respectiv

$$P_1 = 25{,}63\,\frac{EI_\omega}{r_0^2\,l^2} \tag{42}$$

sau

$$P = 25{,}63\,\frac{EI_\omega}{r_0^2\,l^2} + \frac{GI_d}{r_0^2} \tag{43}$$

II. Flambajul de răsucire la bare cu pereți subțiri sub sarcini axiale liniar repartizate

Pentru cazul sarcinilor liniar repartizate, forța axială se poate scrie sub forma,

$$P(x) = P_1\frac{x^2}{l^2} + P_2 \tag{1}$$

astfel încît ecuația diferențială de răsucire, dacă nu există moment de răsucire aplicat în orgine, se va scrie

$$EI_\omega\varphi''' + \left(\frac{P_1 r_0^2}{l^2}x^2 + P_2 r_0^2 - GI_d\right)\varphi' = 0 \tag{2}$$

Notînd

$$\varphi' = \alpha \tag{3}$$

această ecuație se poate scrie

$$\alpha'' + \left(\frac{P_1 r_0^2}{l^2 EI_\omega}x^2 + \frac{P_2 r_0^2}{EI_\omega} - \frac{GI_d}{EI_\omega}\right)\alpha = 0 \tag{4}$$

Se observă că dacă se ia în origine ca forță axială forța critică de flambaj la răsucire liberă

$$P_2 = \frac{GI_d}{r_0^2} \tag{5}$$

ecuația (4) se poate scrie

$$\alpha'' + \frac{P_1 r_0^2}{l^2 EI_\omega}x^2\,\alpha = 0 \tag{6}$$

unde, dacă se notează cu P forța totală, rezultă

$$P_1 = P - \frac{GI_d}{r_0^2} \tag{7}$$

Soluția ecuației (4) se poate scrie utilizînd funcții Bessel

$$\alpha = C_1\sqrt{x}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\,\frac{r_0}{l}\sqrt{\frac{P_1}{EI_\omega}}\,x^2\right) + C_2\sqrt{x}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\,\frac{r_0}{l}\sqrt{\frac{P_1}{EI_\omega}}\,x^2\right) \tag{8}$$

Utilizînd funcții Airy aceiași soluție se poate scrie

$$\alpha = C_1 U_1\left[\left(\frac{r_0^2}{l^2}\frac{P_1}{EI_\omega}\right)^{\frac{1}{4}} x, 2\right] + C_2 U_2\left[\left(\frac{r_0^2}{l^2}\frac{P_1}{EI_\omega}\right)^{\frac{1}{4}} x, 2\right] \tag{9}$$

1. *Bară încastrată la ambele capete*

În încastrări deplanările fiind nule, soluția (3) va trebui să satisfacă condițiile

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad \alpha = 0 \\ x &= l \qquad \alpha = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Ținînd seama de dezvoltările în serie a funcțiilor Airy

$$\begin{aligned} U_1(s,\beta) &= 1 - \frac{s^{\beta+2}}{1!\,(\beta+2)\,(\beta+1)} + \frac{s^{2(\beta+2)}}{2'(\beta+2)^2(\beta+1)(2\beta+3)} - \ldots \\ U_2(s,\beta) &= s\left[1 - \frac{s^{\beta+2}}{1!\,(\beta+2)\,(\beta+2)} + \frac{s^{2(\beta+2)}}{2'(\beta+2)^2(\beta+2)(2\beta+5)} - \ldots\right] \end{aligned} \tag{11}$$

se observă că

$$\begin{aligned} U_1(O,\beta) &= 1 \\ U_2(O,\beta) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

astfel încît din prima condiție (10) rezultă

$$C_1 = 0 \tag{13}$$

a doua condiție conducînd la

$$U_2\left[\left(\frac{r_0^2}{l^2}\frac{P_1}{EI_\omega}\right)^{\frac{1}{4}} l, 2\right] = 0 \tag{14}$$

soluție din care se determină valoarea forței critice de flambaj, calculînd primul zero al funcției U_2.

Rezultă :

$$\sqrt{\frac{r_0}{l}\sqrt{\frac{P_1}{EI_\omega}}}\cdot l = 2{,}358 \tag{15}$$

de unde se obține

$$P_1 = 2{,}358^4\,\frac{EI_\omega}{r_0^2\,l^2} = 30{,}915\,\frac{EI_\omega}{r_0^2\,l^2} \tag{16}$$

respectiv

$$P_{cr} = 30{,}915\,\frac{EI_\omega}{r_0^2\,l^2} + \frac{GI_d}{r_0^2} \tag{17}$$

Se observă că pentru măsură ce lungimea barei crește efectul restrîngerilor în expresia forței critice, scade.

2. *Bară simplu rezemată la capete*

Neexistînd la capetele libere eforturi unitare normale suplimentare, condițiile la limită se vor scrie

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad \alpha' = 0 \\ x &= l \quad \alpha' = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Observînd că

$$\begin{aligned} U_1'(0, \beta) &= 0 \\ U_2'(0, \beta) &= 1 \end{aligned} \tag{19}$$

rezultă din prima condiție

$$C_2 = O$$

iar din ultima condiție (18)

$$U_1'\left[\left(\frac{r_0^2}{l^2}\frac{P_1}{EI_\omega}\right)^{\frac{1}{4}} l, 2\right] = 0 \tag{20}$$

Calculînd primul zero al funcției U_1 se obține

$$\sqrt{\frac{r_0}{l}\sqrt{\frac{P_1}{EI_\omega}}}\, l = 2{,}143 \tag{21}$$

de unde rezultă

$$P = 21{,}09\,\frac{EI_\omega}{r_0^2\, l^2} + \frac{GI_d}{r_0^2} \tag{22}$$

Formulele obținute în cazul solicitărilor sub sarcină repartizate, diferă deci de formulele obținute pentru sarcini constante prin coeficientul din fața rigidității sectoriale EI_ω

Se observă că pentru o mică rigiditate sectorială sau pentru o lungime mare, sarcina critică tinde către sarcina critică la răsucire liberă, efectul fixărilor scăzînd în aceiași măsură.

Catedra de rezistența materialelor

BIBLIOGRAFIE

[1] *Augustin Petre* și *M. Atanasiu:* Bare cu pereți subțiri. Edit. Tehnică, 1960.

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИВ КРУЦЕНИЯ У ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПОД РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ОСЕВЫМИ НАГРУЗКАМИ

(Краткое содержание)

Рассматривается случай тонкостенных стержней открытого профиля, для которых вио продольного изгибания кручением ведёт к опасным критическим нагрузкам. Решением дифференциального уравнения под равномерно распределёнными осевыми нагрузками приходят к обратны решениям, выраженным функциями Бессель $\frac{1}{3}$ и $\frac{-1}{3}$ порядка.

Решается случай стержней, врезанных на обоих концах и случай стержней свободно опирающихся на концах, решением трансцендентных уравнений в функциях Бессель, получающихся как условия совместности.

Дают я также решения для специальных значений концевых сил.

Исходя из дифференциального уравнения кручения под распределёнными осевыми нагрузками, путем изменения адекватной переменной, приходим к уравнению типа Ейри.

Разбирается случай стержней просто опирающихся и случай стержней врезанных на концах. Условия совместности для этих случаев ведут их решением к установлению критических сил.

TORSIONAL BUCKLING OF THE THIN WALLED BEANS UNDER AXIAL DISTRIBUTED LOADS

(Summary)

The case of the open thin wallled beams in which the type of buckling leads to dangerous critical loads. By solving the differential equation of buckling under uniformly distributed axial loads, solutions expressed by the Besse functions of $\frac{1}{3}$ and $\frac{-1}{3}$ order are reached.

The case of built-in columns and the case of plates simply suported at edges are solved, by the solution of the transcendental equations in Bessel functions obtained as compatibility conditions.

Solutions for special values of the loads at the edges are also given.

Starting from the torsional differential equations under axial distributed loads, by changes of adequate variable, the Airy type equation is obtained.

The case of simply supported beams and the case of biult-in ends of beams are studied. The compatibility conditions for these cases lead by solving them to establish the critical loads.

LA FLAMBAGE DE TORSION A DES BARRES AUX FINES PAROIS SOUS DES CHARGES AXIALES RÉPARTIES

(Résumé)

On y a envisagé le cas des barres aux fines parrois et à profil ouvert pour les quelles la manière de flambage par torsion mène à des charges critiques dangereuses. Par la solution de l'équation différentielle de torsion sous des forces axiales uniformément réparties, on arrive à des solutions exprimées par des fonctions Bessel de l'ordre $\frac{1}{3}$ et $\frac{-1}{3}$.

On y a résolu le cas des barres encastrées aux deux bouts et celui des barres simpliment appuyées aux bouts, par la solution des équations dans des fonctions Bessel que l'on obtient comme conditions de compatibilité.

Si l'on part de l'équation différentielle de torsion sous des charges axiales réparties, on arrive, par des changements de variable adéquate, à une équation du type Airy.

Dans la présente étude on traite le cas des barres simplement appuyées et celui des barres encastrées aux bouts. Les conditions de compatibilité pour ces cas-ci mènent par leur résolution, à établir les forces critiques.

DREHUNGSKNICKUNG BEI BARREN MIT DÜNNEN WÄNDEN UNTER AXIALEN VERTEILTEN BELASTUNGEN

(Zusammenfassung)

Es wird der Fall der Barren mit dünnen Wänden offenen Profils angenormmen, für welche die Knickungsweise durch Druchung zu kritischen gefährlichen Belastungen führt. Durch Auflösung der Differenzialgleichung der Drehnung unter gleichmässig verteilten axialen Kräften, gelangt man zu durch Besselfunktionen ausgedrückten Losüngen der Grôsse $\frac{1}{3}$ und $\frac{-1}{3}$.

Man löst den Fall der an beiden Kopfenden eingefalzten Barren und den Fall der einfach an den Enden aufgelehnten Barren dursch Auflösung der transzendenten Gleichungen in Basselfunktionen, die sich als Kompatibilitätsbedingungen ergeben.

Es werden ebenfalls Lösungen für die Spezialwerte der Kräfte an den Kopfendengegeben.

Von der Differentialgleichung der Drehung unter axial verteilten Belastungen ausgehend, kommt man, durch Veränderungen der entprechenden Veränderlichen zu einer Gleichung der Form Aitry.

Es wird der Fall der einfach aufgelehnten Barren und der Fall der an den Kopfenden eingefalzten Barren behandelt.

Die Kompatibilitätsbedingungen für diese Fälle führen durch ihre Lösung zur Festsetzung der kritischen Kräfte.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 1

ELECTROTEHNICĂ

ERRORS IN THE PRESENTATION OF SOME ELECTROTECHNICAL PROBLEMS

ANDREI ŢUGULEA, SANDA MASTERO

Even to-day, in an age of relativistic and quantum electrodynamics, the macroscopic electromagnetic theory, built up almost hundred years ago essentially by Faraday and Maxwell as a theory of contiguous action, is widely acknowledged in as much as it remains satisfactory for those instances (like electromagnetic devices, electrical machines, electrical apparatus, etc.) in which it practically is of no advantage to take into account the discontinuous structure of matter.

Maxwell's theory is concerned with bodies which are motionless as against the reference system from which phenomenas are described. Both Hertz's and Lorentz's attempts to build up an electrodynamics of moving bodies, the first on the assumption of ether moving along with the body, and the second on that of stationary ether, were doomed by the experiments proving the nonexistence of ether, a test which but relativistic electrodynamics can stand.

Hertz's failure to extend Maxwell's theory concerns rather principles than computing, and it is generally known [14] that many problems concerning moving bodies can be solved by using the Maxwell-Hertz equations, since the results are the same as those obtained with relativistic electrodynamics — making of course allowance for the low speeds.

Therefore we still consider, as it was done at the turn of the century, that compared to the theory of remote action the Maxwell-Hertz's theory is a is notice able progress in physics and we resolutely oppose the opinion of some authors who maintain the advantages of returning to such a theory. It is true that similar attempts have been made even after the remarkable achivement of Hertz in testing experimentally Maxwell's theory, and though since have been other experimental testings of Maxwell's and of Einstein's theories are available, contemporary scientists endeavour from time to time to repeat them. We particularly refer here to a series of papers published by Parry Moon and Domina Eberle Spencer mainly in the „Journal of the Franklin Institute" [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Though these papers have been published in 1954—1956, and it may seem that our discussion is somewhat late, we nevertheless start it firstly because we have seen that no controversy has been raised by

the readers of the „Journal", and secondly because in a recently published collection of papers [10] regarding a symposium on relativity held in Vienna, the above mentioned authors have presented their „new electrodynamics" [11] referring to the series of papers we are concerned with.

Parry Moon and Domina Eberle Spencer state the inconsistencies and the incoherencies of Maxwell's electrodynamics, which they consider loose and ambiguous so that „even the most advanced treatises fail to present a rigorously logical development of the subject." [4] Hertz's eletcrodynamics is definitely ignored, and relativistic electrodynamics is considered „an imposing façade" of „the shaky structure of Maxwell's theory" [2] and „based on a naive faith in the infallibility of Maxwell's equations" [4]. In order to illustrate the general ideas thus stated, the authors give some examples — as a rule concerning electromagnetic induction in moving bodies — for which they show that Maxwell's theory gives solutions that are paradoxical and do not agree with experiment; we are quite of the same opinion, as Maxwell's theory applies to motionless bodies only. They also disagree with this theory on definitions given to fundamental concepts and on the use of a particular reference system (ether), which have been solved by relativity.

On such a basis, Moon and Spencer maintain that, beginning with Faraday and Maxwell, electrodynamics has gone astray, and that it should again be led along the lines drawn by Oersted, Ampère, Gauss, Weber etc., which means that they advocate turning back to the theory of remote action, in which the main rôle is played by interactive forces between charged bodies and between current elements.

They take for granted the equivalence of macroscopic conduction and convection current, which is based on classical electronic theory, thus reducing the whole problem to the calculus of forces between charged moving particles.

In paper [1] and [2] the authors show that the only possible expression for the forces between current elements, that does not contradict Ampère's experiments and the principle of action and reaction (which is the basis of any theory of remote action) is the very formula given by Ampère, and, taking for a basis the equivalence mentioned above, they deduce the force between charged particles moving at a relative constant velocity.

In paper [3] two terms are added to this formula, one caused by the relative acceleration of the charged particles (the „Weber force") and the other by the variation of the magnitude of the charge (the „Maxwell force"). Both formulas are deduced by incorectly using Maxwell's theory. Besides, the formula given for the „Maxwell force" cannot be correct because, according to the law of charge conservation, the electric charge of a body can vary only if there exists a convenction or a conduction current too; but then it is not sufficient — as do the authors — to take into account only the scalar electrodynamic retarded potential, because the electric field intensity (and of course the electric

force associated with this field) depends also on the vector retarded potential $\left(\bar{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$. That this is true can easily be seen from the electric field formula (the so-called electric „Maxwell force") deduced the authors deduced by from an electric dipole taken as an elementary oscillator, and which is wrong. It also must be noted that employing retarded quantities for the force between carged particules is contradictory with the principle of remote action, because retardation implies propagation with finite velocity.

In short, in their investigation to find a formula for remote interacting forces, and thus eliminate the field concept from electromagnetism, Moond and Spencer employ Maxwell's theory results and calculate a force which does not satisfy the principle of action and reaction. That means that an isolated system composed, for instance, of two particles, varies its momentum so that there exists another pysical system with which the interchange of momentum takes place, and this system is the electromagnetic field.

Assuming that the formula for this force be correctly deduced from Maxwell's theory — which is not true — it cannot, at any rate, be fundamental for „a new eletcrodynamics" without fields, because such a theory woud contradict all the conservation principles of physics: conservation of momentum, of energy — and so of mass too — etc.

The „fundamental equation" of the new electrodynamics is:

$$\bar{F}_{12} = \bar{a}_r \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \frac{v^2}{c^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right) - \bar{a}_a \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c^2 r} \frac{d}{dt}\left[v\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

$$- \bar{a}_r \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} Q_1\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \qquad (1)$$

where $\bar{a} = \frac{\bar{r}}{r}$ is the unit vector for the position vector $\bar{r}$ of charge Q_2 relatively to charge Q_1, $\bar{a}_a$ is the relative acceleration unit vector of the two charges, $\bar{v}$ their relativ velocity, c is the velocity of light in vacuum and $\cos\theta = \bar{a}_r \frac{\bar{v}}{v}$.

We object to this formula firstly because, as expected, it yields $F_{12} \neq -F_{21}$ from

$$Q_2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} Q_1\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \neq Q_1 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} Q_2\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

Secondly the „Weber force"

$$- \bar{a}_a \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon c^2 r} \frac{dv}{dt}$$

is obtained by derivating velocity versus time, which gives

$$\frac{d\bar{v}}{dt} \neq \bar{a}_a \frac{d\bar{v}}{dt}$$

for any motion but the rectilinear one.

Thirdly, the formula (1) contains as well retarded as nonretarded terms, thus rendering difficult any physical interpretion of it. The authors eventually derive corect results from this formula, because they solve stationary problems $\left(\frac{d\bar{v}}{dt}=0\right)$ at small distances, when retardation can be neglected, and because they integrate along closed curves for which, as will be shown, the formula for Ampère's force is correct. The authors' solution imply toilsome calculus, even for very simple problems. (This circumstance is quite natural since instead of taking field intensities into account, they consider the field sources: charges and elementary currents).

Lastly we point out that a formula of the same type, and in accordance with the field theory, is obtained by considering the Wiechert-Liénard potentials [12], but that the formula thus obtained implies the existence of fields, because it plainly does not satisfy the principle of action and reaction.

Founded upon a formula which is wrong from both the point of view of principle and of calculus the „new electrodynamics" forecasts phenomena never observed until now: a force acting in a static magnetic field on a motionless charged body, induction of an emf in a conductor moving along a magnetic line of force, etc.

The above mentioned facts suffice to demonstrate the inconsistency of Moon's and Spencer's theory and we should conclude here, were it not that they raise problems as fundamental as they seem simple, as:

definitions of electric and magnetic quantities, and their correlation with the reference system; for which eletcrodynamic phenomena can Maxwell's theory be safely used; which are the postulates and the limitations of Hertz's theory, and what is the link between Maxwell's and Hertz's theory; what is fundamental in relativistic electrodynamics, and so on.

It is quiee true that a great many text-books and papers deal lightly with such problems: relativistic electrodynamics is often considered too advanced; physicists avoid Hertz's theory, knowing it is incorrect — and so electrodynamic problems of moving bodies are reduced to some examples treated with particular solutions, the most striking of them being the famous *Blv* formula.

These are the origins of Maxwell's theory paradoxes, which, to be fair, we must acknowledge not to be solely Moon's and Spencer's creation, but the results of many controversies, some of which are still pursued [5, references]. Things being what they are, we shall give in the following the correct solution for these „paradoxes" and thus:

— show how the law of electromagnetic induction is to be delt with;
— demonstrate the inconsistency of the arguments raised against macroscopic electrodynamics.

We then shall concern ourselves with the equivalence principle of conduction and convection current as regards the generating of magnetic field and the exertion of mechanical action, because this principle is fundamental to Moon's and Spencer's theory, and jointly we shall discuss the physical meaning that can be attached to Ampère's or Biot-Savart-Laplace's (Grassman) formula for current elements.

Since details concerning the principles mentioned above can be found in literature [13] we shall, in connection with the first point of our programme, briefly remind the formulation given in various theories to the law of electromagnetic induction, because most of the „paradoxes" are connected in papers with this law, though they could as well be connected with the magnetic circuit law.

a) *In Maxwell's electrodynamics — for motionless bodies only.*

In integral form, the law of eletcromagnetic induction is:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}\, d\bar{r} = -\frac{\mathrm{d}}{dt}\int_{S_\Gamma} \bar{B}\, d\bar{A} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{A}$$

Γ being any contour and S_Γ any open surface resting on it, and in differential form the law is:

$$\operatorname{curl} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Bodies are considered motionless in the reference system in which phenomena are described (and in which fields, forces, durations, lengths etc, are defined). It stands to reason that these formulas cannot be of use for electrical inductive machines.

b) *In Hertz's eletcrodynamics — for moving bodies.*

The law's integral form is:

$$Me = \oint_{\Gamma} \bar{E}\, d\bar{r} = -\frac{d_s}{dt}\int_{S\Gamma} \bar{B}\, d\bar{A}$$

(be it noted that we shall often employ u_e for $\oint_{\Gamma} \bar{E}\, d\bar{r}$) in which the indices s is for a derivative in which not only the variation in time of $\bar{B}$, but also the moving and the deformation of surface S — which is considered as moving with the bodies — is taken into account. The fields are here defined in reference systems moving with the bodies and are considered invariant with regard to the choice of the reference system.

By computing the integral's derivative, one obtains the more explicte form:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}\, d\bar{r} = -\int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{A} - \oint_{\Gamma} (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r}$$

which can be termed as the law's integral developed form, as opposed to the first form which can be termed as the law's undeveloped form.

The first term of this formula

$$u_{et} = -\int_{s_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{A}$$

is the electromotive force inducted because of the time variation of the flux, and the second one

$$u_{em} = -\oint_{\Gamma} (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r}$$

is the electromotive force inducted because of the velocity of bodies.

These formulas concord wiht the experimental data for nonrelativistic velocities.

c) *In relativistic electrodynamics* (based only on special relativity) the law is writtten as in Maxwell's theory, all the intervening quantities being defined in the inertial reference system in which bodies are mobile. The equations can be transposed in other reference systems — in which bodies eventually move — by using the Lorentz transformatin. One thus obtains, with quantities defined in the reference system attached to the moving bodies — i.e. defined as in Hertz's theory — and with allowance for nonrelativistic velocities, the same expression as in this very theory; and thus, the use of Hertz's theory is justified at least for bodies in translation.

In the following we study the examples of electromagnetic induction given by Moon and Spencer to enhace the ambiguous and paradoxical nature of Maxwell's theory.

Example 1

In the magnetic filed of a very long wire with the steady current I, a conductive rod slides transversally and with varying velocity $v = v(t)$ on two very long straigt conductive rods, parallel to the wire, all the four conductors being co-planar. The problem is to find the voltage indicated by a high internal resistance voltmeter connected between the two parallel rods (fig. 1).

This problem has been solved by Moon and Spencer for two cases

$$\begin{aligned} i(t) &= I = \text{const} \\ v(t) &= v = \text{const} \end{aligned} \quad \text{and} \quad \begin{cases} i(t) = I_0 \cos \omega t \\ v(t) = v_0 \cos \omega t \\ (i.e.\ x = \dfrac{v_0}{\omega} \sin \omega t) \end{cases}$$

We now solve the problem for the second case — which is the general one — by using the Maxwell-Hertz theory.

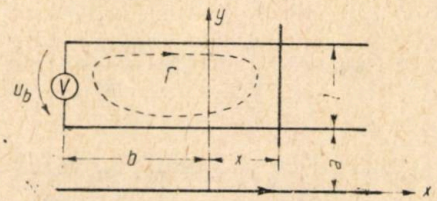


Fig. 1.

The emf induced in loop Γ has both a variation of field term and a velocity term, i.e.:

$$u_e = -u_b = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \overline{dA} - \oint_\Gamma (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r} \equiv$$

$$\equiv \frac{\mu}{2\pi} (b + x) \frac{di}{dt} \ln \frac{a + l}{a} + \frac{\mu}{2\pi} i(t)\, v(t) \ln \frac{a + l}{a}$$

in which u_b is (with the sens of refence shown in fig. 1) the potential difference at the volmeter's terminals.

In particular this yields for the two cases in question:

$$u_b = -\frac{\mu}{2\pi} I v \ln \frac{a + b}{a}$$

respectively:

$$u_b = \frac{\mu}{2\pi} \left[b + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right] I_0 \omega \sin \omega t \ln \frac{a + l}{a}$$

$$- \frac{\mu}{2\pi} I_0 v_0 \cos^2 \omega t \ln \frac{a + l}{a} =$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi} I_0 [v_0 \cos 2\omega t - b \omega \sin \omega t] \ln \frac{a + l}{a}$$

the two emf terms (field time variation an velocity) being emphasised in the first expression of the potential difference.

In Moon and Spencer's interpretation of Maxwell's theory, three different solutions are obtained, owing to its pretended ambiguity, i.e.:

— considering

$$u_b = \oint_{\Gamma} (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r}$$

$$u_b = -\frac{\mu}{2\pi} I\, v \ln \frac{a+l}{a}$$

respectively

$$u_b = -\frac{\mu}{2\pi} I_0\, v_0 \cos^2 \omega t \ln \frac{a+l}{a}$$

which is on by the emf due to the rod's movement;

— considering

$$u_b = \int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{A}$$

$$u_b = 0$$

respectively

$$u_b = \frac{\mu}{2\pi}\left(b + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t\right) I_0\, \omega \sin \omega t \ln \frac{a+l}{a}$$

which is but the emf due to the magnetic field time variation; and considering:

$$u_e = -\frac{d_s}{dt} \int_{S_\Gamma} \bar{B}\, d\bar{A}$$

of course, the correct solution, composed, as Moon and Spencer themselves stated though without stepping to conclusions, of the two previous' solutions sum.

Lastly, with their own formula:

$$\frac{\bar{F}}{Q_2} = \bar{a}_r \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta\right) - \bar{a}_a \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon c^2 r}\frac{dv}{dt}$$

and computing first a term for the positive charges and then one for the negative charges, imagining a moving accelerated charge at the point in which the field is calculated, and neglicting the electron drift velocity in regard to the accelerated charge velocity, they labour to the correct result.

Example 2

The problem is the same as above, a sliding plate being substituted for the sliding wire (fig. 2).

We again use the Maxwell-Hertz theory to solve the general case.

We consider the contours $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$, which we define as the mathematical curves following: first the upper rod, then a random curve C, C′ or C″ on or in the sliding plate, then the upper rod and at last a line termed the terminal voltage line, and which joins the two rods (or voltmeter) the terminals being at the same time normal to the electric field solenoidal component. By integrating along these contours in the sense shown in fig. 2 we obtain:

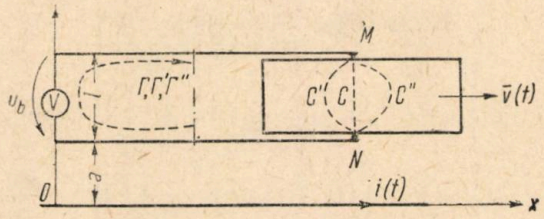


Fig. 2.

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}\, d\bar{r} = \int_{M(C)}^{N} \bar{E}\, d\bar{r} - u_b = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \int_{M(C)}^{N} (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r}$$

$$\oint_{\Gamma'} \bar{E}\, d\bar{r} = \int_{M(C')}^{N} \bar{E}\, d\bar{r} - u_b' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial t} - \int_{M(C')}^{N} (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r}$$

$$\oint_{\Gamma''} \bar{E}\, d\bar{r} = \int_{M(C'')}^{N} \bar{E}\, d\bar{r} - u_b'' = -\frac{\partial \Phi''}{\partial t} - \int_{M(C'')}^{N} (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r}$$

in which u_b, u_b' u_b'' is the same potential difference, and:

$$\Phi = \Phi[t, v(t)]; \qquad \Phi' = \Phi'[t, v(t)]; \qquad \Phi'' = \Phi''[t, v(t)]$$

the fluxes linking respectively Γ, Γ' Γ'' for wich the partial derivative in time at constant velocity is considered.

If considered respectively in pairs, the curves C, C' and C'' constitute loops. Maxwell-Hertz's theory electromagnetic induction law if written for such a loop is:

$$\int_{M(C)}^{N} \bar{E}\, d\bar{r} - \int_{M(C')}^{N} \bar{E}\, d\bar{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi'}{\partial t} - \int_{M(C)}^{N} (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r} + \int_{M(C')}^{N} (\bar{B} \times \bar{v})\, dr$$

because

$$\int_{M(C)}^{N} \bar{E}\, d\bar{r} - \int_{M(C')}^{N} \bar{E}\, d\bar{r} = \oint_{(C+C')} \bar{E}\, d\bar{r}$$

respectively

$$-\int_{M(C)}^{N}(\bar{B}\times\bar{v})\,d\bar{r}+\int_{M(C')}^{N}(\bar{B}\times\bar{v})\,d\bar{r}=-\oint_{(C+C')}(\bar{B}\times\bar{v})\,d\bar{r}$$

and

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=-\frac{\partial(\Phi-\Phi')}{\partial t}$$

$\Phi-\Phi'$ being the magnetic flux linking the $C+C'$ contour, and so:

$$-\int_{M(C)}^{N}\bar{E}\,d\bar{r}-\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\int_{M(C)}^{N}(\bar{B}\times\bar{v})\,d\bar{r}=-\int_{M(C')}^{\Lambda}\bar{E}\,d\bar{r}-\frac{\partial\Phi'}{\partial t}-$$

$$-\int_{M(C')}^{N}(\bar{B}\times\bar{v})\,d\bar{r}=u_b=u_b'=\ldots u_b''$$

It is now clear that the potential difference is the same irrespectively of the curve along which the integral has been computed, and so, from this point of viev too, the Maxwell-Hertz theory is unambiguous.

The present example differs from the previous one in that, in order to compute the voltmeter terminal potential difference, the electric field sliding rod, as no current flows in the circuit which is practically open, owing to the high internal voltmeter resistance, but in the plate the current is inducted following the magnetic field's time variation, as the plate is a solid conductor.

In the special case of a perfectly conductive plate, the magnetic field in it is zero and the inducted current flows only around the plate, following its rim. One thus obtains, by integrating along any one of the contours $\Gamma, \Gamma'\ \Gamma''$

$$u_b=\frac{\mu}{2\pi}\left[-i(t)\,v(t)+(b-c+x)\frac{di}{dt}\right]\ln\frac{a+l}{a}$$

Moon and Spencer solve this example with the same formula as the first example, thus finding the same result for both of them. In this manner Moon and Spencer's principle of ignoring the electromagnetic field existance is clarly illustrated. Moon and Spencer consider $\int_{M(C)}^{N}\bar{E}\,d\bar{r}=0$, which cannot be sustained for the general case before to solving the problem.

In another paper [7] Moond and Spencer give some other examples of the lack of logical construction of Maxwell's and Hertz's theory, in the form of some so-termed paradoxes. We shali deal with them.

Example 3

The experimental device is shown in fig. 3. M is a conductive loop, D is a copper disk; contact is made to it in A and C by two brushes. The voltmeter's indication —i.e. its terminal potential difference is asked for in the following cases:

a) The disk alone rotates at angular velocity Ω;
b) Both, the disk and the conductive loop rotate at angular velocity Ω;
c) The loop alone rotates at angular velocity Ω.

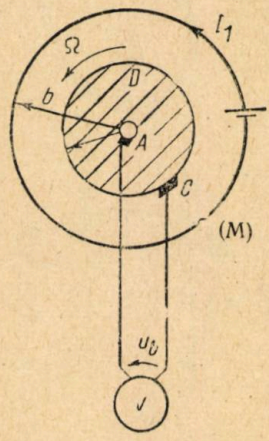


Fig. 3.

By using the Maxwell-Hertz theory we solve the problem in the same way for points a) and b). We therefore write the law of electromagnetic induction by integrating along a contour following first the radius AC, then the voltmeter wires, and at last the terminal voltage line (between the voltmeters' terminals), and obtain:

$$u_b = u_e = -\int_0^a (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r} = \int_0^a B r \Omega \, dr$$

or

$$u_b = \Omega \int_0^a B r \, dr$$

in which the magnetic flux density is only a function of the radius magnitude, $\bar{B} = \bar{B}(r)$, the magnetic field being a stationary one, and thus the voltmeter voltage is no function of time.

For the last case the voltmeter voltage is of course zero, because both terms of the emf are zero.

By misusing again — as previously shown — Maxwell's aquations. Moon and Spencer achieve quite a selection of results which are :

$-u_b = 0$ for all three cases, by using $\oint_\Gamma \bar{E}\,\bar{dr} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\,\bar{dA}$

$-u_b = \Omega \int_0^a Br\,dr$ for case a, $u_b = 0$ for case b and $u_b = \Omega \int_0^a Br\,dr$ for case c, by using $\bar{E} = \bar{v} \times \bar{B}$.

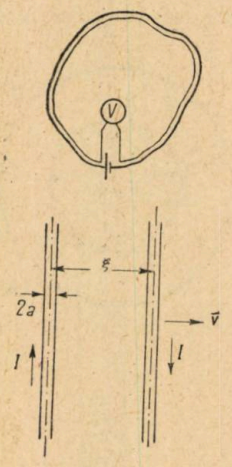


Fig. 4.

Moon and Spencer's own solution is wrong because the „Weber force" with which they calculate has been deduced in the asumption of rectilinear movement.

Example 4 (Flexible loop).

The problem is to find the emf inducted in a loop with a current, which suffers a random deformation. This emf can be read on a voltmeter connected to the terminals of a circuit which follows exactly the loop (fig. 4). As a special case of this problem, Moon and Spencer study the problem of two parallel rods, with steady eqaul and opposed currents, which move in opposed directions with the relative velocity $\bar{v}$.

For the general case we apply the integral undeveloped form of the law of electromagnetic induction in the sense of Hertz and we obtain

$$u_e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{and with} \quad \Phi = Li$$

$$u_e = -\left(L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}\right)$$

We presume that the current is maintained steady by adequate means, obtaining thus:

$$u_e = I\frac{dL}{dt} = I\frac{\mu l}{\pi}\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{\xi - a}{a}\right) = I\frac{\mu l}{\pi(\xi - a)}\frac{d\xi}{dt} = I\frac{\mu}{\pi}\frac{l}{\xi - a}v$$

Using in Maxwell's name the formula

$$u_e = -\int_{S_\Gamma}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\bar{dA}$$

Moon and Spencer, of course, find an incorrect result, and following their own theory they obtain the correct result.

Example 5 (Blondel's experiment).

Be there a wire wound on a magnetised core, which is being unwound on an other core, the latter being non-magnetic (fig. 5). Is emf being induced? The answer seems to be yes, because one may argue that the flux through the first spool decreases with the number of the spool's turns, and thus Φ_f the whole flux, $\Phi = N\Phi_f$ being the linking flux, and Moon and Spencer calculate the emf by simply derivating the latter:

$$u_e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(N\Phi_f) = -\Phi_f\frac{dN}{dt} \neq 0$$

The result is wrong, because in applying the above formula one must consider the contour in which emf is inducted as moving along with the bodies, and so, the number of real turns unwound from the magnetic core is equal to the number of fictious turns that are wound on the magnetic core by the contact point's P movement (one can vizua-

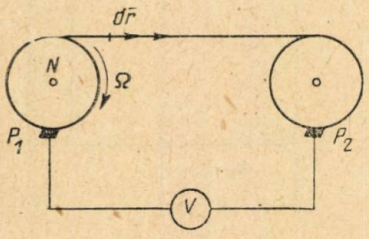


Fig. 5.

lise the contact brush attached to the magnetic core by means of an infinitely elastic thread which winds itself on the magnetic core as the real wire is unwound). The method may seem artificious, but it always yields correct results, as in Hertz's theory the law of electromagnetic induction can be applied only to continuous material contours deformed but never broken up by the bodies' movements.

Of course, the correct result can also be obtained by

$$u_e = -\oint (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r} = 0$$

because $\bar{dr}$ is parallel to $\bar{v}$ and the magnetic flux density is stationary,

Example 6 (Cullwick's experiment).

A very long straight wire withe the current I is coaxial with a hollow cylinder made of magnetic material, on which slide with velocity v two contact brushes connected — as shown in fig. 6 — to the terminals of a voltmeter. By appling the integral restrained form of the law of electromagnetic induction after Hertz's theory, it is easily seen that the voltmeter flux variation is the very flux that appears in the cross-section left free by of the cylinder relative downward motion, i.e.:

$$u_e = \mu_0 \frac{I}{2\pi} v \ln \frac{b}{a}$$

The same result is obtained by using the integral developed law form, because there appears inducted emf owing both to the movement and to the flux density variation in the mathematical immobile plane which coincides at a given moment with the cylinder front face.

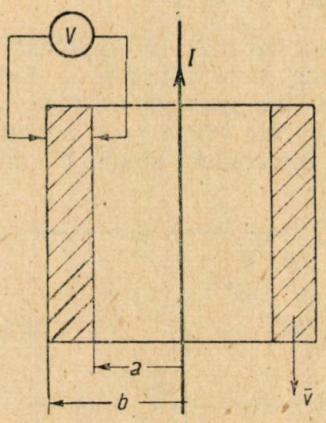


Fig. 6.

Moon and Spencer take into account only the emf related to the magnetic field owing to time variation and so, of course, state one more paradox.

Indeed, the „new electrodynamics" leads to the correct result, but this again is owed to the steady current. Should it be varying, the „new eletcrodynamics" soltion would be wrong, as it was for example 3.

Example 7

A wire with current I is unwound from a spool and wound on another one, the wire velocity being v. What is the emf inducted in the stationary wire AB, this being read, for instance, on an electrostatic voltmeter ?

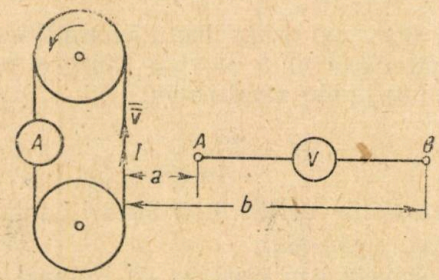


Fig. 7

As the wire AB is stationary, we obtain of course for it

$$u_e = -\int (\bar{B} \times \bar{v})\, d\bar{r} = 0$$

but on a „new eletcrodynamics" basis, Moon and Spencer obtain

$$\frac{I}{2\pi \varepsilon c^2}\, v \ln \frac{b}{a}$$

They should have obtained the correct result even on this basis, had they not ommitted the moving of the conductor positive charges, and reckoned solely with the electron convection current.

Another class of Moon's and Spencer paradoxes concerns the equivalence of conduction and convection current. The equivalence is real in regard of the magnetic field generation (as both currents have the same rôle in the magnetic circuit law and in the electric charge conservation law), but Moon and Spencer extend it to mechanical action. Considering the classical interpretation of conduction current (as an electron drift in the ionic positive lattice) the forces in a conductor with current result from both magnetic forces on the drifting electrons and electric forces on all charged particles (electrons as well as ions). Thus, taking into acount magnetic forces only, Moon and Spencer, of course, find paradoxical results, i.e.:

— the attraction (instead of the repelling) between two parallel eletcron beams, which they consider as parallel currents;
— the dependence of the force between two parallel conductors with current on their longitudinal velocity.

We further mention that the equivalence which we have stated between conduction and convection current is valid in stationary state only: in non-stationary state the displacement current too must be considered

as an source of magnetic field, and thus equal non-stationary conduction and covection currents have different magnetic fields, because the displacement currents associated with them are different. For instance, even in a conductor with varying conduction current div $\bar{E}$ can be taken very near to zero, an approximation not to be admitted for an electron beam, as for the latter div $\bar{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$.

It is interesting that, by using the Liénard-Wiechert potentials for computing the magnetic field of a moving charged particle, one obtains for low velocity and negligible acceleration

$$\bar{H} = \frac{q\bar{v} \times \bar{R}}{4\pi R^3}$$

which suggests the valability of the Biot-Savart-Laplace formula for one current element, by taking $q\bar{v} = i\bar{dr}$.

But one current element can exist as an isolated object only if there is a corresponding charge agglomeration at both its ends — that is if the current element really is an elementary dipole with electric momentum. In this case, and for the nearly stationary zone round the dipole (that is for a region not too far from it) the formula

$$\bar{H} = \frac{i\bar{l} \times \bar{R}}{4\pi R^3}$$

obtained from the Biot-Laplace-Savart formula gives indeed the magnetic field, but the electirc field is

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{(\bar{l}\bar{R})\bar{R}}{R^5} - \frac{\bar{l}}{R^3}\right]$$

and so differs from the electric field of one single moving particle. Thus, in this instance, the two equal convection and conduction currents have different electric fields.

Concerning the mechanical action beween two current elements — considered as two electric dipoles with varying electric momentum, — it is easy to compute the electric action is the predominating one. This action consists not only of forces, but of torques too, and so the current elements cannot be taken as material particles (material points) because on them torque is not possible exerted, and it is of no use to attempt to find formulas for such forces staitsfying the action and reaction principle. Thus the Ampère formula on which Moon and Spencer muilt up their new electrodynamics, making no distinction between conduction and convection current, is not sound. This formula is valid — like Grassman's and Biot-Savart-Laplace's only if integrated along a contour.

Regarding the introduction of the magnetic field by the Biot-Savart-Laplace formula as written for an elementary current figured by an elementary dipole, a formula that can be employed as previously stated for the nearly stationary zone, we think this introduction is correct, but may lead to the opinion that the magnetic field results only from the element's

conduction current. This opinios was false, as the magnetic field principally results from the displacement current produced by the dipole electric field time variation.

Conclusions

Though macroscopic electrodynamics (including relativistic electrodynamics too) is by now a classical feature in physics, yielding results which are coherent and can be experimentally tested, some physicists still pursue attempts to eliminate the field concept, and so the contiguous transmission of action, thus turning back to a theory of remote action, in which the field is at the most a mathemathical auxiliary.

Considering that coherent electrodynamics of moving bodies can be correctly founded only on relativity, and that relativity is usually out of reach for text-books and even for some papers, one must resort to a compromise in order to give engineers a method whichi is ideed sound in dealing with the electrodinamic problems of moving bodies. We maintain that the Maxwell-Hertz theory is a compromise, as it is correct for speeds currently dealt with in engineering.

We find it convenient to mention at thais point that at the Polytechnic Institute of Bucarest Prof. R. Rădulet — head of the chair for Electrotehnics — has achieved to teach the Maxwell - Hertz theory explicitely after all the principia of logics, making allowance for its limitations, and that some of Moon's and Spencer's „paradoxes" have been employed as students' exercises some time before the Professor's staff was informed that something was rotten in them. At any rate, these paradoxes have increased the number of exercises met to illustrate a correct use of Maxwell's and Hertz's laws.

As regards the theory of Moon and Spencer it is wrong in a more general sense that the solving of some exercises, because it denies the existence of the electromagnetic field (looking at it mostly as an auxiliary), the recognition of which as a physical system, not to be confused with bodies, cannot be contested, and links all the post-Maxwellian electrodynamics — be they macrascopic, relativistic or quantum — as this field has momentum, mass, energy and so on.

Moon's and Spencer's suggestion to introduce the magnetic field on the basis of a current element, by using formulas of the Biot-Sarvart-Laplace type, is inconsistent because it can be employed only for classed loops and in a stationary state, thus lacking generality. The equivalence which they admit between convection and conduction current has the same defect, of which again Moon and Spencer are not aware, to exist only for the stationary state, and besides, to be true only in what concerns the magnetic field generation.

The conclusion we draw from the series of papers by Moon and Spencer is that it may be met to teach some relativity even in the engineering lectures on electrotechnics, especially as the need for relativity begins to be generally felt in modern engineering.

Chair for Electrotechnies

REFERENCES

[1] *Parry Moon, Domina Eberle Spencer:* Interpretation of the Ampère Experiments. J. Franklin Inst. Vol. 257, nr. 3 (Mart 1954) p. 203—220.
[2] *Parry Moon, Domina Eberle Spencer:* The Coulomb Force and the Ampère Force. J. Franklin Inst. Vol. 257, nr. 4 (Apr. 1954) p. 305.
[3] *Parry Moon, Domina Eberle Spencer:* A New Electrodynamics. J. Franklin Inst. Vol. 257 nr. 3 (Mai 1954) p. 369—381)
[4] *Parry Moon, Domina Eberle Spencer:* A Postulation Approach to Electromagnetism. J. Franklin Inst. Vol. 259, nr. 4 (April. 1955) p. 293—305.
[5] *Parry Moon, Domina Eberle Spencer:* On Electromagnetic Induction. J. Franklin Inst., Vol. 260, nr. 3 (Sept. 1955) p. 213—226.
[6] *Parry Moon, Domina Eberle Spencer:* On the Ampère Force. J. Franklin Inst., Vol. 260, nr. 4 (Oct. 1955) p. 295—311.
[7] *Parry Moon, Domina Eberle Spencer:* Some Electromagnetic Paradoxes J. Franklin Inst., Vol. 260, nr. 5 (Nov. 1955) p. 373—395.
[8] *Rodney Driver:* The Undetermined Constant in Relative — Velocity Electrodynamics J. Franklin Inst., Vol. 261, nr. 5 (Mai 1960) p. 547—555.
[9] *F. W. Warburton:* Electromagnetism, Old and New. J. Franklin Inst. Vol. 258, nr. 5 (Nov 1954) p. 395—400.
[10] * * * Kritik und Fortbildung der Relativitätstheorie. Herausgeber Karl Saper. Gray 1958, p. 144—160.
[11] * * * Voprosî Filosofii nr. 9 — 1959.
[12] *V. Novacu:* Introducere în electrodinamică Vol. II Edit. Acad. R.P.R.
[13] *R. Rădulet:* Bazele teoretice ale Electrotehnicii, Vol. II E.E.S. 1955.
[14] *R. Becker, F. Sauter:* Theorie der Elektrizität, vol. I. Teubner, 1962.

ОШИБОЧНОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

(Краткое содержание)

В статье критически рассмотрены, попытки создания электродинамики без электромагнитного поля, на основе дальнодействия. Показывается что некоторые вопросы отмеченные в литературе как парадоксы электродинамики Максвелла и Герца являются результатом ошибочного применения ее законов и дается корекiное непротиворечивое их решение. Рассматривается возможность определения магнитного поля посредством формулы Био-Саварта-Лапласа для элемента тока, показывая необоснователъность метода.

ERRORS IN THE PRESENTATION OF SOME ELECTROTECHNICAL PROBLEMS

(Summary)

In this paper position is taken as regards the proposal to develop electrodinamics without electromagnetic field, that is, founded solely on action at a distance. It is shown that problems quoted in some papers as paradoxes of the Maxwell-Hertz electrodinamics appear as such only due to errors in the use of this theory's laws, and the right and therefore nonparadoxical way of solving those problems is given. The possibility of introducing the magnetic field by means of the Biot-Savart-Laplace formula as written for an element of current is studied and arguments are given against it.

SOLUTIONS ERRONNÉES DE QUELQUES PROBLÈMES D'ÉLECTROTECHNIQUE

(Résumé)

Dans cet article on critique la proposition qui a été faite de constituer une électrodynamique sans champ électromagnetique, uniquement fondée sur les actions à distance. On montre que les problèmes cités dans la littérature comme paradoxes de l'électrodynamique Maxwell-Hertz ne le sont qu'à la suite de l'emploi erroné des lois de cette théorie, et on indique les solutions correctes, et donc sans paradoxes, de ces problèmes. On considère la possibilité d'introduire le champ magnétique en partant de la formule Biot-Savart-Laplace pour un élément de courant, et on démontre l'inconsistance d'un tel procédé.

FEHLERHAFTE LÖSUNGEN EINIGER AUFGABEN DER ELEKTROTECHNIK

(Zusammenfassung)

In vorliegender Arbeit werden die Versuche, eine Elektrodynamik ohne elektromagnetisches Feld, nur auf Fernwirkung beruhend, zu bilden, der Kritik unterworfen. Es wird gezeigt, dass die Paradoxien, die in einigen Schriften als Folge der Lösung von Aufgaben mit Hilfe der Maxwell-Hertz-Theorie vorgeführt werden, nur auf fehlerhafter Benützung der Gesetze dieser Theorie beruhen; ebenso wie diese Aufgaben richtig und ohne Paradoxien zu behandeln sind. Es wird der Versuch, das magnetische Feld auf Grund der Biot-Savart-Laplace-Formel für einen elementaren Leiter einzuführen, als ungerechtfertigt betrachtet.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 1

CUPLURILE ASINCRONE LA MOTOARELE SINCRONE REACTIVE CU POLI MASIVI *

NICOLAE GALAN

Motoarele sincrone reactive de putere mică se bucură de o utilizare destul de largă, acolo unde este nevoie de o turație constantă, deoarece este mai economic decît motorul sincron obișnuit. Acest tip de motor prevăzut cu poli masivi prezintă avantajul că nu are înfășurare de excitație, realizîndu-se prin urmare o anumită economie de cupru și nefiind necesară sursa de curent continuu pentru excitație; de asemenea, ca și la celelalte motoare sincrone cu poli masivi pornirea se face în asincron, deci elimină construcțiile auxiliare prevăzute pentru pornire. În timpul pornirii, în polii masivi ai rotorului se stabilesc curenți de conducție variabili, care în interacțiune cu cîmpul magnetic produce cuplul asincron. Studiul acestor cupluri prezintă un interes deosebit deoarece determină intrarea în sincronism a motorului.

De menționat că, cuplurile asincrone apar și în regimul de funcționare sincron, în cazul în care tensiunea aplicată motorului este nesinusoidală, sau în cazul cînd sistemul de tensiuni aplicat este nesimetric. Pentru determinarea cuplului în regim asincron este necesar să calculăm repartiția spațială a intensității cîmpului electric și cîmpului magnetic, operație dificilă din cauza efectului pelicular în corpurile feromagnetice.

Vom analiza detaliat cuplul asincron dezvoltat de unda fundamentală a cîmpului magnetic întrucît cuplurile determinate de celelalte armonici se calculează analog. Pentru determinarea cuplului asincron trebuie mai întîi să calculăm parametrii rotorici care sînt funcții complexe de alunecare.

Parametrii rotorului masiv. Rezolvarea acestei probleme presupune mai întîi determinarea adîncimii de pătrundere Δ a undei electromagnetice. Calculul adîncimii de pătrundere se face destul de greu dacă ținem seamă de variația permeabilității magnetice a oțelului din care este construit rotorul, în funcție de cîmpul magnetic. Cîmpul magnetic variază atît de-a lungul periferiei rotorului cît și de-a lungul sensului de pătrundere al

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 7—8 aprilie 1962.

undei electromagnetice. Luăm un sistem de coordonate, așa cum este indicat în figura 1.

Pentru a ajunge la expresii simple, utile în calcule, presupunem suprafața polului plană și infinită și avem în vedere simplificările ce se fac

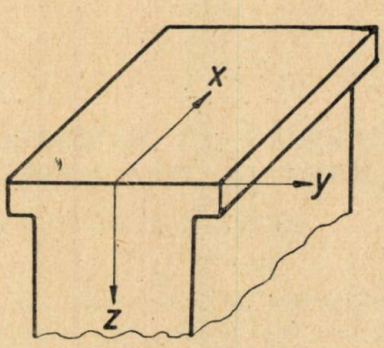


Fig. 1

la unda electromagnetică plană, adică considerăm că intensitatea cîmpului electric are numai componentă după axa *ox* diferită de zero și depinde numai de ordonata *z*, iar intensitatea cîmpului magnetic are componentă numai după axa *oy* diferită de zero, și este funcție numai de coordonata *z*. În acest caz ecuațiile cîmpului electromagnetic

$$\text{rot } \bar{H} = \gamma \bar{E}$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial (\mu \bar{H})}{\partial z} \tag{1}$$

devin:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial (\mu H_y)}{\partial t} \tag{2}$$

Scriind ecuațiile în complex în ipoteza că mărimile E și H sînt funcții sinusoidale de timp, avem:

$$\frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma \dot{E}_m$$

$$\frac{d\dot{E}}{dz} = -j\omega\mu \dot{H}_m \tag{3}$$

sau

$$\frac{d^2 H_m}{dz^2} = j\omega\gamma\mu \dot{H}_m$$

$$\frac{d^2 E_m}{dz^2} - j\omega\gamma\mu \dot{E}_m + \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d\dot{E}_m}{dz} \tag{4}$$

Știind că permeabilitatea magnetică este funcție de intensitatea cîmpului magnetic, iar cîmpul magnetic este funcție de z, rezultă că $\mu = f(z)$. Așa cum se indică în [2] se presupune că variația lui μ în funcție de z, este de forma :

$$\mu = \frac{\mu_e}{\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^2}$$

unde μ_e este permeabilitatea la suprafața polului și z_k este valoarea coordonatei la care cîmpul magnetic se anulează. S-a făcut această presupunere avîndu-se în vedere variația permeabilității magnetice cu cîmpul magnetic. Această expresie a permeabilității magnetice pe anumite porțiuni dă rezultate apropiate de realitate, însă în vecinătatea punctului $z = z$ este inaplicabilă. Calculul se efectuează pentru cîmpuri intense la suprafața rotorului feromagnetic. Ținînd seamă de (4) și (5) și notînd :

$$K = \sqrt{\frac{\omega \mu_e \gamma}{2}} \tag{6}$$

ajungem la ecuația

$$\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^2 \frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = j\, 2k^2 H_m \tag{7}$$

a cărui soluție este :

$$\dot{H}_m = A_1 \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_1} + \dot{A}_2 \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_2} \tag{8}$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 8j\, K^2 z_k^2}\right) \text{ și} \tag{9}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 8j\, K^2 z_k^2}\right)$$

Punînd condițiile ca pentru $z = 0$, $H_m = H_{me}$, unde H_{me} este intensitatea cîmpului la suprafața polului și la $z = Z_k$, H_m să fie finit, rezultă următoarea expresie :

$$\dot{H}_m = H_{me} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_1} \text{ pentru } 0 < z < y_k . \tag{10}$$

Exponentul α_1 se poate pune sub următoarea formă :

$$\alpha_1 = \alpha_1' + j\,\alpha_1'' = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 64\, K^4 z_k^4} + 1}{2}}\right) +$$

$$+ j\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{1 + 64\, K^4 z_k^4} - 1}{2}} \tag{11}$$

Modulul intensității cîmpului magnetic va fi:

$$H_m = H_{me}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_1'} \tag{12}$$

de unde ținînd cont de (5), rezultă:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^2} = \frac{\mu}{\mu_e}\left(\frac{H_m}{H_{me}}\right)^{-\frac{2}{\alpha_1'}} \tag{13}$$

Presupunînd după [2] că legea legăturii între inducția magnetică și intensitatea cîmpului magnetic este de forma:

$$B = K_1 H^{\frac{1}{n}};\ n > 1 \tag{14}$$

pentru intensități mari ale cîmpului magnetic, vom avea:

$$\eta = \frac{B_m}{H_m} = k,\ H_m^{\frac{1}{n}-1} \tag{15}$$

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{H_m}{H_{me}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \tag{16}$$

comparînd (16) cu (13) avem egalitatea:

$$\alpha_1' = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 64\,K^4 z_k^4} + 1}{2}}\right) = \frac{2n}{n-1} \tag{17}$$

Rezolvînd această egalitate în raport cu $K z_k$, obținem:

$$K z_k = \frac{\sqrt[4]{2n\,(3n+1)^2\,(n+1)}}{\sqrt{2}\,(n-1)} \tag{18}$$

Intensitatea cîmpului electric se poate determina din prima ecuație a sistemului (3)

$$\dot{E}_m = \frac{1}{\gamma}\frac{d\dot{H}_m}{dz} \tag{19}$$

găsim

$$\dot{E}_m = \frac{\alpha_1}{\gamma z_k}\dot{H}_{me}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_1 - 1} = \dot{E}_{me}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_1 - 1} \tag{20}$$

Efectuînd integrala de linie a intensității cîmpului electric în lungul axei x, linia de integrare aflîndu-se în planul $z=0$, și avînd în vedere că

intensitatea cîmpului electric este independentă de această coordonată, obținem relația :

$$\dot{U}_{me} = l\,\dot{E}_{me} \tag{21}$$

unde l este lungimea axială a rotorului.

Scriind legea circuitului magnetic pentru o porțiune elementară a polului căruia îi corespunde unghiul la centru $\frac{d\varphi}{p}$, obținem :

$$\dot{I}_m = R\,\frac{d\varphi}{p}\,\dot{H}_{me}. \tag{22}$$

Numim impedanța elementului de volum considerat raportul :

$$Z = r + jx = \frac{U_{me}}{I_m} = \frac{1\,E_{me}}{R\,\frac{d\varphi}{p}\,H_{me}}. \tag{23}$$

Avînd în vedere expresia (20) putem scrie :

$$Z = \frac{1}{R\,\frac{d\varphi}{p}} \cdot \frac{\alpha_1}{\gamma\, z_k} \tag{24}$$

Revenind la formula (18) α_1 se poate scrie sub forma :

$$\alpha_1 = \frac{2n}{n-1}\left(1 + j\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\right) \tag{25}$$

deci :

$$Z = \frac{1}{R\,\frac{d\varphi}{p}} \cdot \frac{\frac{2n}{n-1}(1+j)\sqrt{\frac{n+1}{2n}}}{\gamma\,\frac{1}{K}\,\frac{\sqrt[4]{2n\,(3n+1)^2\,(n+1)}}{\sqrt{2}\,(n-1)}} \tag{26}$$

Din (23) și (26) rezultă :

$$r = \frac{l}{R\,\frac{d\varphi}{p}} \cdot \frac{\frac{2n}{n-1}}{\gamma\,\frac{1}{K}\,\frac{\sqrt[4]{2n\,(3n+1)^2\,(n+1)}}{\sqrt{2}\,(n-1)}} \tag{27}$$

$$x = \frac{1}{R\,\frac{d\varphi}{p}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2n}}}{\gamma\,\frac{1}{K}\,\frac{\sqrt[4]{2n\,(3n+1)^2\,(n+1)}}{\sqrt{2}\,(n+1)}} \tag{28}$$

Notăm cu $\frac{1}{K} = \Delta$ care este adîncimea de pătrundere în cazul cînd permeabilitatea magnetică este constantă și egală cu μ_e. Expresiile (27) și (28) devin:

$$r = \frac{l}{\gamma R \frac{d\varphi}{p} \Delta K_z}; \quad x = \frac{l}{R \frac{d\varphi}{p}} \cdot \frac{1}{\gamma \Delta K_z \sqrt{\frac{2n}{n+1}}} \tag{29}$$

unde am notat cu $K_z = \frac{\sqrt[4]{2n(3n+1)^2(n+1)}}{2\sqrt{2n}}$

și reprezintă coeficientul cu care trebuie să înmulțim adîncimea de pătrundere Δ în cazul cînd ținem seamă de variația permeabilității în sensul axei *oz*.

Făcînd raportul expresiilor (27) și (28) obținem:

$$\frac{x}{r} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}} \tag{30}$$

de unde rezultă că dacă cunoaștem rezistența r a barei elementare se determină relativ simplu și reactanța x în ipotezele stabilite în desfășurarea calculului. În realitate, însă, cîmpul magnetic variază și în sensul axei *oy* deci și permeabilitatea magnetică variază. Pentru a ține seamă de variația permeabilității magnetice în calculul adîncimii de pătrundere vom considera cîmpul magnetic descompus după cele două axe: longitudinală și transversală, considerînd totodată și modul de variație de-a lungul pasului polar al celor două componente. Repartiția spațială a inducțiilor B_d și B_φ după cele două axe în pol diferă de repartiția inducțiilor

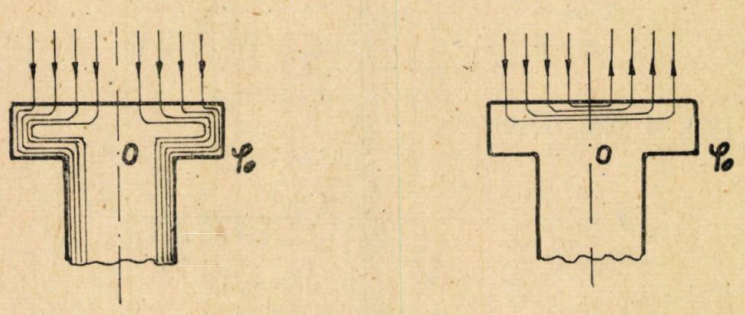


Fig. 2

corespunzătoare în întrefier, astfel că inducția B_d atinge maximum la marginea polului ($\varphi = \varphi_0$).

Repartiția spațială a inducțiilor după cele două axe d și q poate fi considerată cu destulă aproximație ca fiind sinusoidală de asemenea și

intensitățile cîmpului magnetic după cele două axe se consideră ca o variație sinusoidală, adică

$$H_d = H_{dm} \sin \varphi \qquad \text{iar } H_q = H_{qm} \cos a\varphi .$$

$$\text{Notăm } \frac{H_{qm}}{H_{dm}} = \left(\frac{B_{qm}}{B_{dm}}\right)^n = K_B^n$$

de unde

$$H_e = H_{dm} \sqrt{\sin^2 \varphi + (K_B^n \cos a\varphi)^2}$$

În această lucrare nu vom efectua calculul coeficientului $K\varphi$ — coeficient ce ține seamă de variația adîncimii de pătrundere datorită variației cîmpului magnetic de-a lungul pasului polar, ci vom lua rezultatele acestui calcul direct din [1].

În lucrarea [1] se arată că

$$K\varphi = \frac{1}{2\alpha\pi} \frac{\int_0^{\varphi_0} (\sin^2\varphi + K_B^2 \cos^2\varphi)(\sin^2\varphi + K_B^{2n}\cos^2 a\varphi)^{\frac{n-1}{4n}} d\varphi}{\left[\int_0^{\varphi} \sqrt{\sin^2\varphi + K_B^2\cos^2\varphi}\,(\sin^2\varphi\, K_B^{2n}\cos^2 a\varphi)^{\frac{n-1}{4n}} d\varphi\right]^2}$$

unde $K_B = 1 - \cos\varphi_0$, $a = \frac{1}{\alpha}$, α fiind coeficientul de acoperire polar, iar φ este unghiul la centru corespunzător unui punct al periferiei față de axa longitudinală măsurat în grade electrice.

Integralele din expresia (31) se efectuează pe cale grafică; se observă ușor că pînă la urmă $K\varphi$ depinde numai de α. Pentru ușurarea calculului $K\varphi$ se tratează sub formă de curbe pentru diferite valori ale lui n.

$$K_\varphi = f(a).$$

În literatura de specialitate se ia în mod curent $n = 9$. În concluzie, adîncimea echivalentă de pătrundere se poate scrie sub forma:

$$\Delta_e = \Delta_m \frac{K_z}{K_\varphi} \tag{32}$$

dacă se are în vedere (29) și (31).

În (32) Δ_m are următoarea expresie analitică:

$$\Delta_m = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \left(\frac{1}{2K_F x_1}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi f_N \gamma}\sqrt{S}} \tag{33}$$

unde $A = \frac{1{,}35}{2} \cdot \frac{K_{w1} W_1}{p} I_N$,

K_F este un coeficient care depinde de α și n.

Se face integrarea pe cale grafică și se reprezintă sub formă de curbe.

Trebuie arătat că calculele efectuate în lucrările de specialitate și care au fost redate în parte mai sus se fac în ipoteze simplificatorii, micșorîndu-se astfel gradul de precizie al calculului. În lucrările [1] și [2] se arată că sînt domenii unde datele experimentale se apropie sensibil de cele teoretice cu toate simplificările făcute. O sursă importantă de erori o constituie modul de aproximare a repartiției cîmpului magnetic. Această repartiție în corpurile masive are un caracter complex și nu poate fi exprimată cu precizie sub formă de funcție analitică. Încercările de a i se da o expresie analitică se fac în dauna preciziei calculului.

Putem trece la calculul efectiv al parametrilor rotorului raportați la stator.

Considerăm că fiecare paralelipiped elementar constituie o bară (înțelegem prin paralelipiped elementar paralelipipedul cu dimensiunile $\Delta_e, l, R\frac{d\varphi}{p}$). Se poate scrie rezistența rotorului după cele două axe d și q în unități relative:

$$r'_{ei} = \frac{1}{p} \cdot \frac{I_N}{U_N} \cdot \frac{m_1 (K_{w1} W_1)^2}{m_2 (K_{w2} W_2)^2} \left[r_b + 2\, ti \frac{dr_k}{\left(2 \sin \frac{d\varphi}{2}\right)^2} \right] \tag{34}$$

În această expresie r_b este rezistența paralelipipedului elementar, care se calculează ușor ținînd seamă de (32).

$$r_b = \frac{l}{\gamma K_2 \frac{\Delta_m}{K\varphi} K \frac{d}{\varphi p}} \tag{35}$$

În cazul de față $w_2 = \frac{1}{2}$ iar $K_{w2} = 1$, t_i reprezintă coeficientul t_d sau t_q care ține seamă de imperfecțiunea coliviei și depinde de numărul de bare micșorîndu-se cu creșterea acestuia, în cazul numărului de bare infinit avem:

$$t_d = 0{,}55 \text{ și } t_q = 0{,}95$$

dr_k este rezistența elementului de inel de secțiune q_k de conductivitate γ_k și lungime $R\frac{d\varphi}{p}$

$$dr_k = \frac{R\frac{d\varphi}{p}}{\gamma_k q_k} \tag{36}$$

Numărul fazelor rotorice se determină ușor dacă se calculează mai întîi coeficientul C'_i care exprimă raportul dintre tensiunea magnetomotoare totală F_{2p} pe o pereche de poli și tensiunea magnetomotoare F_1 a unei spire dispusă după axele d și q.

Acești coeficienți după [1] au următoarele expresii:

$$C'_d = 4\int_0^{\varphi_0} \sin^2\varphi \left[\sin^2\varphi + (K_B^4 \cos a\varphi)^2\right]^{\frac{n-1}{4n}} d\varphi$$

$$C'_q = 4\int_0^{\varphi_0} \cos^2\varphi \left[\sin^2\varphi + (K_B^n \cos a\varphi)^2\right]^{\frac{n-1}{4n}} d\varphi \tag{37}$$

Astfel calculați coeficienții C'_i numărul barelor elementare pentru rotorul incomplet va fi:

$$N_{2i} = 2p\frac{C'_i}{d\varphi} \tag{38}$$

Cunoscînd numărul marelor N_{21} se poate calcula numărul fazelor

$$m_{2i} = \frac{N_{2i}}{p}. \tag{39}$$

Introducînd (35), (36), (38) în (34) și avînd în vedere că

$$\lim_{d\varphi\to 0} \frac{\left(\frac{d\varphi}{2}\right)}{\sin^2\frac{d\varphi}{2}} = 1,$$

obținem:

$$r'_{2i} = \frac{I_N}{U_N}\frac{(K_{w1}W_1)^2 m_1}{0{,}5\,p\,C'_i}\left[\frac{pl}{R\gamma R_2\frac{\Delta_m}{K\varphi}} + \frac{2\,ti\,R}{\gamma_k\,q_k\,p}\right] \tag{40}$$

Pentru calculul cuplului asincron se ia drept rezistență rotorică media aritmetică a rezistențelor după cele două axe, adică:

$$r'_2 = \frac{I_N}{U_N}\frac{m_1(K_{w1}W_1)^2}{p}\left[\frac{\frac{1}{C'_q}+\frac{1}{C'_d}}{R\gamma K_z\frac{\Delta_m}{K\varphi}} + \frac{2K}{\gamma_k\,q_k\,p}\left(\frac{t_q}{C'_q}+\frac{t_d}{C'_d}\right)\right] = \tag{41}$$

$$= r'_{m2} + r'_{k2}.$$

Avînd în vedere relația (30) reactanța rotorului masiv se calculează ușor:

$$X_{2M} = r'_{2M}\sqrt{\frac{n+1}{2n}} \tag{42}$$

unde r'_{2M} este rezistența rotorului masiv fără a socoti rezistența inelelor de capăt. Pentru a calcula deactanța totală a rotorului trebuie să adăugăm la reactanța x'_{2M} și reactanța inelelor de capăt, adică :

$$x'_2 = x'_{2M} + x'_{2k} \tag{43}$$

unde

$$x'_{2k} = \frac{I_N}{U_N} \frac{m_1 (K_{w1} W_1)^2}{0{,}5\, p} \left[\frac{1}{C'_q} + \frac{1}{C'_d}\right] \frac{0{,}79}{m_1} f_N \alpha \pi \tau g . 10^{-5}$$

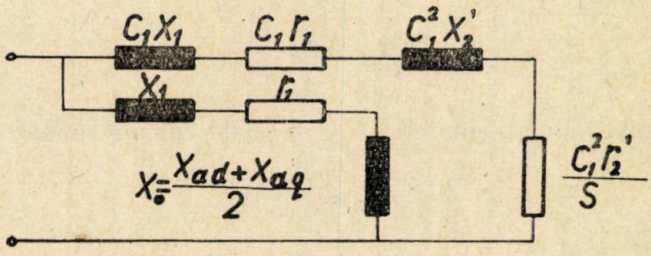


Fig. 3

g — fiind coeficient care depinde de forma geometrică a inelului, se determină după curbe în funcție de $\frac{\tau}{d}$ și $\frac{d'}{\varrho}$, d' fiind distanța dintre centrul inelului și punctul extrem al părții frontale a înfășurării statorice, iar $\varrho = 0{,}223$ h, în care h este semiperimetrul inelului.

Parametrii statorului se calculează în mod obișnuit ca la orice mașină sincronă. În concluzie, avînd toți parametrii mașinii determinați putem construi schema echivalentă a mașinii sincrone reactive funcționînd în regim asincron, unde C_1 se poate socoti

$$C_1 = 1 + \frac{x_1}{\frac{x_{ad} + x_{aq}}{2}} \tag{44}$$

deoarece s-a socotit reactanța circuitului de magnetizare ca fiind

$$x_0 = \frac{x_{ad} + x_{aq}}{2} . \tag{45}$$

Cunoscînd parametrii mașinii sincrone în regim asincron se poate determina cuplul asincron. În toate lucrările apărute în literatura de specialitate la calculul cuplului asincron se neglijează rezistența statorului, fapt care nu duce la erori mari în cazul mașinilor de medie și de mare putere. Însă, în cazul mașinilor de mică putere neglijarea rezistenței statorice conduce la erori sensibile, din această cauză în lucrarea de față vom considera și rezistența statorului în calculul cuplului asincron. După

cum se știe, din teoria mașinii asincrone, cuplul are următoarea expresie în unități relative, adică raportat la cuplul corespunzător puterii nominale:

$$M_a = \frac{C_1^2 \gamma_2'}{S\left[\left(C_1 r_1 + \frac{C_1^2 r_2'}{S}\right)^2 + \left(C_1 X_1 C_1^2 X'\right)\right]^2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_n} \tag{46}$$

în care parametrii se calculează așa cum s-a arătat mai sus. De menționat este faptul că forma curbei cuplului asincron în funcție de alunecare prezintă un mare interes pentru intrarea în sincronism a motorului.

Așa după cum se arată în [3] pentru ca motorul să intre în sincronism trebuie adus la o anumită turație care să fie mai mare decît turația stabilită prin calcul la care se petrece intrarea în sincronism. În multe cazuri, pentru a se obține un cuplu sincron important în regim permanent coeficientul de coperire polar α se ia mult mai mic decît la mașinile normale, ajungîndu-se pînă la $\alpha = 0{,}4$. În acest caz, rezistența rotorului are o valoare mare iar punctul de funcționare în regim asincron se stabilește la o alunecare importantă, în unele cazuri mai mare decît alunecarea la carese se realizează intrarea în sincronism.

Pentru a se asigura intrarea în sincronism fără a schimba însă raportul între reactanța longitudinală și transversală se propun în prezenta lucrare următoarele două soluții:

a) Fixarea pe partea laterală a polului a unei benzi confecționate din material cu rezistivitate mică, de exemplu, din cupru, care are un efect mult mai pronunțat decît inelele de capăt.

Dacă rezistența unei astfel de benzi este:

$$r_s' = \frac{\varrho\, l}{S} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{m_1 (K_{w1} W_1)^2}{m_2 (K_{w2} W_2)^2} \tag{47}$$

unde

$$K_{w2} = 1$$

$$W_2 = \frac{1}{2}$$

$m_2 = 1$ sau 2, după cum avem benzi numai de o parte a polului, sau de ambele părți, atunci rezistența echivalentă a rotorului raportată la înfășurarea rotorică va fi:

$$r_{2e}' = \frac{r_s' \cdot r_{M2}'}{r_s' + r_{M2}'} \tag{48}$$

deoarece sînt două rezistențe în paralel, unde se calculează ca fiind prima parte a expresiei (41).

Adăugînd rezistenței echivalente r_{e2}' rezistența inelelor de capăt r_{2k}', aflăm rezistența totală raportată a rotorului.

Aceste benzi afectează și reactanța rotorului, însă calculul reactanței benzii este greu de efectuat datorită repartiției complexe a cîmpului mag-

netic în această regiune. Cuplul de pornire este în acest caz întrucîtva mai mic însă prin alegerea convenabilă a secțiunii benzii se poate obține cuplu de pornire dorit, fapt care este valabil și pentru inelele de capăt; în cazul barelor tehnologia de fabricație este mai simplă, ceea ce constituie un avantaj important.

b) Se pot practica canale longitudinale pe suprafața polului care influențează alura curbei cuplului asincron. Numărul acestor canale trebuie stabilit de la caz la caz. Prin cele arătate la punctele a și b se urmărește ca înclinarea curbei cuplului față de ordonată să fie cît mai mică.

Calculul cuplului cu secvență inversă

În cazul în care sistemul trifazat de tensiuni aplicat motorului este nesimetric, după cum se știe, se poate descompune într-un sistem de tensiuni simetric direct și unul indirect. Gradul de nesimetrie este dat de raportul valorilor absolute ale tensiunilor simetrice inversă și directă.

$$\varepsilon = \frac{U_i}{U_d} \tag{49}$$

unde U_i este modulul tensiunii de secvență inversă iar U_d modulul tensiunii de secvență directă.

Calculul cuplului datorit cîmpului de secvență inversă se face analog cu calculul dezvoltat mai sus.

Ținînd seamă de (46) se poate scrie expresia cuplului mediu sub forma următoare:

$$M_{ai} = \frac{\varepsilon^2 C_1^2 r'_{2i}}{(2-S)\left[\left(C_1 r_1 + \frac{C_1^2 r'_{2i}}{2-S}\right)^2 + (C_1 X^1 + C_1^2 X'_{2i})\right]^2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_n}$$

Pentru calculul lui r'_{2i} și x'_{2i} se folosesc aceleași expresii avînd în vedere că acolo unde apare alunecarea S se va înlocui cu $2-S$, care reprezintă alunecarea cîmpului de secvență inversă față de rotor. După cum se constată din expresia (47) acest cuplu are valori mari pentru nesimetrii importante. Trebuie arătat că acest cuplu influențează negativ intrarea în sincronism a motorului. Acest cuplu se manifestă nu numai în regim asincron ci și în regim sincron, fapt care afectează caracteristicile de funcționare precum și încălzirea în regim de funcționare sincron.

Cuplurile armonicilor de ordin superior

Calculul parametrilor corespunzător armonicii se face în același fel cu cel dezvoltat în prezenta lucrare, avînd în vedere însă că alunecarea pentru armonica ν în funcție de alunecarea s, are expresia:

$$S_\nu = 1 - \nu\,(1-s)$$

unde ν poate fi pozitiv sau negativ, după cum armonica de ordinul ν este

de secvență directă sau de secvență inversă. De asemenea, numărul perechilor de poli este ν_p.

Trebuie atras atenția că la calculul diferiților coeficienți unde intervine unghiul φ, acesta se măsoară în grade electrice, deci acest unghi va diferi de la o armonică la alta.

Cuplurile asincrone ale armonicilor deordin superior nu influențează în mod sensibil curba cuplului asincronic deoarece în cazul motorului cu poli masivi armonicile de ordin superior sînt micșorate datorită efectului pelicular. Aceste cupluri deformează curba cuplului asincron al fundamentalei favorizînd producerea fenomenului de „tîrîre" a motorului, ceea ce face imposibilă intrarea în sincronism a motorului.

De asemenea, mai pot fi micșorate prin mărirea întrefierului, însă există dezavantajul că înrăutățește factorul de putere.

Expresiile date mai sus pentru cupluri prezintă interes îndeosebi pentru motorul sincron reactiv monofazat.

Concluzii

a) Calculul cuplurilor asincrone prezintă serioase dificultăți și de aceea se face în ipoteze simplificatoare, fapt care afectează exactitatea calculului.

b) Măsurile propuse asigură intrarea în sincronism a motorului, deși duc la micșorarea cuplului de pornire.

c) Pentru a asigura intrarea în sincronism și pentru o bună funcționare a motorului este necesar ca sistemul de tensiuni să fie simetric, variația lor în timp trebuind să fie sinusoidală.

d) Pentru motoarele sincrone reactive monofazate cuplurile asincrone au valori destul de importante și de aceea este necesar să fie calculate cu multă exactitate.

Catedra de mașini electrice

BIBLIOGRAFIE

[1] *R. H. Balian* — K rascetu massivnogo rotora. Electricestvo, nr. 6, 1955, pag. 25—32.

[2] *L. P. Neiman* — Poverhnostîi effect v feromagnitnîm telah, G.E.I. 1949.

[3] *G. V. Kononenko* — Issledovanie rabotî sinhrono reactivnîh dvigatelei. IVUZ Electromehanica, nr. 5, 1958, pag. 23—34.

[4] *C. H. Crouse* — A design method for polqphase reluctance synchronous motors. Transactions A.I.E.E. 1951, V. 70, pag. 957—962.

АСИНХРОННЫЕ МОМЕНТЫ РЕАКТИВНОГО СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ СО СПЛАТНЫМИ ПОЛЮСАМИ

(Краткое содержание)

В работе изучаются асинхронные моменты реактивного синхронного двигателя со сплотными полюсами вызываемые первыми гармоническими прямого и обратного магнитного поля а также и гармоническими высшего порядке указываются выражения для расчёта параметров ротора.

THE ASYNCHRONOUS TORQUES OF THE RELUCTANCE SYNCHRONOUS MOTOR WITH MASSIVE POLES

(Summary)

The paper studies the asynchronous torques of the reluctance synchronous motor with massive poles produced by the fundamental wave of direct and inverse sequence as well as by the harmonics of superior orders.

Attention is paid to the calculus of the rotor parameters.

LES COUPLES ASYNCHRONES DU MOTEUR SYNCHRON RÉACTIVE À POLES SAILLANTS

(Résumé)

Dans le present article l;auteur étudie les couples asynchrones du moteur synchron réactive a poles saillants, couples crées par l'onde fondamentale de séquence directe et inverse ainsi que par les harmoniques d'ordre supérieur.

L'auteur accorde l'attention nécessaire au calcul des paramètres rotoriques.

DIE ASYNCHRONEN DREHMOMENTE DER REAKTIONSSYNCHRONMOTOREN MIT MASSIVEN POLEN

(Zusammenfassung)

In vorliengendem Artikel werden die von der Grundwelle direkter und entgegengesetzter Sequenz wie auch von den Harmonischen höherer Ordnung hervorgerufenen Drehmomente untersucht.

Es wird die nötige Aufmerksamkeit der Berechnung der Rotor — Parameter geschenkt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 1

ELECTRONICĂ

PROBLEME ȘI ASPECTE ALE TEOREMEI SONDAJELOR

CRISTOFOR VASILIU

Teorema sondajelor, formulată de Kotelnikov încă din 1933, și reluată, în alte forme, de D. Gabor [1] și C. E. Shannon [2], este importantă în teoria comunicațiilor atît din punct de vedere teoretic cît și practic. Teoretic, deoarece ea reduce semnalele continue cu spectru limitat, la semnale discrete. Acest lucru permite să se definească capacitatea unui canal continuu [2]. Practic, deoarece ea stă la baza sistemelor mai noi de comunicație, acelea realizate prin modulația impulsurilor (modulația în poziție, prin cod, modulația delta, etc.).

Teorema a suscitat discuții cu privire la unele aspecte teoretice ale ei [3], [4], sau cu privire la aplicarea ei la aproximarea unei porțiuni dintr-un semnal dat [5]. Formulată mai întîi pentru cazul semnalelor cu spectrul limitat între O și F și sondării uniforme, ea a fost extinsă apoi la cazul semnalelor cu spectrul cuprins între f_0 și f_0+F, [6], [7], pentru mai multe mărimi măsurate în punctele de sondare [8] sau pentru sondarea neuniformă [9], [10]. S-a ajuns astfel la situația să se simtă nevoia unei teorii generalizate a sondajelor care să acopere toate situațiile ce se pot întîlni și care să poată, pe lîngă aceasta, cuprinde și cazul practic cînd semnalul nu este strict limitat în spectru [10].

În cele ce urmează se tratează în mod unitar aceste probleme, prezentîndu-se și alte aspecte ale teoremei care pot interesa tehnica telecomunicațiilor.

1. Semnale cu spectrul de frecvențe cuprins între O și F

Fie funcția reală $g(t)$ cu spectrul limitat la frecvența F, adică

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| g(t) e^{-j2\pi ft}\, dt, \tag{1}$$

cu

$$G(f) = 0 \text{ pentru } |f| > F, \tag{2}$$

și deci

$$g(t) = \int_{-F}^{+F} G(f)\, e^{j2\pi ft}\, df. \tag{3}$$

Teorema sondajelor afirmă că funcția $g(t)$ astfel definită este complet determinată numai de valorile ei $g(n\tau)$, (fig. 1) numite sondaje sau valori de analiză, la momente separate cu

$$\tau = \frac{1}{2F} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

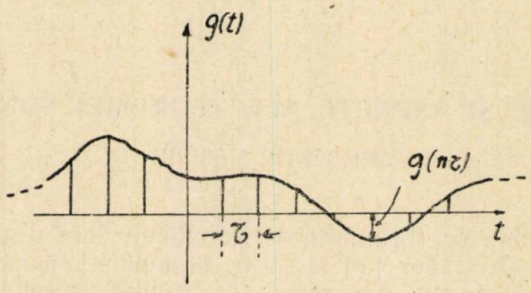


Fig. 1

Într-adevăr, să considerăm funcția periodică

$$G_p(f) = \sum_m G(f - 2mF),$$

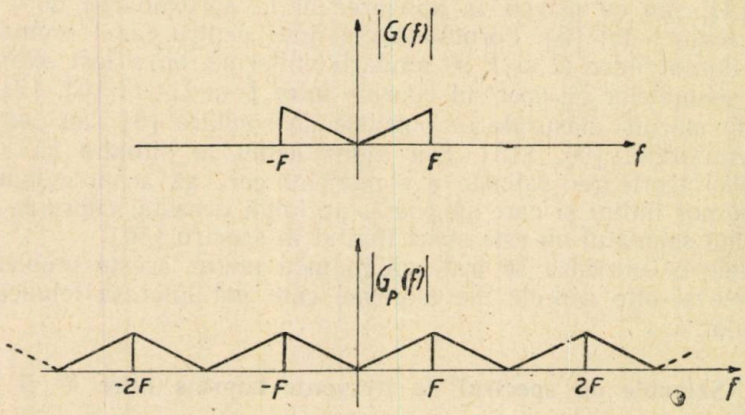


Fig. 2

cu perioada $2F$ (fig. 2). Ea se poate dezvolta în serie Fourier,

$$G_p(f) = \sum_n b_n e^{-j2\pi n\tau f}. \tag{5}$$

cu

$$b_n = \tau \int_{-F}^{+F} G(f)\, e^{j2\pi n\tau f}\, df = \tau \cdot g(n\tau). \tag{6}$$

Prin urmare valorile de analiză $g(n\,\tau)$ determină complet pe $G_p(f)$ prin (5), deci și pe $G(f)$, iar aceasta determină pe $g(t)$ prin (3):

$$g(t) = \int_{-F}^{+F} G_p(f) \cdot e^{j2\pi tf}\, df = \int_{-F}^{+F} e^{j2\pi tf} \cdot \tau \sum_n g(n\,\tau)\, e^{-j2\pi n\tau f}\, df =$$

$$= \tau \sum_n g(n\,\tau) \int_{-F}^{+F} e^{j2\pi (t-n\tau) f} \cdot df. \tag{7}$$

Integrînd obținem

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\,\tau)\, \frac{\sin 2\pi F(t - n\tau)}{2\pi F(t - n\tau)}. \tag{8}$$

Relația (8) reprezintă teorema sondajelor obișnuit formulată. Pentru a transmite semnalul $g(t)$ pe o cale de telecomunicație este deci suficient să transmitem, *într-un mod oarecare*, valorile de analiză $g(n\,\tau)$, iar la recepție să reconstituim semnalul în felul arătat de (8).

Să vedem cum se poate face practic această reconstrucție.

Funcția spectrală $G_p(f)$ are drept transformată Fourier semnalul $g_p(t)$ dat de:

$$g_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_p(f) \cdot e^{j2\pi tf}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi tf} \cdot \sum_n b_n\, e^{-j2\pi n\tau f}\, df =$$

$$= \sum_n \tau \cdot g(n\,\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (n\tau - t) f}\, df.$$

Efectuînd integrarea, se obține

$$g_p(t) = \sum_n \tau \cdot g(n\,\tau) \cdot \delta(n\tau - t).$$

Se vede că $g_p(t)$ reprezintă un șir de impulsuri Dirac de integrală $\tau \cdot g(n\,\tau)$ succedîndu-se la intervale egale cu τ. Dar, după cum arată (7), $g(t)$ se obține din $g_p(t)$ prin limitarea spectrului la intervalul $|f| \leqslant F$. Prin urmare, pentru a reconstitui semnalul $g(t)$ din valorile lui de analiză, este suficient să generăm o succesiune de impulsuri de integrală proporțională cu $g(n\,\tau)$, distanțate cu τ și să le trecem printr-un filtru ideal trece jos cu frecvența de tăiere F.

Sondarea a fost astfel făcută încît punctul $t=0$ constituie un moment de sondare. Aceasta nu-i însă obligatoriu. Ea poate începe oriunde, singura condiție fiind aceea ca punctele de sondare să se succeadă la intervale egale cu Într-adevăr, dacă repetăm raționamentele de mai sus asupra funcției $g(t+t_0)$, cu spectrul $G(f) \cdot e^{j2\pi ft_0}$, găsim:

$$g(t + t_0) = \sum_n g(n\tau + t_0)\, \frac{\sin 2\pi F(t - n\tau)}{2\pi F(t - n\tau)},$$

sau, cu $t'=t+t_0$, și apoi $t'=t$,

$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\tau+t_0)\frac{\sin 2\pi F(t-t_0-n\tau)}{2\pi F(t-t_0-n\tau)}. \qquad (8')$$

Din relația (8') se vede că se pot decala punctele de sondare cu o cantitate t_0 arbitrară, fără ca aceasta să schimbe funcția $g(t)$ obținută.

Teorema astfel enunțată nu comportă nici un fel de aproximație. Există o funcție și numai una al cărei spectru este limitat la F și care are valorile date $g(n\tau)$ la punctele de sondaj separate cu $\tau=\frac{1}{2F}$.

Să reluăm relația (8) scrisă astfel

$$g(t)=\sum_n a_n\cdot u_n(t),$$

cu

$$a_n=g(n\tau) \text{ și } u_n(t)=u(t-n\tau)=\frac{\sin 2\pi F(t-n\tau)}{2\pi F(t-n\tau)}. \qquad (11)$$

Funcțiile $u_n(t)$ se bucură de următoarele proprietăți:

a. — $u_n(t)$ se obține din impulsul de integrală τ apărînd în momentul $t=n\tau$ prin trecerea lui printr-un filtru ideal trece jos cu frecvența de tăiere. F. Aceasta rezultă din însuși modul de formare a lui

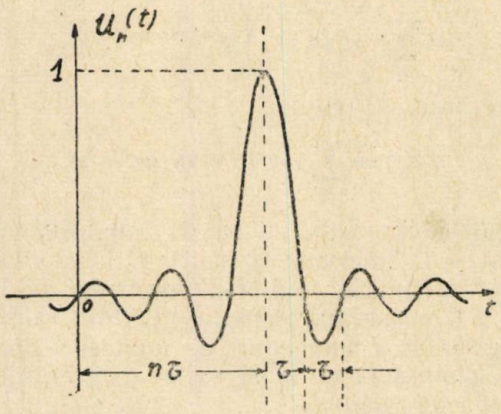


Fig. 3

$g(t)$ din $g_p(t)$ (relația (7)). Prin urmare $u_n(t)$ are spectrul de amplitudini $|u_n(f)|$ constant și egal cu $\tau=1/2F$ pentru $|f|\leqslant F$ și nul în rest, iar spectrul de faze $\varphi(f)=-2\pi n\tau f$, adică

$$u_n(f)=\tau[\gamma(f+F)-\gamma(f-F)]\cdot e^{-j2\pi n\tau f}, \qquad (12)$$

$\gamma(f)$ fiind funcția treaptă unitate.

b. — $u_n(t)=1$ pentru $t=n\cdot\tau$ și $u_n(t)=0$ pentru $t=k\tau$, cu k întreg și diferit de n (fig. 3). Așadar, la formarea lui $g(t)$, în punctele $t=n\tau$ contribuie respectiv numai pulsul $u_n(t)$ iar în celelalte puncte t toate pulsurile își aduc contribuția, cu atît mai redusă cu cît $k\tau$ diferă mai mult de t.

c. — Șirul de funcții $u_n(t)$ sînt ortogonale pe intervalul $-\infty$, $+\infty$, adică

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_k(t)\cdot u_n(t)\,dt=0 \text{ pentru } k\neq n. \tag{13}$$

Întrucît teorema arată că orice funcție reală $g(t)$, limitată în spectru la F, se poate pune sub forma (8), înseamnă că șirul infinit de funcții $u_n(t)$ constituie un sistem complet de funcții ortogonale pentru ansamblul funcțiilor reale și cu spectrul limitat la F. Relația (8) reprezintă atunci dezvoltarea lui $g(t)$ în serie Fourier relativă la acest sistem [11]. Această dezvoltare permite ca integralele să fie înlocuite prin sume, ceea ce poate simplifica mult calculele. De exemplu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt=\tau\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\tau), \text{ sau } \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt=\tau\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g^2(n\tau).$$

Această simplificare se și folosește pentru calculul distorsiunilor liniare, la studiul regimului tranzitoriu etc.

Așadar, valorile de analiză $g(n\tau)$ determină complet funcția $g(t)$, iar relația (8) permite reconstrucția ei. Această relație poate fi privită ca o formulă de interpolare exactă a lui $g(t)$. În legătură cu această interpolare ne poate interesa practic dacă intervalul de sondare θ este neapărat necesar egal cu $\tau=1/2F$ și dacă „funcția de sondare" $s(t)$ este neapărat necesar egală cu $u(t)$. Cu alte cuvinte, punînd

$$h(t)=\sum_n g(n\cdot\theta)\cdot s(t-n\theta) \tag{14}$$

ne interesează la ce restricții trebuie supus θ și $s(t)$ pentru ca să avem $h(t)=g(t)$. Răspunsul poate fi dat ușor dacă vom cunoaște funcția spectrală $H(f)$ a lui $h(t)$. Să punem $h(t)$ sub altă formă, și anume

$$h(t)=\sum_n\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot s(t-x)\cdot\delta(x-n\theta)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot s(t-x)\left[\sum_n\delta(x-n\theta)\right]dx.$$

Însă $\sum_n \delta(x-n\theta)$ este o funcție periodică cu perioada θ și dezvoltarea ei în serie Fourier ne dă:

$$\sum_n\delta(x-n\theta)=\sum_n\frac{1}{\theta}e^{j2\pi\cdot\frac{n}{\theta}x}.$$

Înlocuind în $h(t)$ avem

$$h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot s(t-x)\cdot\theta^{-1}\cdot\sum_n e^{j2\pi\frac{n}{\theta}x}\,dx=$$

$$=\theta^{-1}\sum_n\int_{-\infty}^{+\infty} s(t-x)\cdot g(x)\,e^{j2\pi\frac{n}{\theta}x}\,dx.$$

Deoarece transformata Fourier a funcției $g(x)\,e^{j2\pi\frac{n}{\theta}}$ este $G\left(f-\frac{n}{\theta}\right)$ și dacă o notăm pe aceea a funcției $s(x)$ sau $S(f)$, teorema înfășurării (convoluției) ne dă

$$H(f)=\frac{1}{\theta}S_{(f)}\sum_n G\left(f-\frac{n}{\theta}\right). \tag{15}$$

Egalitatea $h(t)=g(t)$ cere

$$H(f)=G(f)=\frac{1}{\theta}S_{(f)}\sum_n G\left(f-\frac{n}{\theta}\right). \tag{16}$$

$S(f)$ trebuie astfel ales ca (16) să aibă loc pentru orice funcție $g(t)$ cu spectrul limitat la F. Din figura 4 se vede imediat că e necesar ca să avem:

$$\theta\leqslant\tau=1/2F. \tag{17}$$

Dacă $\theta>\tau$ nu poate fi găsită o aceeași funcție spectrală $S(f)$ convenabilă pentru orice funcție $G(f)$ (cu $G(f)=0$ pentru $|f|>F$), deoarece repetarea periodică a lui $G(f)$ duce la suprapunere.

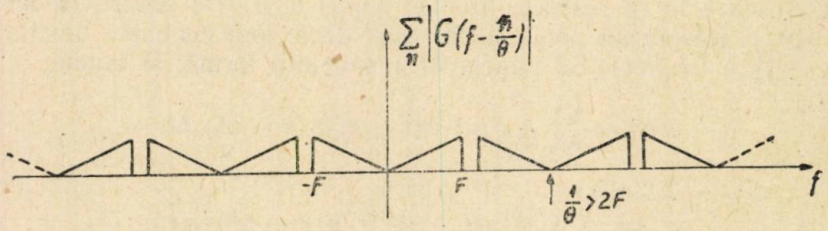


Fig. 4

Prin urmare, restricția la care trebuie supus intervalul de sondare θ este dată de inegalitatea (17). Condițiile ce trebuie impuse funcției de sondare $s(t)$ vor depinde de valoarea aleasă pentru θ. Să luăm cîteva cazuri caracteristice.

a) $\theta = \tau = 1/2F$. Din (16) și fig. 4 rezultă că e necesar ca

$$S_{(f)} = \begin{cases} \tau = \dfrac{1}{2F} & \text{pentru } |f| \leqslant F, \\ 0 & \text{pentru } |f| > F. \end{cases} \tag{18}$$

și deci $s(t) = u(t) = \dfrac{\sin 2\pi F t}{2\pi F t}$ adică ajungem la relația (8). Deoarece θ are valoarea maximă posibilă, numărul de puncte de sondare este minim și egal cu $2F$ pe secundă. Valorile de analiză sînt liniar independente, ceea ce înseamnă că orice șir de numere a_n va defini o funcție $g(t)$ unică ce are spectrul limitat la F și pentru care $g(n\tau) = a_n$.

b) $\theta < \tau$. Acum e necesar să avem

$$\begin{aligned} &S_{(f)} = \theta \text{ pentru } |f| \leqslant F, \\ &S_{(f)} = 0 \text{ pentru } \left(\frac{n}{\theta} - F\right) \leqslant |f| \leqslant \left(\frac{n}{\theta} + F\right). \end{aligned} \tag{19}$$

În restul intervalului, unde $\sum_n G\left(f - \dfrac{n}{\theta}\right) = 0$, $S_{(f)}$ este arbitrar. Prin urmare, în acest caz există o mare libertate în alegerea lui $S(f)$ și deci a lui $s(t)$. Una din aceste alegeri posibile poate fi:

$$S_{(f)} = \begin{cases} \theta \text{ pentru } |f| \leqslant \dfrac{1}{2\theta}, \\ 0 \text{ pentru } |f| > \dfrac{1}{2\theta}, \end{cases} \tag{20}$$

și deci

$$s(t) = \frac{\sin 2\pi \dfrac{1}{2\theta} t}{2\pi \dfrac{1}{2\theta} t}. \tag{21}$$

Aceasta echivalează cu includerea cazului în care $G(f) = 0$ pentru $|f| > F$ în acela, mai general, pentru care $G(f) = 0$ pentru $|f| > \dfrac{1}{2\theta}$.

O altă alegere simplă ar fi:

$$S_{(f)} = \begin{cases} \theta \text{ pentru } |f| \leqslant F, \\ 0 \text{ pentru } |f| > F, \end{cases} \tag{22}$$

și deci

$$s(t) = \frac{\theta}{\tau} \times \frac{\sin 2\pi F t}{2\pi F t}, \tag{23}$$

și

$$g(t) = \frac{\theta}{\tau} \sum_n g(n\theta) \frac{\sin 2\pi F(t - n\theta)}{2\pi F(t - n\theta)}. \qquad (24)$$

Acum însă $s_n(t) \neq 0$ pentru $t = k \cdot \theta$.

Pentru cazul b), unde $\theta < \tau$ valorile de sondaj $g(n \cdot \theta)$ nu mai sînt algebric independente, deoarece numărul de puncte de sondare este mai mare decît cel necesar. De aceea un șir diferit de numere a_n nu va duce, în mod necesar, la o funcție $g(t)$ diferită.

Am văzut că semnalul $g(t)$ se poate reconstrui din valorile de sondaj $g(n\ \theta)$ prin generarea unor impulsuri de integrală proporțională cu aceste valori și trecerea lor printr-un filtru ideal trece jos. Deoarece filtrele reale au caracteristici diferite de cea a filtrului ideal, practic va fi necesară să luăm $\theta < \tau$ ceea ce lasă funcției $S(f)$ (caracteristica de transfer a filtrului) o zonă în care poate fi arbitrară și care va corespunde la banda de tranziție de la zona de trecere la cea de oprire. Acest lucru cere, pe de o parte, un număr de puncte de sondare mai mare ca cel teoretic necesar, iar pe de altă parte o bandă de frecvențe mai mare necesară a fi alocată căii de comunicație.

2. Semnale cu spectrul de frecvențe cuprins între f_0 și f_0+F

Să presupunem acum că semnalul $g(t)$ are spectrul $G(f)$ limitat la banda f_0, f_0+F, ca în cazul unei căi telefonice de curenți purtători spre exemplu. Și în acest caz funcția $g(t)$ este complet determinată, teoretic, de $2F$ valori de analiză pe secundă. Acest lucru rezultă din aceea că putem presupune semnalul reprezentat de $g(t)$ ca fiind obținut din semnalul de joasă frecvență $g'(t)$, cu spectrul de frecvențe cuprins între O și F, printr-o translație de frecvențe cu f_0 (modulație cu bandă laterală unică). Întrucît $g'(t)$ este univoc determinat de $2F$ valori de analiză pe secundă, $g(t)$ va fi determinat de același număr de valori. Practic ar trebui deci să translatăm semnalul $g(t)$ în zona de frecvențe O, F, să-l sondăm la intervale separate cu $\tau = \frac{1}{2F}$, să transmitem într-un mod oarecare valorile de analiză $g'(n\ \tau)$ la recepție, să reconstituim semnalul $g'(t)$ în modul arătat mai sus și apoi să reducem semnalul în domeniul de frecvențe inițial.

Sondare de ordinul 1

Se poate însă ca în anumite cazuri să nu dorim să facem această translație de frecvență. Se pune atunci întrebarea cîte valori de analiză obținute prin sondarea directă a lui $g(t)$ la intervale regulate (sondare de ordinul 1) sînt necesare pentru a defini complet semnalul dat și cum

putem reface funcția $g(t)$ din valorile de analiză astfel obținute. Cu alte cuvinte, scriind, ca și mai sus

$$h(t) = \sum_n g(n\theta) \cdot s(t - n\theta), \tag{14}$$

ne întrebăm ce condiții trebuie impuse intervalului de sondare θ și funcției de sondare $s(t)$ pentru ca să avem $h(t) = g(t)$.

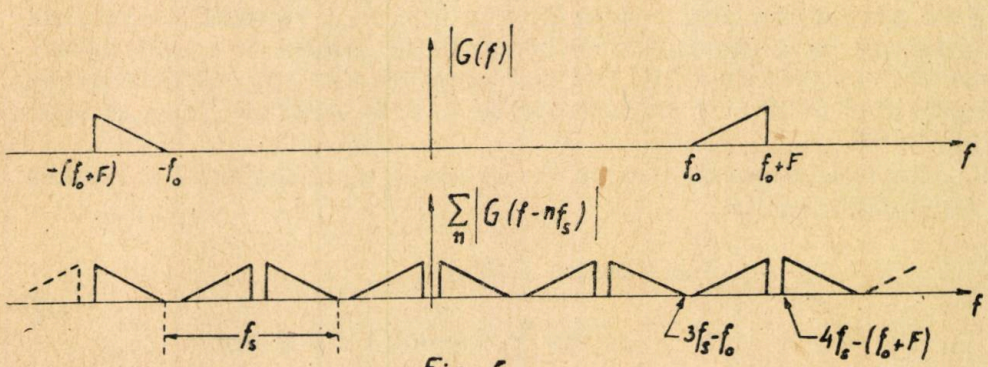


Fig 5

Fie $f_s = \frac{1}{\theta}$ frecvența de sondare. Relația (15) se poate scrie:

$$H(f) = f_s \cdot S_{(f)} \sum_n G(f - n f_s). \tag{15'}$$

Condiția (16) impune folosirea numai a acelor f_s care nu dau suprapunerea spectrelor în funcția periodică $n\,G(f - nf_s)$ în zona de frecvențe $_0 \leqslant |f| \leqslant f_0 + F$. Din figura 5 se vede direct la ce restricții trebuie supus $_s$ și anume: $(mf_s - f_0) \leqslant f_0$ și, simultan, $[(m+1)f_s - (f_0 + F)] \geqslant f_0 + F$, adică

$$\frac{2(f_0 + F)}{m+1} \leqslant f_s \leqslant \frac{2f_0}{m} \text{ (m întreg și pozitiv).} \tag{25}$$

Pentru ca (25) să aibă soluții e necesar ca

$$\frac{2(f_0 + F)}{m+1} \leqslant \frac{2f_0}{m}. \tag{26}$$

Dacă punem $\frac{f_0}{F} = M + \delta$, cu M întreg și $0 \leqslant \delta < 1$, atunci (26) devine

$$\frac{M + 1 + \delta}{m+1} \leqslant \frac{m + \delta}{m}, \tag{27}$$

inegalitate satisfăcută numai dacă $m \leqslant M$.

Rezultă deci că există M benzi permise ale frecvenței f_s de sondare, benzi obținute prin înlocuirea celor M valori posibile ale lui m în relația

(25). Cea mai mică frecvență de sondare $_{s\ min}$ va fi dată de limita inferioară a inegalității (25) pentru m cel mai mare:

$$f_{s\,min} = \frac{2(f_0 + F)}{M+1} = \frac{2F(m+\delta+1)}{M+1} \geqslant 2F. \tag{28}$$

Această frcvență minimă de sondare este mai mare, în general, decît numărul minim teoretic $2F$ și devine egal cu acesta numai cînd $\delta = 0$, adică atunci cînd raportul între cea mai mică frecvență a semnalului și lățimea lui de bandă este un întreg. Ea se apropie de această valoare cu atît mai mult cu cît M este mai mare. Situația cea mai defavorabilă apare cînd $M=0$ și δ este aproape de 1, și în acest caz $f_{s\,min}$ se apropie de $4F$.

În ceea ce privește funcția de sondare $s(t)$, relația (15′) și condiția $H(f) = G(f)$ impun:

$$S_{(f)} = \begin{cases} \dfrac{1}{f_s} = \theta \text{ pentru } G(f) \neq 0, \\ 0 \qquad \text{pentru } \sum\limits_n G(f - nf_s) \neq 0 \text{ și } n \neq 0. \\ \text{arbitrar în restul intervalului} \end{cases} \tag{29}$$

Dacă luăm cazul cel mai simplu, și anume:

$$S_{(f)} = \begin{cases} \dfrac{1}{f_s} = \theta \text{ pentru } G(f) \neq 0, \\ 0 \qquad \text{în rest,} \end{cases}$$

atunci $s(t)$ devine:

$$s(t) = \theta \int_{-(f_0+F)}^{-f_0} e^{j2\pi ft}\, df + \theta \int_{f_0}^{f_0+F} e^{j2\pi ft}\, df.$$

Integrînd, obținem

$$s(t) = \frac{\theta}{\pi}[\sin 2\pi(f_0 + F)\, t - \sin 2\pi f_0\, t], \tag{31}$$

și

$$g(t) = \sum_n g(n\theta) \frac{\theta}{\pi(t - n\theta)} [\sin 2\pi(f_0 + F)\,(t - n\theta) - \sin 2\pi f_0 (t - n\theta)]. \tag{32}$$

Prin urmare, pentru a reconstitui semnalul $g(t)$ din valorile lui de analiză $g(n\ \theta)$, este suficient să generăm o succesiune de impulsuri de integrală proporțională cu $g(n\ \theta)$, la intervale egale cu θ și să le trecem printr-un filtru trece bandă ideal, cu banda de trecere cuprinsă între f_0 și $f_0 + F$.

În concluzie, sondarea de ordinul 1 permite reconstituirea exactă a semnalului $g(t)$ din valorile de analiză cu număr minim de puncte de sondare ($2F$ pe secundă), numai dacă $f_0 = MF$ și M este întreg. În celelalte cazuri sînt necesare mai multe puncte de sondare pe secundă (maximum $4F$) și valorile sondate nu sînt liniar independente.

Sondare de ordinul 2

Dacă sondarea de ordinul 1 nu duce, în general, la numărul minim de puncte de sondare pe secundă, putem folosi sondarea de ordinul 2, definită de relația

$$h(t) = \sum_n g(2n\tau) \cdot s_1(t - 2n\tau) + \sum_n g(2n\tau - t_0) \cdot s_2(t - 2n\tau + t_0). \quad (33)$$

Se vede că ea este formată din două sondări de ordinul 1 la intervale $2\tau = \frac{1}{F}$ și decalate între ele cu t_0. Vor trebui determinate funcțiile de sondare $s_1(t)$ și $s_2(t)$ și „faza" t_0 astfel ca să avem $h(t) = g(t)$.

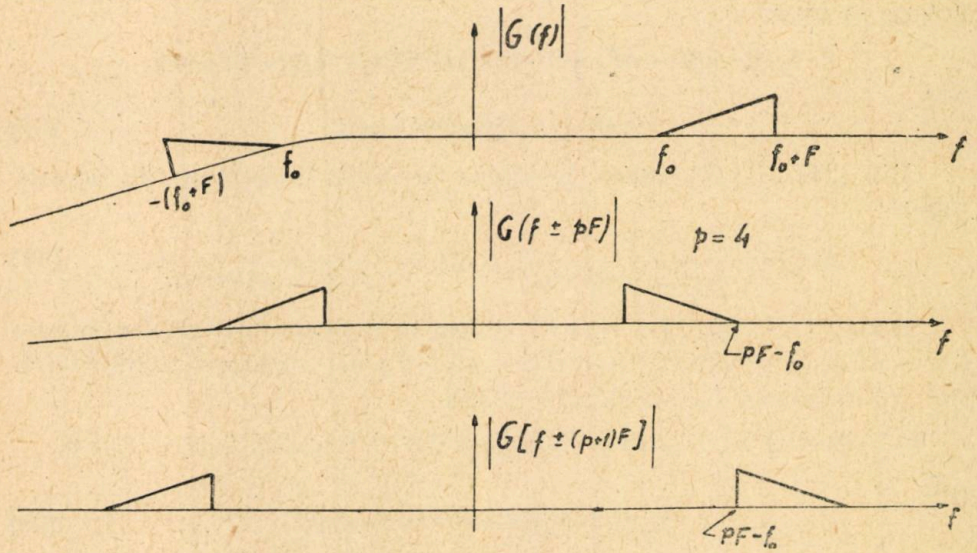


Fig. 6

Transformata Fourier $H(f)$ a lui $h(t)$ va fi, folosind rezultatul obținut în trecerea de la (14) la (15):

$$H(f) = F \cdot S_1(f) \cdot \sum_n G(f - nF) + F \cdot S_2(f) \cdot \sum_n e^{j2\pi nFt_0} G(f - nF). \quad (34)$$

Dacă reprezentăm pe $\sum_n G(f - nF)$, se vede că avem suprapunere în banda lui $G(f)$, adică pentru $f_0 \leqslant |f| \leqslant (f_0 + F)$. Fie $G(f \pm pF)$ și $G[f \pm (p+1)F]$ termenii din sumă ce se suprapun peste $G(f)$ (fig. 6).

Este evident că p este dat de relația:

$$\frac{2f_0}{F} = p - \delta, \text{ cu } p \text{ întreg și } 0 \leqslant \delta < 1. \tag{35}$$

Trebuie să alegem pe $S_1(f)$, și $S_2(f)$ și t_0 astfel ca termenii de suprapunere să se anuleze și în același timp să avem $H(f) = G(f)$. În zona de frecvențe în care $G(f) = 0$ luăm $S_1(f) = S_2(f) = 0$. Rămîne să precizăm pe $S_1(f)$ și $S_2(f)$ în zona unde $G(f) \neq 0$. În această zonă, pentru a reconstitui pe $G(f)$, e necesar ca $H(f) = G(f)$, adică

$$F \cdot S_1(f) \cdot G(f) + F \cdot S_2(f) \cdot G(f) = G(f),$$

sau

$$S_1(f) + S_2(f) = \frac{1}{F} = 2\tau. \tag{36}$$

Pentru $f_0 \leqslant f \leqslant (pF - f_0)$ (fig. 6) sîntem în regiunea frecvențelor în care $G(f - pF)$ și $e^{j2\pi pFt_0} \cdot G(f - pF)$ se suprapun peste $G(f)$. Aici trebuie să avem

$$F \cdot S_1(f) \cdot G(f - pF) + F \cdot S_2(f)\, e^{j2\pi pFt_0} \times G(f - pF) = 0,$$

sau

$$S_1(f) + S_2(f) \cdot e^{j2\pi pFt_0} = 0. \tag{37}$$

Din (36) și (37) putem determina pe $S_1(f)$ și $S_2(f)$ pentru această regiune

$$S_1(f) = \frac{1}{F(1 - e^{-j2\pi pFt_0})}; \quad S_2(f) = \frac{1}{F \cdot (1 - e^{+j2\pi pFt_0})}. \tag{38}$$

Pentru $(pF - f_0) \leqslant f \leqslant (f_0 + F)$ sîntem în regiunea frecvențelor în care $G(f - pF - F)$ și $e^{j2\pi(p+1)Ft_0} \times G(f - pF - F)$ se suprapun peste $G(f)$. Aici va trebui să fie satisfăcută relația:

$$F \cdot S_1(f) \cdot G(f - pF - F) + F \cdot S_2(f) \cdot e^{j2\pi(p+1)Ft_0} \times G(f - pF - F = 0,$$

sau

$$S_1(f) + S_2(f) \cdot e^{j2\pi(p+1)Ft_0} = 0, \tag{39}$$

Pentru această regiune relațiile (36) și (39) ne dau

$$S_1(f) = \frac{1}{F \cdot [1 - e^{-j2\pi(p+1)Ft_0}]}; \quad S_2(f) = \frac{1}{F \cdot [1 - e^{+j2\pi(p+1)Ft_0}]}. \tag{40}$$

A mai rămas regiunea frecvențelor negative, adică pentru $-(f_0 + F) \leqslant f \leqslant -f_0$, unde, pe baza simetriei, vom lua pe $S_1(f)$ și $S_2(f)$ ca mai sus, înlocuind pe p cu $-p$ și pe $p+1$ cu $-(p+1)$. (Ceea ce, de altfel, duce la relațiile necesare $S_1(f) = S_1^*(-f)$ și $S_2(f) = S_2^*(-f)$). Deoarece, așa cum rezultă din (38) și (40), $S_1(f) = S_2(-f)$, înseamnă că $s_1(t) = s_2(-t)$.

Dacă punem $s_1(t)=s(t)$ și luăm transformata Fourier a lui $S(f)$ definit ca mai sus, găsim:

$$s(t)=\frac{\cos[2\pi(f_0+F)\,t-(p+1)\,\pi F t_0]-\cos[2\pi(pF-f_0)\,t-(p+1)\,\pi F t_0]}{2\pi F t\cdot\sin(p+1)\,\pi F t_0}+$$

$$+\frac{\cos[2\pi(pF-f_0)\,t-p\pi F t_0]-\cos[2\pi f_0 t-p\pi\cdot F t_0]}{2\pi F t\sin p\pi F t_0}, \qquad (41)$$

și deci

$$g(t)=\sum_n g(2\pi\tau)\cdot s(t-2n\tau)+\sum_n g(2n\tau-t_0)\cdot s(2n\tau-t_0-t). \qquad (42)$$

Este de remarcat că t_0 poate fi oarecare, exceptînd valorile $\frac{n}{pF}$ și $\frac{n}{(p+1)F}$ (n întreg) care ar face pe $s(t)$ infinit. Pe de altă parte se vede că $s(o)=1$; $s(2n\tau)=0$ pentru $n\neq 0$; $s(2n\tau\pm t_0)=0$. Așadar (42) este o formulă de interpolare exactă, generală, depinzînd de un număr de valori de analiză minim, $2F$ pe secundă, algebric independente.

3. Semnale limitate și în timp și în frecvență

Semnalele cu care lucrăm în telecomunicații sînt de durată finită Dacă un asemenea semnal ar fi riguros limitat și în frecvență la F, atunci el ar fi complet determinat de cele $N=2FT$ valori de analiză, T fiind durata semnalului. Riguros vorbind însă, un semnal nu poate fi strict limitat și în timp și în frecvență. Într-adevăr, dacă asemenea lucru ar avea loc, atunci, conform teoremei sondajelor, el ar trebui să fie de forma:

$$g(t)=\sum_{n=1}^{N} g(n\tau)\frac{\sin 2\pi F(t-n\tau)}{2\pi F(t-n\tau)}=R(t)\cdot\sin 2\pi Ft, \qquad (43)$$

unde $R(t)$ este o fracție rațională în t. Dar o asemenea expresie nu poate fi de durată strict finită, după cum un semnal de durată finită nu poate fi strict limitat în frecvență. Acest rezultat poate fi privit și ca o consecință a dualității timp-frecvență: cu cît un semnal este mai bine localizat în timp, cu atît el este mai puțin localizat în frecvență și invers.

Totuși, din punct de vedere practic, $g(t)$ din (43) poate fi considerat ca limitat la intervalul de timp pentru care valorile lui se pot deosebi de zgomot, totdeauna prezent într-o cale de telecomunicații. Invers, dacă

semnalul este de durată finită, el nu are o bandă de frecvențe strict limitată, dar spectrul lui poate fi neglijat dincolo de o anumită frecvență, cînd amplitudinea acestui spectru este de ordinul de mărime al amplitudinii spectrului zgomotului. Cu asemenea aproximații avem de-a face totdeauna în tehnica telecomunicațiilor. Dacă dintr-un semnal teoretic, infinit ca durată și limitat în bandă, vom separa o porțiune de durată T și o vom netezi la capete spre zero, această porțiune va diferi de semnalul teoretic dat cu o eroare de ordinul 1/T, eroare ce poate fi făcută oricît de mică dorim, luînd T suficient de mare. Cu asemenea semnale limitate în timp se lucrează în practică.

Dacă semnalele folosite în practică sînt de durată finită, și deci nelimitate riguros în frecvență, ne poate atunci interesa în ce măsură va diferi acest semnal de cel ce se obține prin sondarea lui la intervale egale cu $\tau = 1/2F$, așa cum facem la modulația impulsurilor. Cu alte cuvinte, fie $G(f)$ spectrul unei funcții $g(t)$ oarecare, deci nerestrînsă la condiția de a fi limitată în frecvență, și $H(f)$ spectrul funcției $h(t)$ dată de relația

$$h(t) = \sum_n g(n\tau) \cdot u_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n\tau) \frac{\sin 2\pi F(t - n\tau)}{2\pi F(t - n\tau)}, \qquad (44)$$

cu $\tau = 1/2F$. Evident, $H(f)$ este limitat în frecvență la F. Ne întrebăm ce relație există între $H(f)$ și $G(f)$. Răspunsul îl avem în relația (15), deoarece la deducerea ei din egalitatea (14) nu s-a făcut nici o ipoteză restrictivă asupra spectrelor $G(f)$ sau $S(f)$. Prin urmare

$$H(f) = \frac{1}{\tau} \cdot U(f) \sum_n G\left(f - \frac{n}{\tau}\right), \qquad (45)$$

sau, ținînd cont de (12)

$$H(f) = [\tau(f + F) - \tau(f - F)] \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(f - 2nF). \qquad (46)$$

Operația efectuată de paranteza mare în (46) este aceea a unui filtru trece jos ideal cu frecvența de tăiere egală cu F. Adică $H(f)$ se obține prin decalarea lui $G(f)$ cu $2nF (n = 0; 1; 2 \ldots)$, sumarea spectrelor astfel decalate și limitarea acestei sume la banda $|f| \leqslant F$. În consecință, la formarea lui $H(f)$ contribuie întreg spectrul $G(f)$. Eroarea pe care o facem aproximînd pe $g(t)$ cu $h(t)$ este cu atît mai mică cu cît spectrul $G(f)$ dincolo de frecvența F are amplitudinea mai mică în comparație cu cea sub F. Dacă $G(f) = 0$ pentru $|f| > F$, $h(t) = g(t)$.

În toate cele spuse pînă aici, valorile de analiză a_n constituiau sondaje (valori ale semnalului) în puncte echidistante (sondare uniformă).

Acest lucru nu este însă obligatoriu [2], [9]. Ansamblul de valori a_n de număr cel puțin egal cu $2F$ pe secundă, în medie, pot fi luate la intervale neregulate, sau pot constitui mai multe cantități măsurate în punctele de sondare (cum ar fi valoarea funcției și prima ei derivată).

Însă reconstrucția semnalului dat din valorile de analiză nu mai este din punct de vedere practic, atît de simplă ca în cazul sondării uniforme, de aceea aceste sondări neuniforme au mai mult un interes teoretic.

Se înțelege că teorema are și un aspect dual, adică dacă un semnal este limitat în timp între momentele $-T$ și T, atunci spectrul $G(f)$ al acestui semnal este complet determinat de valorile $G(n.f_0)$ la intervale de frecvență $f_0 = \frac{1}{2T}$. Un raționament analog cu cel făcut în legătură cu relațiile (4)—(8) ne duce la descompunerea următoare

$$G(f) = G(nf_0) \frac{\sin 2\pi T(f - nf_0)}{2\pi T(f - nf_0)}. \tag{47}$$

Din cele arătate se poate vedea că modul de descompunere a semnalelor dată de teorema sondajelor are multiple aplicații practice. S-au mai propus și alte descompuneri, alegîndu-se funcțiile elementare astfel ca ele să fie practic limitate și în timp și în frecvență [5], [15]. Aceste descompuneri caută să răspundă anumitor nevoi ridicate de practică. Pe măsură ce necesitățile tehnice o vor cere, se vor găsi și alte modalități de reprezentare a semnalelor, adecvate acestor necesități.

Catedra de „Telefonie-Telegrafie"

BIBLIOGRAFIE

[1] *D. Gabor:* „Theory of Information", Journ. Inst. Elect. Eng., Pt. III, vol. 93 (1946), p. 429.

[2] *C. E. Shannon:* „Comunication in the Presence of Naise", Proc. IRE, ian. 1949.

[3] *I. A. Ville:* „Sur le prolongement des signaux à spectre borné", Cables et Transmission, ian, 1956, p. 44.

[4] *I. A. Ville* și *I. Bouzitat:* „Sur un type de signaux pratiquement bornés en temps et en fréquece", Cables et Transm. oct. 1955, p. 293.

[5] *R. M. Lerner:* „The Representation of Signals", IRE Trans. CT, mai 1959, vol. CT-6, supliment special, p. 197.

[6] *A. Kohlenberg:* „Exact Interpolation of Band-limited Functions", Journal of Applied Phys., 1953, vol. 24, p. 1432.

[7] *A. R. Billings:* „Sampling of Signals Without D. C. Components", Electronic Radio Engineer, febr. 1959, vol. 36, p. 70.

[8] *D. L. Jagerman* and *L. Fogel*: „Some General Aspects of the Sampling Theorem", IRE Trans. Inf. T. vol. I., T-2, dec. 1956, p. 139.

[9] *I. L. Yen:* On the Non-uniform Sampling of Bandwidth-limited Signals", IRE Trans. C.T., vol. C.T.-3, dec. 1956, p. 251.

[10] *F. E. Bond* and *C. R. Cahn:* „On Sampling the Zeros of Bandwidth Limited Signals, IRE Trans, Information Theory, vol. I.T-4, sept. 1958, p. 110.

[11] *V. I. Smirnov:* „Curs de matematici superioare", traducere din limba rusă, vol. II, pag. 451.

[12] *I. C. R. Licklider* and *I. Pollack:* „Effects of differentiation, integration and peak clipping upon the intelligibility of speach", I. Acust. Soc. Amer., ianuarie 1958, p. 42.

[13] *S. Goldman:* „Teoriia informații", Izd. Inostranoi literaturî, Moscova, 1957.

[14] *A. A. Harkevici:* „Ocerki obșcei teorii sviazi", Moscova, 1955.

[15] *I. A. Ville:* „Décomposition d'un signal en composantes en cosinusoïde surélevée". Cables et Transm., oct. 1952, p. 301.

ЗАДАЧИ И СООБРАЖЕНИЯ О ТЕОРЕМЕ ОТСЧЁТОВ

(краткое содержание)

В виду важности теоремы отсчётов для теории и практики дальней связи, в настоящей работе излагаются с единной точки зрения многочисленные задачи поставленные этой теоремой и разбросанные в разных литературных источниках а также представляются и другие точки зрения на теорему, которые могут интересоват технику дальней связи.

PROBLEMS AND ASPECTS OF THE SAMPLING THEOREM

(Summary)

Knowing the importance of the sampling theorem for both the communication theory and its applications, the present paper gives a unitary exposition of the various problems concerning this theorem, problems that are dispersed in the speciality literature; it presents at the same time other aspects of this theorem that may be of interest for the telecommunication technique.

PROBLEMES ET ASPECTS DU THÉORÈME DE L'ÉCHANTILLONNAGE

(Résumé)

Etant donnée l'importance du théorème de l'échantillonnage pour la théorie et la pratique des télécommunications, dans le présent ouvrage on fait un exposé unitaire des multiples problèmes soulevés par ce théorème, problemes qui sont dispersés dans la littérature de spécialité, en présentant en même temps aussi d'autres aspects du théorème qui peuvent intéresser la technique des télécommunications.

FRAGEN UND ASPEKTE DES ABTASTTHEOREMS

(Zusammenfassung)

Die Wichtigkeit des Abtasttheorems für die Theorie und Praxis des Fernmeldewesens berücksichtigend, wird in vorliegendem Artikel eine einheitliche Beahndlung der vielfachen, von diesem Theorem aufgeworfenen Fragen. die in der Fachliteratur verstreut sind, gemacht. Gleichzeitig werden auch andere Aspekte des Theorems dargelegt, die für die Technik des Fernmeldewesens interessant sein können.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 1

ÎMBUNĂTĂȚIREA FUNCȚIONĂRII ANGRENAJULUI DE TRACȚIUNE CU ROȚI DINȚATE A BOGHIURILOR LOCOMOTIVEI DIESEL ELECTRICE C.F.R. 060 DA DE CONSTRUCȚIE C. M. REȘIȚA *

I. ZĂGĂNESCU, I. BÎRSAN

Transmisiile cu roți dințate la locomotivele diesel electrice ce se construiesc în țară au prezentat uzuri premature la dantura roților dințate, precum și exfolieri de material.

La prima vedere aceste neajunsuri au părut că se datoresc exclusiv unor defecte de material, precum și de tratamente termice. Faptul însă că aceste defecte apar cu regularitate în aceleași locuri, conduce la presupunerea că defectele de material și tratament termic nu pot fi singurele cauze care produc aceste uzuri anormale.

Cercetînd mai îndeaproape condițiile de funcționare ale angrenajului se constată că aceste uzuri se datoresc mai degrabă unor factori constructivi și deci tocmai datorită acestui fapt există posibilitatea micșorării uzurilor prin îmbunătățirea construcției întregului ansamblu de tracțiune motor - osie.

Transmisiile cu roți dințate moderne ale locomotivelor diesel-electrice lucrează în condiții mult mai grele în comparație cu celelalte tipuri de transmisii cu roți dințate din industrie, prin faptul că eforturile pe dinți sînt cu mult mai mari.

Deși pentru mărirea durabilității și rezistenței la uzură a angrenajului cu roți dințate, pinionul și roata dințată mare de pe osie se confecționează din oțeluri aliate speciale cu rezistență mare, cu călirea sau cimentarea ulterioară a suprafețelor dinților, totuși, ca urmare a forțelor mari din exploatare în dinții pinionului și a roții, apar crăpături care conduc la distrugerea transmisiei. O dată cu ruperea dinților, se produce blocarea osiei montate, care provoacă deteriorarea motoarelor electrice de tracțiune și formarea locurilor plane în bandaje. Prin aceasta se măresc considerabil cheltuielile de reparații și întreținere, precum și imobilizarea locomotivei, astfel încît avantajele mari economice pe care le prezintă tracțiunea cu locomotive diesel, unde parcursul mediu zilnic se mărește de 3—4 ori față de cel al locomotivei cu abur, apare mult micșorat.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 7—8 aprilie 1962.

De aici se vede că importanța problemei măririi duratei de funcționare a transmisiei cu roți dințate, depășesc cadrul obișnuit al prelungirii vieții unui agregat oarecare, ea constituind o problemă capitală pentru însăși tracțiunea în sine.

Așa se explică numărul enorm de mare de cercetători, constructori, tehnologi, lucrători din uzine și transporturi, care se ocupă de această problemă.

Una din condițiile principale care determină viața transmisiei cu roți dințate o constituie realizarea unui contact longitudinal maxim al dinților la funcționarea sub sarcină.

De aici rezultă faptul că o ajustare exactă a transmisiei cu roți dințate are o mare influență asupra duratei de funcționare a acesteia. Din contră, micșorarea contactului longitudinal al dinților, adică a lungimii de lucru a dintelui, duce la sporirea considerabilă a încărcării specifice pe dinte, la uzura lui prematură și la formarea crăpăturilor progresive de oboseală.

Neparalelismul dinților este diferit, după cum motorul electric este plasat înainte sau înapoia osiei motoare, din cauză să forțele pe dinții roții dințate mari transmise de pinion sînt de sensuri opuse, după așezarea relativă a motorului față de osie.

Datorită neparalelismului dinților, tensiunea din dinți în partea de contact dinspre motorul electric crește cu 30—40%, iar solicitarea la încovoiere la rădăcina dintelui crește de 1,5—2 ori.

Statisticile referitoare la uzura dinților în exploatare și apariția crăpăturilor de obicei în partea dinspre motorul electric de tracțiune confirmă întru totul repartiția inegală a sarcinii pe lungimea dintelui, arătată mai sus.

Dat fiind că apariția uzurii premature și a crăpăturilor este condiționată de mărimea neparalelismului dinților, ne vom ocupa în primul rînd de determinarea acestuia și apoi de a găsi mijloacele constructive pentru perfecționarea angrenajului cu roți dințate de la boghiuri.

1. Contactul longitudinal incomplet al dinților angrenajului de tracțiune cu roți dințate al boghiurilor.

În exploatare se observă că, contactul longitudinal al dinților roții dințate de pe osia motoare și al pinionului motorului electric de tracțiune nu se face pe toată lungimea dinților datorită încovoierilor axului motorului electric și osiei motoare provocate de:

a) Sarcinile statice produse de greutatea rotorului P_{rot} și sarcinile pe fusurile osiei locomotivei P_0.

b) Transmiterea cuplului motor la osie pentru obținerea forței de tracțiune a locomotivei.

c) Sarcinile dinamice datorită interacțiunii dintre roți și șine și inexactității uzinării dinților roților.

d) Abaterile de montaj a motoarelor electrice față de osiile montate.

e) Jocurile din lagărele de pe osie ale motorului electric și din lagărele axului motorului în carcasă.

În cele de mai jos valoarea neparalelismului dinților pinionului și roții dințate, s-a calculat prin însumarea unghiurilor de înclinare a dinților pinionului și roții dințate față de planul coroanei șinelor (fig. 1).

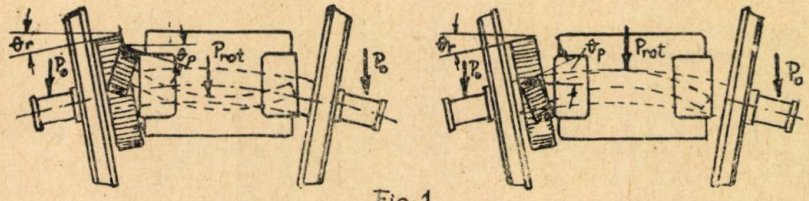


Fig. 1

a. Mersul cu motorul înainte. b. Mersul cu osia înainte

Dat fiind că locomotiva diesel-electrică CFR 060 DA are o transmisie unilaterală calculul se referă numai la acest tip de transmisie.

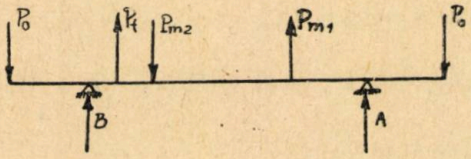


Fig. 2

Osia montată a locomotivei se poate considera cu aproximație ca o grindă pe două reazime asupra căreia acționează o serie de sarcini (fig. 2).

a) *Unghiul de înclinare a roții dințate*

Pentru determinarea unghiului de înclinare a roții dințate vom scrie ecuația fibrei medii deformate a axei osiei și apoi prin integrare se obține unghiul de rotire al oricărei secțiuni în lungul osiei. Mai înainte este necesar a determina reacțiunile în punctele de reazim ale osiei A și B.

Scriind ecuațiile de proiecții și momente (fig. 3) se obține:

$$A = P_0 - P_t \cdot \frac{b}{l} + P_{m_1} \cdot \frac{b+f}{l} - P_{m_2} \cdot \frac{l-u}{l}, \tag{1}$$

$$B = P_0 - P_{m_2} \cdot \frac{u}{l} + P_{m_1} \cdot \frac{l-u}{l} - P_t \cdot \frac{l-b}{l}. \tag{2}$$

Ecuația fibrei medii deformate a axei grinzii supusă la încovoiere este:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I}. \tag{3}$$

Scriind ecuația de mai sus în diferitele secțiuni ale grinzii (fig. 3), se obține:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = - P_0 \cdot x_1,$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_2}{d x_2^2} = - P_0 \cdot x_2 + B (x_2 - a),$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_3}{d x_3^2} = - P_0 \cdot x_3 + B (x_3 - a) + P_t (x_3 - a - b),$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_4}{d x_4^2} = - P_0 \cdot x_4 + B (x_4 - a) + P_t (x_4 - a - b) - P_{m_1} (x_4 - a - b - f),$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_5}{d x_5^2} = - P_0 \cdot x_5 + B (x_5 - a) + P_t (x_5 - a - b) - P_{m_1} (x_5 - a - b - f) + P_{m_2} [x_5 - a - (b + f)],$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_6}{d x_6^2} = - P_0 \cdot x_6 + B (x_6 - a) + P_t (x_6 - a - b) - P_{m_1} (x_6 - a - b - f) + P_{m_2} (x_6 - a - l + b + f).$$

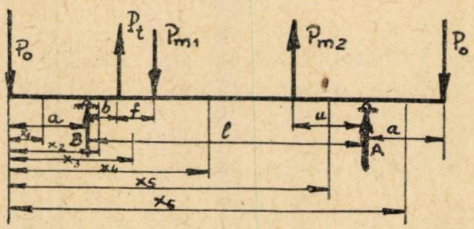


Fig. 3

Integrînd aceste expresii se obțin ecuațiile pentru determinarea unghiurilor de rotire a secțiunilor în diferite puncte ale grinzii,

$$\theta = f(x).$$

Astfel obținem:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_1}{dx_1} = - P_0 \cdot \frac{x_1^2}{2} + C_1,$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_2}{dx_2} = - P_0 \cdot \frac{x_2^2}{2} + B \cdot \frac{(x_2 - a)^2}{2} + C_2,$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_3}{dx_3} = - P_0 \cdot \frac{x_3^2}{2} + B \cdot \frac{(x_3 - a)^2}{2} + P_t \cdot \frac{(x_3 - a - b)^2}{2} + C_3,$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_4}{dx_4} = -P_0 \cdot \frac{x_4^2}{2} + B \cdot \frac{(x_4 - a)^2}{2} + P_t \cdot \frac{(x_4 - a - b)^2}{2} -$$

$$- P_{m_1} \cdot \frac{(x_4 - a - b - f)^2}{2} + C_4,$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_5}{dx_5} = -P_0 \cdot \frac{x_5^2}{2} + B \cdot \frac{(x_5 - a)^2}{2} + P_t \cdot \frac{(x_5 - a - b)^2}{2} -$$

$$- P_{m_1} \cdot \frac{(x_5 - a - b - f)^2}{2} + P_{m_2} \cdot \frac{(x_6 - a - l + b + f)^2}{2} + C_5,$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_6}{dx_6} = -P_0 \cdot \frac{x_6^2}{2} + B \cdot \frac{(x_6 - a)^2}{2} + P_t \cdot \frac{(x_6 - a - b)^2}{2} -$$

$$- P_{m_1} \cdot \frac{(x_6 - a - b - f)^2}{2} + P_{m_2} \cdot \frac{(x_6 - a - l + b + f)^2}{2} +$$

$$+ A \cdot \frac{(x_6 - a - l)^2}{2} + C_6,$$

unde: $C_1 \ldots C_6$ sînt constantele de integrare.

Reintegrînd expresiile de mai sus, se obțin ecuațiile pentru determinarea săgeților în diferite puncte ale grinzii,

$$y = f(x),$$

$$E \cdot I \cdot y_1 = -P_0 \cdot \frac{x_1^3}{6} + C_1 \cdot x + D_1,$$

$$E \cdot I \cdot y_2 = -P_0 \cdot \frac{x_2^3}{6} + B \cdot \frac{(x_2 - a)^3}{6} + C_2 \cdot x_2 + D_2,$$

$$E \cdot I \cdot y_3 = -P_0 \cdot \frac{x_3^3}{6} + B \cdot \frac{(x_3 - a)^3}{6} + P_t \cdot \frac{(x_3 - a - b)^3}{6} + C_3 \cdot x_3 + D_3$$

$$E \cdot I \cdot y_4 = -P_0 \cdot \frac{x_4^3}{6} + B \cdot \frac{(x_4 - a)^3}{6} + P_t \cdot \frac{(x_4 - a - b)^3}{6} -$$

$$- P_{m_1} \cdot \frac{(x_4 - a - b - f)^3}{6} + C_4 \cdot x_4 + D_4,$$

$$E \cdot I \cdot y_5 = -P_0 \cdot \frac{x_5^3}{6} + B \cdot \frac{(x_5 - a)^3}{6} + P_t \cdot \frac{(x_5 - a - b)^3}{6} -$$

$$- P_{m_1} \cdot \frac{(x_5 - a - b - f)^3}{6} + P_{m_2} \cdot \frac{(x_5 - a - l + b + f)^3}{6} + C_5 \cdot x_5 + D_5$$

$$E \cdot I \cdot y_6 = -P_0 \cdot \frac{x_6^3}{6} + B \cdot \frac{(x_6 - a)^3}{6} + P_t \cdot \frac{(x_6 - a - b)^3}{6} -$$

$$- P_{m_1} \cdot \frac{(x_6 - a - b - f)^3}{6} + P_{m_2} \cdot \frac{(x_6 - a - l + b + f)^3}{6} +$$

$$+ A \cdot \frac{(x_6 - a - l)^3}{6} + C_6 \cdot x_6 + D_6,$$

unde: $D_1 \ldots D_6$ sînt constante de integrare.

Constantele de integrare se determină din condițiile limită:

$$x_1 = x_2 = a;\ y_1 = 0;\ y_2 = 0;\ \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2},$$

$$x_2 = x_3 = a + b;\ y_2 = y_3;\ \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{dy_3}{dx_3},$$

$$x_3 = x_4 = a + b + f;\ y_3 = y_4;\ \frac{dy_3}{dx_3} = \frac{dy_4}{dx_4},$$

$$x_4 = x_5 = a + l - b - f;\ y_4 = y_5;\ \frac{dy_4}{dx_4} = \frac{dx_5}{dy_5},$$

$$x_5 = x_6 = a + l;\ y_5 = y_6 = 0;\ \frac{dy_5}{dx_5} = \frac{dy_6}{dx_6}.$$

Ținînd seama de condițiile limită de mai sus, se găsește că:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C,$$
$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = D.$$

Care împreună cu valorile din condițiile limită 1 și 5 introduse în relațiile: EIy_1 și EIy_5 ne dau valoarea lui C

$$C = \frac{1}{l} - \left\{ P_0 \left[\frac{(a + l)^3}{6} - \frac{a^3}{6} - \frac{l^3}{6} \right] - P_t \left[-\frac{l^3}{6} \cdot \frac{(l - b)}{l} + \frac{(l - b)^3}{6} \right] + \right.$$

$$\left. + P_{m_1} \left[-\frac{l^3}{6} \cdot \frac{l - u}{l} + \frac{(l - b - f)^3}{6} \right] + P_{m_2} \left[\frac{l_u^2}{6} - \frac{(b + f)^3}{6} \right] \right\}.$$

Unghiul de rotație al secțiunii grinzii în locul de fixare al roții dințate ($x = a + b$) va fi:

$$\theta_r = \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{EI} \left[-P_0 \cdot \frac{x_2^2}{2} + B \cdot \frac{(x_2 - a)^2}{2} + C_2 \right]. \qquad (6)$$

Făcînd $x_2 = a + b$ și înlocuind valoarea lui $C_2 = C$ obținem:

$$\theta_r = \frac{1}{EI}\left\{P_0 \cdot \frac{a(l-2b)}{2} + P_t \cdot \frac{4b^3 + 2b\,l^2}{6l} + P_{m_1}\left[\frac{3b^2 l - 3b^2 u}{6l} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(l-b-f)^3}{6l} - \frac{l^3 + l^2 \cdot u}{6l}\right] + P_{m_2}\left[\frac{l^2 \cdot u}{6l} - \frac{3b^2 u}{6l} - \frac{(b+f)^3}{6l}\right]\right\}. \quad (7)$$

Notînd:

$$\lambda_1 = \frac{a(l-2b)}{2EI}. \quad (8)$$

$$\lambda_2 = \frac{4b^3 + 2b\,l^2}{6l\,EI}, \quad (9)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{6l\,EI}[3b^2 l - 3b^2 u + (l-b-f)^3 - l^3 + l^2 u], \quad (10)$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{6l\,EI}[l^2 u - 3b^2 u - (b+f)^3]. \quad (11)$$

Se poate scrie că:

$$\theta_r = P_0 \cdot \lambda_1 + P_t \cdot \lambda_2 + P_{m_1} \cdot \lambda_3 - P_{m_2} \cdot \lambda_4. \quad (12)$$

Pentru locomotiva diesel-electrică 060 DA avem:

$$a = 255 \text{ mm},$$
$$b = 245 \text{ mm},$$
$$f = 210 \text{ mm},$$
$$l = 1500 \text{ mm},$$
$$u = 385 \text{ mm}.$$

Înlocuind valorile numerice, obținem:

$$\lambda_1 = 7{,}75 \cdot 10^{-8}$$
$$\lambda_2 = 7{,}08 \cdot 10^{-8}$$
$$\lambda_3 = -10 \cdot 10^{-8} \quad (13)$$
$$\lambda_4 = -4{,}22 \cdot 10^{-8}.$$

Deci θ_r va fi:

$$\theta_r = P_0 \cdot 7{,}75 \cdot 10^{-8} + P_t \cdot 7{,}08 \cdot 10^{-8} - P_{m_1} \cdot 10 \cdot 10^{-8} + P_{m_2} \cdot 4{,}22 \cdot 10^{-8},$$

sau

$$\theta_r = 10^{-8}[7{,}75 \cdot P_0 + 7{,}08 \cdot P_t - 10 \cdot P_{m_1} + 4{,}22 \cdot P_{m_2}].$$

2. Determinarea valorii reacțiunilor din lagărele de sprijin pe osie ale motorului

Forțele care acționează asupra carcasei motorului electric de tracțiune sînt perpendiculare pe planul desenului (fig. 4) în următoarele puncte:

În punctul D — greutatea motorului de tracțiune P_{mot}.
În punctele A și B — reacțiunile lagărelor motorului P_{m_1} și P_{m_2}.
În punctul E — reacțiunea reazemului în punctul de suspendare al motorului P_s.
În punctul F — reacțiunea roții dințate asupra pinionului P_t.

La mersul osiei montate înainte, forța P_t va fi îndreptată în jos (perpendicular pe planul desenului).

În aceeași direcție vor fi îndreptate și forțele P_{mot} și P_{m_2} (aplicată în punctul B) în timp ce forțele P_{m_1} (aplicată în punctul A) și P_s vor fi de sens contrar.

În fig. 4 s-a notat:

t — distanța între punctele de sprijin pe osie ale motorului în mm,
p — distanța între axa osiei și axa rotorului în mm,
r — distanța de la axul rotorului pînă la centrul de greutate al motorului în mm,
m — distanța de la mijlocul pinionului la axa yotorului în mm,
e — distanța de la punctul de suspendare al motorului la axul rotorului în mm,
h — distanța de la lagărul din dreapta al motorului pînă la axa y în mm,
g — distanța de la centrul de greutate al motorului electric pînă la axa y în mm.

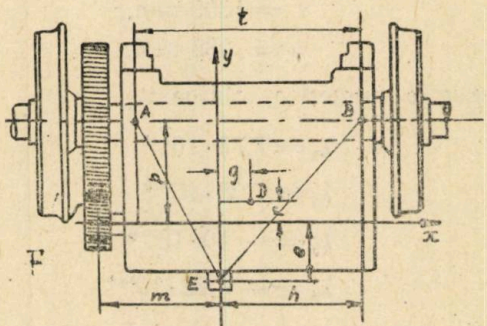


Fig. 4

Axele de coordonare s-au ales astfel:

Axa absciselor x este axa arborelui rotorului, axa ordonatelor y este axa de simetrie a motorului, axa z este perpendiculară pe planul desenului și îndreptată în sus.

Scriind ecuațiile de proiecție pe axa z, de momente față de axa y și axa x se obține prin rezolvarea lor reacțiunile din lagărele motorului.

$$P_{m_1} = P_{mot} \cdot \lambda_5 + P_t \cdot \lambda_6, \tag{14}$$

și

$$P_{m_2} = -P_{mot} \cdot \lambda_7 + P_t \cdot \lambda_8, \tag{15}$$

unde :

$$\lambda_5 = \frac{(r+e) \cdot h - g(p+e)}{t(p+e)}, \tag{16}$$

$$\lambda_6 = \frac{e \cdot h + m(p+e)}{t(p+e)}, \tag{17}$$

$$\lambda_7 = \frac{g(p+e) + (r+e)(t-h)}{t(p+e)}, \tag{18}$$

$$\lambda_8 = \frac{m(p+e) - e(t-h)}{t(p+e)}. \tag{19}$$

Înlocuind valorile numerice corespunzătoare pentru locomotiva diesel-electrică 060 DA :

$= 660t$ mm ; $p = 475$ mm ; $r = 20$ mm ; $m = 525$ mm ; $e = 502{,}6$ mm ;

$h = 365$ mm ; $g = 35$ mm.

obținem :

$$\lambda_5 = 0{,}220 ; \ \lambda_6 = 1{,}075 ; \ \lambda_7 = 0{,}292 ; \ \lambda_8 = 0{,}566. \tag{21}$$

Înlocuind expresiile lui P_{m_1} și P_{m_2}. în relația (12) unghiul de rotire a roții dințate va fi :

$$\theta_r = P_0 \cdot \lambda_1 + P_{mot}(\lambda_5 \cdot \lambda_3 + \lambda_4 \cdot \lambda_7) + P_t(\lambda_2 + \lambda_6 \cdot \lambda_3 - \lambda_8 \cdot \lambda_4). \tag{22}$$

Pentru locomotiva diesel 060 DA

$$P_0 = 8083 \text{ kgf și } P_{mot} = 2135 \text{ kgf.}$$

Înlocuind aceste valori în relația (22) și ținînd seama de valorile lui λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, λ_7, λ_8 din relațiile (13) și (21) obținem :

$$\theta_r = 5{,}41 \cdot 10^{-4} \pm 1{,}28 \cdot P_t \cdot 10^{-8}.$$

Unde semnul $\pm$ se referă la mersul cu motorul înainte sau înapoi.

Deoarece greutatea motorului P_{mot} și sarcina pe fus P_0 sînt constante (nu s-a luat în considerare variația sarcinilor pe osii care de altfel influențează foarte puțin asupra valorii lui θ_r) se vede că modificarea unghiului de rotire al roții dințate θ_r modifică proporțional valoarea presiunii dintelui pinionului pe dintele roții dințate. Adică :

$$\theta_r = f(P_t), \tag{23}$$

ceea ce reprezintă o linie dreaptă.

Scriind relația între forța P_t și forța de tracțiune F_t vom determina funcția

$$\theta_r = f(F_t).$$

Pentru transmisii unilaterale

$$P_t = \gamma \cdot F_t, \tag{24}$$

unde :

$$\gamma = \frac{D}{n \cdot d \cdot \cos\alpha}, \tag{25}$$

în care :

D — diametrul roții motoare în mm,
n — numărul osiilor motoare,
d — diametrul primitiv al roții dințate în mm,
α — unghiul de angrenare.

Pentru locomotiva diesel 060 DA :

$$D = 1100 \text{ mm}; \; n = 6; \; d = 780; \; \alpha = 18{,}9358^0 \cong 19^0.$$

Înlocuind valorile numerice găsim :

$$\gamma = 0{,}248.$$

Deci :

$$P_t = 0{,}248 \cdot F_t. \tag{26}$$

Pentru diversele valori ale forței de tracțiune se obțin valorile forței P_t trecute în tabela 1.

Tabela 1

F_t kgf	5 000	10 000	15 000	20 000	25 000
F_t kgf	1 240	2 480	3 720	4 960	6 200

Înlocuind în relația (23) valorile lui $P_t = f(F_t)$ din tabela 1 se obțin valorile

$$\theta_r = f(F_t),$$

trecute în tabela 2.

Tabela 2

F_t kgf	0	5 000	10 000	15 000	20 000	25 000
		Mersul cu motorul înainte				
$\theta_r \cdot 10^{-4}$ rad	5,01	5,57	5,73	5,88	6,04	6,20
		Mersul cu osia înainte				
$\theta_r \cdot 10^{-4}$ rad	5,01	5,25	5,09	4,94	4,78	4,62

Cu ajutorul valorilor din tabela 2 s-a trasat curba reprezentată în fig. 5.

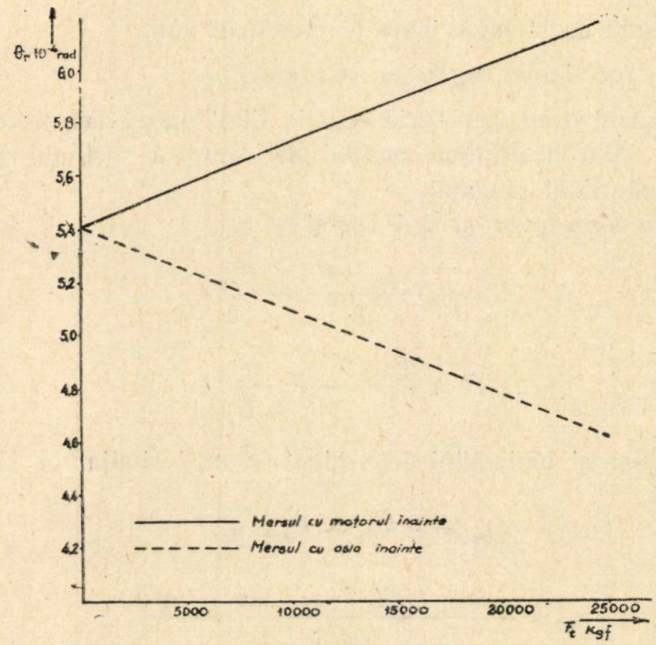


Fig. 5.

3. Determinarea unghiului de rotire a pinionului.

Axul motorului se poate reprezenta ca o grindă pe două reazime (în locurile lagărelor) încărcată cu forțe concentrate: .

P_{rot} — greutatea rotorului,

P_t — reacțiunea roții dințate asupra pinionului.

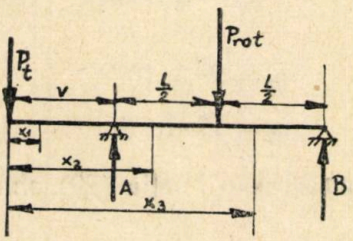


Fig. 6.

Schematic forțele care acționează asupra axului motorului sînt reprezentate în fig. 6.

Pe figură s-a notat cu:

L — distanța între lagărele rotorului în mm,

v — distanța de la lagăr pînă la pinion în mm,

A și B — reacțiunile lagărelor rotorului.

Ca și în cazul osiei vom scrie ecuația fibrei medii deformate și apoi prin integrare vom determina unghiul de rotire a secțiunii grinzii în dreptul unde este fixat pinionul.

Reacțiunile reazimelor grinzii vor fi:

$$A = P_t \cdot \frac{L+v}{L} + \frac{P_{rot}}{2}, \tag{27}$$

$$B = \frac{P_{rot}}{2} - P_t \cdot \frac{v}{L}. \tag{28}$$

Unghiul de rotire al pinionului determinat în mod similar ca și la roata dințată, va fi:

$$\theta_p = P_t \cdot \eta_1 + P_{rot} \cdot \eta_2, \tag{29}$$

unde:

$$\eta_1 = \frac{v^3 + L^2(L+v) - (v+L)^3}{6L\,E\,I}, \tag{30}$$

$$\eta_2 = \frac{L^2}{16\,E\,I}. \tag{31}$$

Înlocuind valorile corespunzătoare locomotivei 060 DA

$$v = 171 \text{ mm},$$

$$L = 803 \text{ mm},$$

$$P_{rot} = 670 \text{ kgf},$$

obținem:

$$\eta_1 = 28{,}3 \cdot 10^{-8},$$

$$\eta_2 = 19 \cdot 10^{-8}. \tag{32}$$

Înlocuind valorile numerice în relația (29) obținem unghiul de rotire θ_p egal cu

$$\theta_p = 1{,}27 \cdot 10^{-4} \pm 28{,}3 \cdot P_t \cdot 10^{-8}, \tag{33}$$

iar în funcție de forța de tracțiune θ_p va fi:

$$\theta_p = 1{,}27 \cdot 10^{-4} \pm 7 \cdot F_t \cdot 10^{-8}.$$

Pentru diverse valori ale forței de tracțiune avem :

Tabela 3

F_t kgf	0	5 000	10 000	15 000	20 000	25 000
$\theta_p \cdot 10^{-4}$ rad	1,27* / 1,27	—2,23 / 4,77	—5,73 / 8,27	—9,23 / 11,77	—12,73 / 15,27	—16,23 / 18,77

* La numărător sînt valorile lui θ_p pentru mersul osiei înainte.
La numitor sînt valorile lui θ_p pentru mersul motorului înainte.

Cu ajutorul valorilor din tabela 3 s-a trasat curba $\theta_p = f(F_t)$ reprezentată în fig. 7.

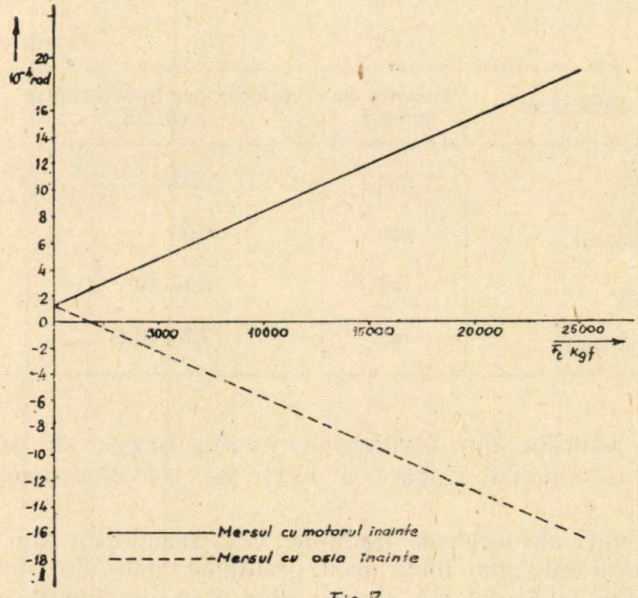


Fig. 7

4. **Influența jocurilor în lagărele de suspendare ale motorului pe osie și ale axului motorului asupra contactului incomplet a roții dințate și pinionului.**

a) *În lagărele motorului pe osie.*

Valoarea jocului în lagărele de suspendare a motorului pe osie are o influență hotărîtoare asupra contactului incomplet a roții dințate și pinio-

nului în urma existenței jocurilor în lagărele motorului se poate calcula aproximativ din relația :

$$\theta^m = \operatorname{tg} \theta^m = \frac{\delta}{l},$$

unde :

δ — jocul în lagărele motorului în mm,

l — distanța între marginile exterioare ale lagărelor în mm.

Vom determina unghiul de înclinare θ^m considerînd jocurile în lagăre după desen și jocurile maxime admise în exploatare pentru locomotiva diesel-electrică 060 DA.

Valorile jocurilor și unghiului de înclinare θ^m sînt trecute în tabela 4.

Tabela 4

Denumirea	Unitatea de măsură	Valorile pentru locomotive 060 DA
δ^{max}_{desen}	mm	0,228
$\delta^{max}_{exploatare}$	mm	0,69
θ^m_{desen}	rad	$3{,}16 \cdot 10^{-4}$
$\theta^m_{exploatare}$	rad	$7{,}74 \cdot 10^{-4}$

Influența jocurilor din lagărele motorului începe să se manifeste numai de la o anumită valoare a forței de tracțiune respectiv forță pe dinți.

La valori mici ale forței de tracțiune, cînd reacțiunea roții dințate P_t asupra pinionului este mai mică decît greutatea motorului, jumătatea de sus a cuzinetului lagărului stă pe osie (fig. 8 a) iar jocurile nu influențează asupra intersectării dinților roții dințate și pinionului.

Pentru o anumită valoare a forței de tracțiune, respectiv a forței P_t, apare intersecția dinților ca urmare a existenței jocurilor în lagărele motorului (fig. 8 b și c).

Intersecția dinților datorită jocurilor din lagărele motorului pe osie apare în momentul cînd reacțiunea din lagăre este 0 (zero), adică atunci cînd P_t va echilibra greutatea motorului electric de tracțiune.

Folosind relațiile (14) și (15) se poate determina forța de tracțiune a locomotivei, la care jocul din lagărele motorului pe osie vor influența asupra intersectării dinților roții dințate și pinionului.

La mersul cu motorul înainte contactul incomplet al dinților apare pentru valoarea nulă a reacțiunii lagărelor, deci pentru $P_{m_1} = 0$.

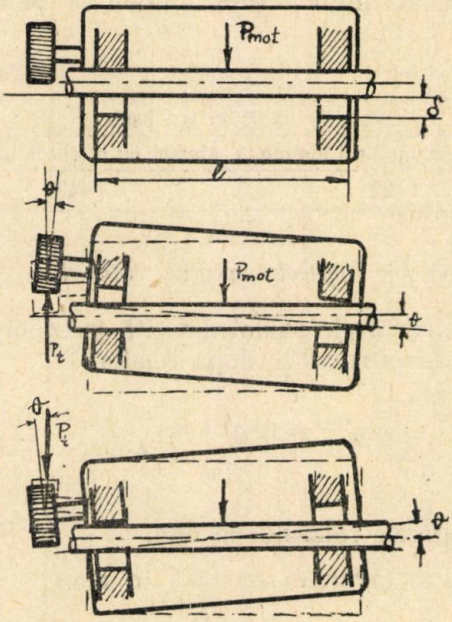


Fig. 8.

Dar

$$P_{m_1} = P_{mot} \cdot \lambda_5 + P_t \cdot \lambda_6 .$$

Prin urmare

$$P_{mot} \cdot \lambda_5 + P_t \cdot \lambda_6 = 0.$$

De unde

$$P_t = - P_{mot} \cdot \frac{\lambda_5}{\lambda_6}, \tag{36}$$

La mersul cu motorul înapoi contactul incomplet al dinților roții dințate și pinionului are loc pentru $P_{m_2} = 0$.

Însă

$$P_{m_2} = P_{mot} \cdot \lambda_7 + P_t \cdot \lambda_8 .$$

Deci

$$P_{mot} \cdot \lambda_7 + P_t \cdot \lambda_8 = 0.$$

De unde

$$P_t = - P_{mot} \cdot \frac{\lambda_7}{\lambda_8}. \tag{36}$$

Cunoscînd valorile lui λ_5, λ_6 și λ_7, λ_8 din relația (21) și valorile lui $P=f(F_t)$ din relația (26) s-au determinat valorile forței de tracțiune F_t, pentru care jocurile din lagărele motorului pe osie, influențează asupra contactului incomplet al dinților roții dințate și pinionului, trecute în tabela 5.

Tabela 5

Valorile lui F_t în kgf pentru	
Mersul cu motorul înainte	Mersul cu motorul înapoi
1 762	4 440

b) *În lagărele axului rotorului.*

Unghiul de înclinare a pinionului datorită jocurilor din lagărele rotorului se poate calcula aproximativ după relația :

$$\theta^{rot} = \operatorname{tg} \theta^{rot} = \frac{s}{L},$$

unde :

s — jocul în lagărele rotorului în mm,

L — distanța între lagărele rotorului în mm.

Valorile jocurilor maxime după desen și jocurile maxime în exploatare precum și valorile unghiului de înclinare a pinionului datorită jocurilor din lagărele rotorului calculate după relația (37) sînt trecute în tabela 6.

Tabela 6

Denumirea	Unitatea de măsură	Valorile pentru locomotive diesel 060
$S^{max}_{des.}$	mm	1,120
$S^{max}_{expl.}$	mm	0,24
$\theta^{rot}_{des.}$	rad	$1{,}49 \cdot 10^{-4}$
$\theta^{rot}_{expl.}$	rad	$2{,}93 \cdot 10^{-4}$

Contactul incomplet al dinților pinionului și roții dințate, va avea loc atunci cînd reacțiunea din lagărele rotorului va fi egală cu zero, adică atunci cînd P_t va echilibra greutatea rotorului motorului electric de tracțiune.

Folosind relațiile (27) și (28) se poate determina valoarea forței de tracțiune a locomotivei, la care începe contactul incomplet al dinților pinionului și roții dințate datorită jocurilor din lagărele rotorului.

La mersul cu motorul înainte contactul incomplet al dinților apare pentru valorile nule ale reacțiunii din lagărul rotorului din partea pinionului adică pentru

$$A = -P_t \cdot \frac{L+v}{L} + \frac{P_{rot}}{2} = 0,$$

de unde

$$P_t = P_{rot} \cdot \frac{L}{2(L+v)}. \tag{38}$$

La mersul cu motorul înapoi contactul incomplet al dinților pinionului și roții dințate are loc pentru valori nule ale reacțiunii lagărului rotorului situat în partea opusă pinionului, adică pentru

$$B = \frac{P_{rot}}{2} - P_t \cdot \frac{v}{L} = 0.$$

De unde

$$P_t = \frac{L}{2v} \cdot P_{rot}. \tag{39}$$

Cunoscînd funcția $P_t = f(F_t)$ după relația (26) se pot determina valorile forței de tracțiune, pentru care jocurile din lagărele rotorului influențează asupra contactului incomplet al dinților pinionului și roții dințate. Valoarea forțelor de tracțiune astfel determinate sînt trecute în tabela 7.

Tabela 7

Valoarea forței de tracțiune F_t kgf pentru	
Mersul cu motorul înainte	Mersul cu motorul înapoi
1 114	6 343

5. Neparalelismul dinților pinionului și roții dințate.

Neparalelismul dinților pinionului și roții dințate în funcție de forța de tracțiune se poate determina construind funcția unghiului de înclinare a roții dințate, unghiul de înclinare a pinionului și unghiul de intersectarea dinților pinionului și roții dințate datorită jocurilor din lagărele motorului pe osie și jocurile din lagărele rotorului.

Valorile neparalelismului dinților pinionului și roții dințate în funcție de forța de tracțiune sînt date în tabelul 8.

Tabela 8

Forța de tracțiune F_t în kgf	Neparalelismul dinților pinionului și roții dințate pentru			
	Jocul maxim în lagăre după desen		Jocul maxim în lagăre în exploatare	
	$\theta\ 10^{-4}$ rad	mm	$\theta \cdot 10^{-1}$ rad	mm
	Mersul cu motorul înainte			
0	6,68	0,091	6,68	0,091
1 114	7,49	0,102	7,49	0,102
1 762	8,47	0,119	8,47	0,119
5 000	14,99	0,205	21,04	0,290
10 000	18,65	0,265	24,70	0,346
15 000	22,30	0,308	28,35	0,396
20 000	25,96	0,386	32,01	0,448
25 000	29,62	0,406	35,67	0,493
	Mersul cu osia înainte			
0	6,68	0,091	6,68	0,091
1 114	4,88	0,42	4,88	0,042
1 762	4,81	0,040	4,81	0,040
5 000	— 1,63	—0,021	— 7,68	—0,108
10 000	— 5,29	—0,079	—11,34	—0,160
15 000	— 8,94	—0,123	—14,99	—0,205
20 000	—12,60	—0,178	—18,65	—0,265
25 000	—16,26	—0,225	—22,31	—0,38

Cu ajutorul valorilor din tabela 8 se poate construi diagrama $\theta = f(F_t)$ reprezentată în fig. 9.

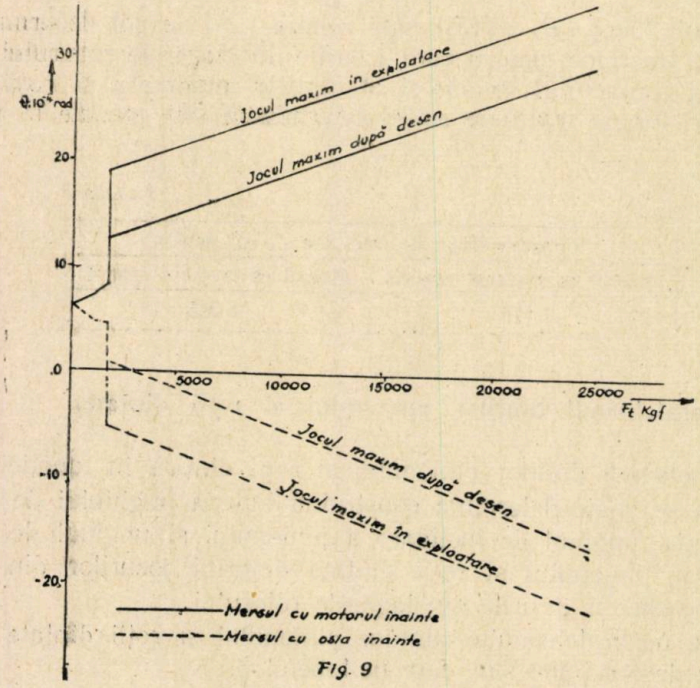


Fig. 9

Analizînd diagrama din fig. 9 se observă că:

— la mersul locomotivei cu motorul înainte linia frîntă care reprezintă funcția $\theta=f(F_t)$ nu intersectează niciodată axa absciselor. Aceasta înseamnă că intersectarea dinților pinionului și roții dințate niciodată

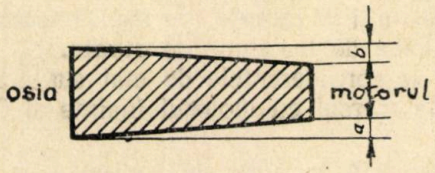


Fig. 10.

nu va fi egală cu zero. Adică pentru orice valoare a forței de tracțiune va exista contactul incomplet al dinților.

Pinionul și roata dințată vor lucra întotdeauna pe partea dinților dinspre motorul electric de tracțiune (interior).

— la mersul locomotivei cu motorul înapoi linia frîntă care reprezintă funcția $\theta=f(F_t)$ intersectează axa absciselor.

În punctele de intersecție cu axa absciselor va avea loc contactul longitudinal complet al dinților pinionului și roții dințate. Deci pentru valori ale forței de tracțiune cuprinse între zero și cea corespunzătoare punctului de intersecție ($F_t = 2800$ kgf) va exista atingerea incompletă a dinților care vor lucra pe partea dinspre motor (interior).

Pentru valori ale forței de tracțiune mai mari decît cea corespunzătoare punctului de intersecție a liniei $\theta=f(F_t)$ cu axa absciselor, va exista contactul incomplet al dinților avînd însă semn invers, adică dinții vor lucra pe partea dinspre roată (exterior).

— se vede că neparalelismul dinților pinionului și roții dințate are valori mari (linia frîntă $\theta=f(F_t)$) pentru anumite valori ale forței de tracțiune.

— o influență considerabilă asupra măririi neparalelismului dinților pinionului și roții dințate o are valoarea jocurilor din lagărele motorului pe osie și lagărele axului motorului.

Valoarea contactului longitudinal al dinților se poate spori modificînd forma secțiunii dinților așa cum se arată în fig. 10.

6. Alegerea valorii îngustării dinților pinionului.

Contactul longitudinal al dinților pinionului și roții dințate depinde de regimul de lucru al locomotivei și de valoarea jocurilor din lagărele de suspendare ale motorului și lagărele axului motorului electric de tracțiune.

Îngustarea dinților pinionului conduce la realizarea unui contact longitudinal complet, însă, aceasta numai pentru o anumită forță de tracțiune și jocuri bine determinate.

Alegerea valorii îngustării dinților pinionului se va face considerînd jocurile din lagăre pe cele admise la ieșirea locomotivei din reparație capitală (0,2...0,3 mm).

Analizînd dependența valorii neparalelismului dinților pinionului și roții dințate de forța de tracțiune, se constată că este bine a alege acea valoare a îngustării dinților la care are loc contactul longitudinal complet al dinților pentru forța de tracțiune de durată.

Ținînd seama de considerentele de mai sus s-a ales îngustarea dinților cu 0,38 mm la mersul cu motorul înainte și 0,20 mm la mersul cu osia înainte.

Considerînd jocul în lagărele de suspensie a motorului 0,3 mm și jocurile în lagărele axului motorului 0,2 mm s-a calculat neparalelismul dinților în radiani și mm a căror valori sînt trecute în tabelul nr. 9.

Tabela 9

Forța de tracțiune F_t kgf	Neparalelismul dinților pinionului și roții dințate pentru jocul în lagăre de 0,3 mm respectiv 0,2 mm	
	$\theta\ 10^{-4}$ rad	mm
	Mersul cu motorul înainte	
0	6,68	0,091
1 114	7,49	0,102
1 762	8,47	0,119
5 000	16,12	0,220
10 000	19,78	0,246
15 000	23,43	0,326
20 000	27.09	0,388
25 000	30,75	0,429
	Mersul cu osia înainte	
0	6,68	0,091
1 114	4,88	0,042
1 762	4,81	0,040
5 000	— 2,76	0,036
10 000	— 6,42	0,091
15 000	—10,07	0,141
20 000	—13,73	0,182
25 000	—17,39	0,244

Cu valorile din tabelul 9 s-a reprezentat în fig. 11 dreapta $\theta = f(F_t)$ și valoarea îngustării dinților pinionului paralelă cu axa absciselor.

Din fig. 11 se vede că:

La mersul cu motorul înainte îngustarea dinților cu 0,38 mm face ca la forța de tracțiune de durată (20.000 kgf) să existe contactul longitudinal complet, iar pentru forța de tracțiune uniorară de 25.000 kgf să existe intersectarea dinților egală cu 0,05 mm față de 0,43 mm în cazul neîngustării dinților.

La mersul cu osia montată înainte îngustarea dinților cu 0,20 mm conduce la existența contactului longitudinal complet pentru forța de tracțiune de durată. Pentru forța de tracțiune uniorară intersectarea dinților este de 0,04 mm în loc de 0,24 mm în cazul dinților neîngustați.

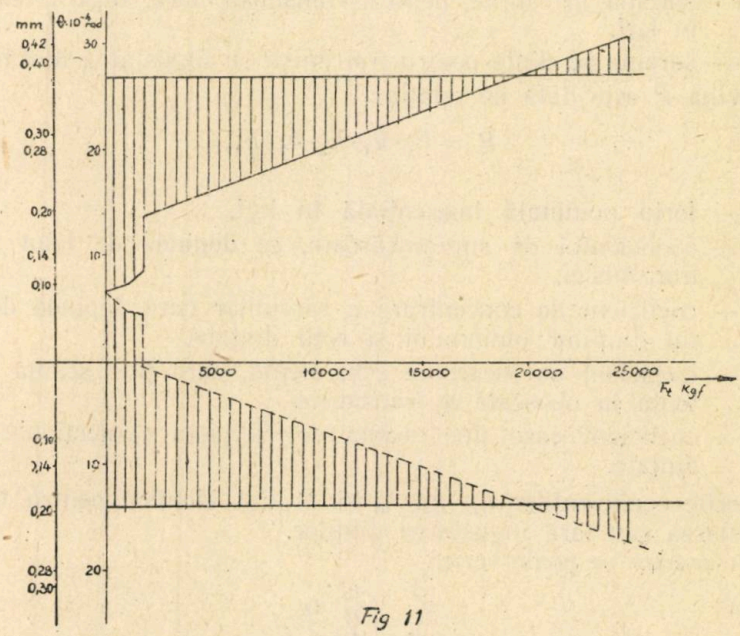


Fig 11

7. Solicitarea dinților.

Solicitarea de contact pe suprafața dinților pinionului și roții dințate este dată de relația:

$$\tau = 100\,000 \cdot \sqrt{\frac{2P(i \pm 1)}{71\,620 \cdot a_k \cdot B}}, \tag{40}$$

unde:

P — sarcina pe dinte în kgf,

i — raportul de transmisie,

d_k — diametrul primitiv al roții dințate în mm,

B — lățimea roții dințate în mm.

Valorile i, d_k și B sînt identice ca valoare atît pentru transmisii cu dinți îngustați cît și fără îngustarea dinților.

Se poate scrie deci relația:

$$\frac{\tau'}{\tau''} = \sqrt{\frac{P'}{P''}}, \tag{41}$$

unde :

τ' — valoarea solicitării de contact pe suprafața dinților neîngustați în kgf/mm²,

τ'' — solicitarea de contact pe suprafața dinților îngustați în kgf/mm²,

P' — sarcina pe dinte pentru transmisii fără îngustarea dinților în kgf,

P'' — sarcina pe dinte pentru transmisii cu îngustarea dinților în kgf.

Sarcina P este dată de relația :

$$P = P_t \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4, \tag{42}$$

unde :

P_t — forța nominală tangențială în kgf,

k_1 — coeficientul de supraîncărcare, ce depinde de felul încărcării transmisiei,

k_2 — coeficient de concentrare a sarcinilor care depinde de contactul dinților pinionului și roții dințate,

k_3 — coeficient de încărcare echivalentă, care ține seama de rezistența la oboseală a transmisiei,

k_4 — coeficient care ține seama de calitatea confecționării roților dințate.

Valorile coeficienților k_1, k_3, k_4 și P sînt identice pentru transmisii cu îngustarea sau fără îngustarea dinților.

Prin urmare se poate scrie :

$$\frac{\tau'}{\tau''} = \sqrt{\frac{k_2'}{k_2''}}. \tag{43}$$

Valoarea coeficientului k_2 se calculează cu următoarea formulă aproximativă :

$$k_2 \cong 0{,}5\sqrt{k_n} + 0{,}5.$$

Coeficientul k_n depinde de săgeată și de contactul longitudinal al pinionului și roții dințate

$$k_n = 1 + 0{,}3 \cdot \frac{B \cdot \theta \cdot C}{P_{med}} + 0{,}1 \cdot \left(\frac{B}{d_p}\right)^2, \tag{45}$$

unde :

θ — unghiul intersectării pinionului și roții dințate în rad.

C — rigiditatea dinților în kg/cm² (pentru dinți de oțel $C = 160.000$ kg/cm²),

d_p — diametrul primitiv al pinionului în cm,

P_{med} — încărcarea specifică medie pe unitatea de lungime a dintelui în kgf/cm.

$$P_{med} = \frac{P_t}{B}. \tag{46}$$

Pentru transmisii cu dinți îngustați:

$$P_{med} = \frac{P_t}{L_c}, \tag{47}$$

unde:

L_c — lungimea liniei de contact în cm.

$$L_c = \frac{B}{\cos\beta}, \tag{48}$$

unde:

β — unghiul de înclinare a dinților.

Înlocuind $B = 14$ cm; $\beta = 6°54'$ obținem:

$$L_c = \frac{14}{\cos \cdot 6°54'} = \frac{14}{0{,}992} = 14{,}1 \text{ cm}.$$

Considerînd forța pe dinți $P_t = 5580$ kgf corespunzătoare forței de tracțiune maxime obținem:

$$P_{med} = \frac{5\,580}{14{,}1} = 398{,}6 \text{ kg/cm}.$$

Coeficientul k_n va fi:

$$k_n = 1 + 0{,}3 \cdot \frac{14 \cdot 29 \cdot 10^{-4} \cdot 160.000}{398{,}6} + 0{,}1\left(\frac{14}{17}\right)^2 = 5{,}96.$$

Coeficientul k_2 va fi:

$$k_2 = 0{,}5\sqrt{5{,}96} + 0{,}5 = 1{,}72.$$

Solicitarea la încovoierea dintelui este:

$$\sigma_i = \frac{q \cdot \cos^2\beta}{\pi \cdot m \cdot y} \cdot \frac{k_i}{k}, \tag{49}$$

unde:

q — încărcarea specifică de contact în kgf/cm,

$$q = \frac{P}{B}, \tag{50}$$

y — coeficientul formei dintelui,

β — unghiul de înclinare a dintelui,

m — modulul în cm.

$$k_i = k_1 \cdot k_2 \cdot k_{3i} \cdot k_{4i}. \tag{51}$$

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4. \tag{52}$$

Valorile B, y, m, k_{3i}, k_{4i}, k_3, k_4 sînt identice pentru transmisii cu dinți îngustați și neîngustați.

Astfel se poate scrie:

$$\frac{\sigma_i'}{\sigma_i''} = \frac{q'}{q''} = \frac{P'}{P''}, \tag{53}$$

unde:

σ_i', q' și P' — valorile pentru transmisii fără îngustarea dinților,
σ_i'', q'' și P'' — valori pentru transmisii cu îngustarea dinților.

Ținînd seama de observația precedentă pentru calculul solicitării de contact pe suprafața dintelui se poate scrie:

$$\frac{\sigma_i'}{\sigma_i''} = \frac{k_2'}{k_2''}, \tag{54}$$

Pentru forța de tracțiune de durată cum se vede în fig. 11 contactul se face pe toată lungimea dinților. În acest caz

$$\theta'' = 0 \text{ adică } k_n'' = 1 \text{ și } k_2'' = 1.$$

Prin urmare:

$$\frac{\tau'}{\tau''} = \sqrt{\frac{k_2'}{k_2''}} = \sqrt{k_2'}, \tag{55}$$

$$\frac{\sigma_i'}{\sigma_i''} = \frac{k_2'}{k_2''} = k_2'. \tag{56}$$

Valorile rapoartelor

$$\frac{\tau'}{\tau''} \text{ și } \frac{\sigma_i'}{\sigma_i''},$$

vor fi:

$$\frac{\tau'}{\tau''} = 1{,}31 \qquad \frac{\sigma_i'}{\sigma_i''} = 1{,}72.$$

Se vede că solicitarea dinților în cazul îngustării lor este mult redusă.

8. Uzura transmisiei în exploatare.

Pentru determinarea uzurii dinților, grosimea lor s-a măsurat în două locuri la distanța de 10 mm de la margine, iar înălțimea de la vîrful dintelui cum este arătat în fig. 12.

Valorile măsurate sînt următoarele:

Tabela 10

Unghiul angrenării	Raportul de transmisie	Pinionul				Roata dințată			
		h_{prim}	S_{prim}	h	S	h_{prim}	S_{prim}	h	S
în grade	în mm								
18,9 358°	1 : 4,6	17,18	20,57	15,46	19,94	16,29	19,94	8,38	

Indicele prim. înseamnă măsurat pe cercul primitiv.

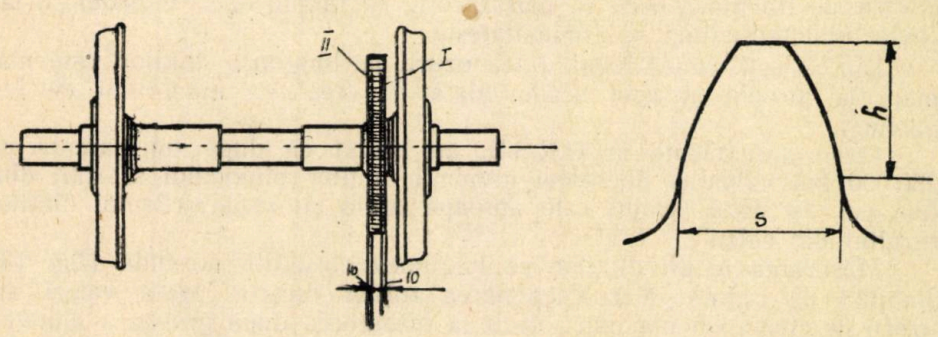


Fig. 12.

Grosimea dintelui după coardă este:

$$S = d_3 \cdot \sin \psi, \tag{57}$$

unde:

d_3 — diametrul cercului la care se face măsurarea grosimii dintelui în mm,

ψ — jumătatea unghiului cuprins de grosimea dintelui pe circonferința pe care se face măsurarea dat de relația:

$$\psi = \frac{\pi}{2Z} + \frac{2 \cdot \xi}{Z} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \text{înv}\, \alpha - \text{inv arc cos} \frac{d_0}{d_3}, \tag{58}$$

unde:

Z — numărul dinților,

ξ — coeficientul de deviere a dispozitivului de măsurat,

α — unghiul angrenării,

$$\text{inv}\, \alpha = \operatorname{tg} \cdot \alpha - \alpha = \theta \text{ unghiul evolventei,}$$

d_0 — diametrul cercului de bază în mm.

Măsurarea grosimii dinților a arătat că ei se fac după toleranța superioară care nu depășește 0,03 mm.

Uzura medie a dinților pe cele două zone (centuri) în microni la 10 000 km parcurși este de ordinul a 20 microni pentru pinion pe cercul I și aproximativ 23 microni pe cercul II, iar la roata dințată de 30 microni respectiv 37 microni.

Calculul făcut asupra intersectării dinților și contactul lor longitudinal confirmă distribuirea uzurii pe lungimea dinților.

Cu toate că uzura depinde de o mulțime de cauze totuși diferența uzurii dinților pe lungimea lor arată că există posibilitatea micșorării ei prin îmbunătățirea contactului longitudinal al lungimii dintelui.

Ca urmare a unei uzuri mai intensive pe partea dinspre motorul electric de tracțiune, decît în partea roții, cu timpul ei se îngustează, iar contactul longitudinal se îmbunătățește.

Din această cauză inegalitatea uzurii pe lungimea dinților, este mai mare la început și apoi scade odată cu creșterea numărului de km parcurși.

Măsurători făcute în U.R.S.S. au arătat că după un parcurs de 250 000 km valoarea diferenței grosimii dinților pinionului și roții dințate pe cele două cercuri este aproape egală cu neparalelismul dinților rezultat din calcul.

Măsurarea uzurii dinților pe lungimea obișnuită normală (fig. 13) stabilită de regulă la confecționarea roților dințate, arată valori ale uzurii de cîteva ori mai mici, decît la măsurarea după grosimea dintelui.

Diferența între măsurarea după grosimea dintelui și măsurarea dintelui se explică prin aceea, că suprafața dintelui se uzează inegal (pe înălțime) și profilul evolvent al dintelui se denaturează. De aceea determinarea valorii uzurii dinților după metoda obișnuită, normală este greșită.

În concluzie limita de uzură trebuie să fie stabilită după grosimea dintelui și nu după lungimea normală obișnuită.

În literatură se menționează înlocuirea pinioanelor și roților dințate nu atît din cauza uzurilor ci mai ales datorită crăpăturilor care apar la capetele dinților în partea motorului electric de tracțiune. Acest lucru

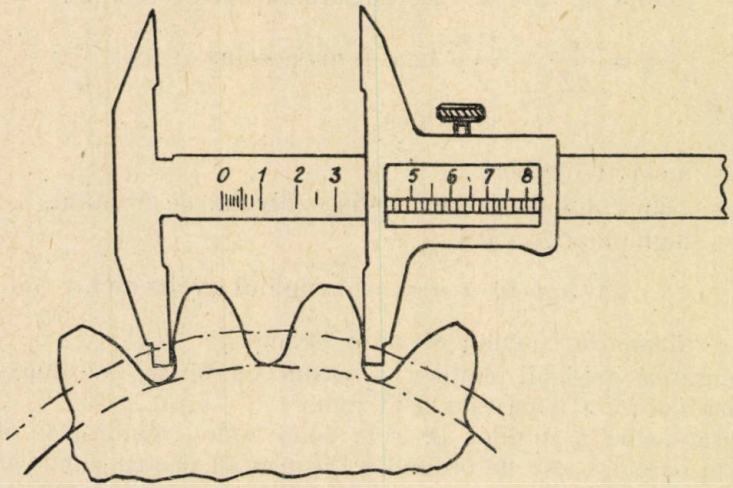


Fig. 13.

dovedește existența contactului longitudinal insuficient al dinților, datorită căruia are loc distribuirea încărcării inegale pe lungimea dinților ceea ce provoacă apariția prematură a crăpăturilor în partea dinspre motorul de tracțiune. Din această cauză este necesar a face dinții pinionului nesimetrici îngustîndu-i în partea motorului de tracțiune.

9. Jocurile în lagărele de suspendare a motorului pe osie.

Aceste jocuri exercită o influență considerabilă asupra contactului longitudinal al dinților pinionului și roții dințate și în afară de aceasta, odată cu mărirea jocului se schimbă și distanța dintre centrele roții dințate și pinionului care de asemenea influențează nefavorabil asupra bunei funcționări a transmisiei.

Din această cauză atît la construcție cît și la ieșirea locomotivelor din reparații este necesar a realiza jocul minim, din condițiile ungerii plus cel admis de exactitatea prelucrării.

Valoarea minimă a jocului pentru care este garantată funcționarea normală a lagărului motorului poate fi determinată din relația :

$$S_{min} = \sqrt{1{,}7 \cdot \nu}, \tag{59}$$

unde :

1,7 — coeficient ce caracterizează poziția arborelui în lagăr.

$$\nu = \frac{Z_M \cdot n \cdot D^2}{191\,000 \cdot p} \cdot \frac{m}{D + m}, \tag{60}$$

unde :

Z_m — vîscozitatea absolută a uleiului în kgfsec/m^2,
n — numărul de rotații a osiei pe minut,
D — diametrul fusului osiei motoare,
m — lungimea cuzinetului în cm,
p — presiunea specifică pe cuzinet în kgf/cm^2,

$$p = \frac{P_m}{D \cdot m}, \tag{61}$$

P_m — presiunea pe lagăre.

Înlocuind valorile numerice calculate pentru viteza de 70 km/h sînt prevăzute în tabela 11.

Tabela 11

n rot/min	D cm	Z_m kg·sec/m^2	m cm	p kg/cm^2	S_{min} mm
338	19	$6{,}9 \cdot 10^{-3}$	24	4,76	0,243

Rezultă deci : că jocul minim care asigură funcționarea bună a lagărului este de 0,24 mm.

Pentru a nu avea loc micșorarea jocului datorită încovoierii osiei sub sarcină este necesar respectarea următoarei inegalități:

$$D_{lagăr} - D > m \cdot \operatorname{tg} \alpha + h_{min}, \tag{62}$$

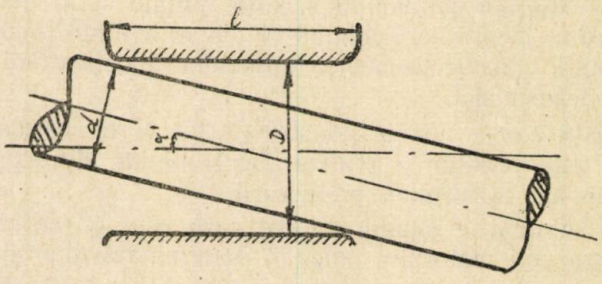


Fig. 14.

unde:

$D_{lagăr}$ — diametrul lagărului în mm,
D — diametrul fusului osiei în mm,
m — lungimea de lucru a lagărului în mm,
α — unghiul înclinării fusului osiei,
h_{min} — grosimea minimă a stratului de ulei în mm.

Grosimea minimă a stratului de ulei este:

$$h_{min} = v_f + v_1, \tag{63}$$

unde:

v_f — inegalitățile pe suprafața fusului osiei în mm,
v_1 — inegalitățile pe suprafața lagărului în mm,

Se poate lua:

$$v_f = 0{,}015 \text{ mm},$$

$$v_1 = 0{,}02 \text{ mm}.$$

Astfel:

$$h_{min} = 0{,}015 + 0{,}02 = 0{,}035 \text{ mm}.$$

Folosind ca mai înainte unghiul înclinării fusului osiei (34), determinăm jocul minim $D_{lagăr} - D$ după condiția (62).

Valorile calculate sînt trecute în tabelul 12.

Tabela 12

	$m \cdot \operatorname{tg} \alpha$	$m \cdot \operatorname{tg} \alpha + \alpha \cdot h_{min}$
$2{,}63 \cdot 10^{-4}$	0,063 12	0,098 1

Rezultă că jocul de 0,24 mm este suficient asigurînd o bună ungere și funcționare a lagărului.

Jocurile în lagărele de suspendare a motorului după desen și după reparații (recomandat) sînt trecute în tabela 13.

Tabela 13

Jocuri admisibile în lagărele de suspendare a motorului în mm			
după desen	la reparația capitală	la reparație cu ridicata	se scoate din uz
0,2 — 0,3	0,2 — 0,3	0,2 — 0,4	1,0

Cu se vede din tabela 13 jocul în lagărele de suspendare a motorului pe osie este 0,2 . . . 0.4 mm.

Jocurile după desen în lagărele de suspendare a motorului pe osie sînt: în S.U.A. 0,25 mm, în U.R.S.S. 0,2—0,3 mm pentru lagăre cu babit turnat și 0,3—0,5 mm pentru lagăre de bronz. La repartiția generală unde se înlocuiesc lagărele s-au prevăzut aceleași jocuri ca și la construcție.

10. Greșeli în confecționarea carcasei motorului electric de tracțiune.

Una din cauzele nerespectării contactului longitudinal al dinților pinionului și roții dințate este neparalelismul axei găurii în scutul lagărului, axa lagărului și axa motorului.

Acest neparalelism nu se poate compensa prin îngustarea dinților, deoarece poate fi diferit și ca valoare și ca semn.

De aceea este necesar a respecta cu strictețe paralelismul axelor la prelucrarea carcasei motorului, a scutului și a lagărului.

O atenție deosebită se impune la montaj, verificîndu-se în stare montată paralelismul axei lagărului și axei motorului, de asemenea verificarea ovalității fusului osiei asigurîndu-se astfel paralelismul menționat mai sus.

Trebuie remarcat faptul că la actuala construcție o lagărelor motorului pe osie este destul de greu a se obține respectarea distanței între axa lagărului și axa motorului și a evita astfel sporirea considerabilă a intersectării dinților ca urmare a măririi jocurilor în timpul exploatării.

Din această cauză se recomandă echiparea motoarelor electrice cu lagăre oscilante.

Aceasta elimină complet posibilitatea intersectării axei motorului și axei osiei, menținînd precis distanța între ele în timpul exploatării. În afară de aceasta, astfel de lagăre conduc la o economie de materiale și ușurare a exploatării locomotivei.

CONCLUZII ȘI PROPUNERI

Din analiza condițiilor de funcționare ale angrenajului se constată :

1. Contactul longitudinal al dinților pinionului și roții dințate depinde de regimul de lucru al locomotivei și de valoarea jocurilor din lagăre.

2. La mersul locomotivei cu motorul înainte pentru orice valoare a forței de tracțiune va exista contactul longitudinal incomplet al dinților. Din această cauză se propune îngustarea dinților pinionului cu 0,38 mm în partea dinspre motorul electric.

3. La mersul locomotivei cu osia înainte pentru forțele de tracțiune cuprinse între 0 ... 1750 kgf va exista contactul longitudinal incomplet al dinților care vor lucra pe partea dinspre motor. Pentru valori mai mari ale forței de tracțiune va exista contactul incomplet al dinților care vor lucra însă pe partea dinspre roată.

În scopul îmbunătățirii funcționării se propune îngustarea dinților pinionului cu 0,20 mm, în partea dinspre motorul electric.

4. Avînd în vedere că motoarele electrice la locomotiva diesel 060 DA sînt plasate unele înainte iar altele înapoia osiei și ținînd seama și de schimbarea sensului de mers, dinții se vor subția pe ambele părți cu 0,38 mm, respectiv 0,20 mm în partea de lucru dinspre motor.

5. O influență considerabilă asupra mărimii contactului longitudinal incomplet al dinților o au jocurile din lagărele de suspendare ale motorului pe osie și jocurile din lagărele axului motorului.

Pentru mărirea duratei de funcționare și a siguranței transmisiei se propune ca jocurile între fusurile osiei și cuzineții lagărelor de suspendare a motorului electric să se mențină în limitele 0,2—0,3 mm, iar la reparația cu ridicare din depouri în limitele 0,2—0,4 mm.

6. O altă cauză a contactului longitudinal incomplet al dinților este neparalelismul axei găurii în scutul lagărului, axa lagărului și axa motorului.

De aceea se impune o atenție deosebită atît la execuție cît și la montaj asupra verificării paralelismului axei osiei și axei motorului.

Catedra de locomotive diesel-electrice

ИЗУЧЕНИЕ РАБОТЫ ТЯГОВОГО ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ТЕЛЕЖЕК ТЕПЛОВОЗА С ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ CFR 060 DA, ПРОИЗВОДСТВА РЕШИЦКОГО МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОЙ КОМБИНАТА.

(Краткое содержание)

Одной из главных задач стоящих перед конструкторами и исследователями тягового подвижного состава, является преждевременный изнок зубъев зубчатой передачи тележек тепловозов с электрической передачей.

Из произведенного исследования следует, что продольный контакт между зубъями шестерни и зубчатыми колесами зависит от режима в котором работает тепловоз, от величны зозоров в подшипниках, положения тяговых электродвигателей по отношению к колесной паре и непараллельности оси отверстия в щите подшипника с осью подшипника и осью двигателя.

Делаются конкретные для снижения износа тягового зацепления тележек тепловозов CFR 060 DA мощностью в 2100 л. с., производства Решицкого Металлургического Комбината.

THE FUNCTIONAL IMPROVEMENT OF THE TRACTION GEAR BOX FOR THE TRUCKS OF THE 060 DA DIESEL-ELECTRIC LOCOMOTIVE, CONSTRUCTED FOR THE ROUMANIAN RAILWAY BY THE REȘIȚA METALURGICAL WORKS

(Sumary)

One of the principal problems which draws the attention on the rolling stock constructors and research men is the premature wear of the gears for the Diesel-electric locomotive trucks.

The above study shows that the longitudinal contact of the gear box teeth depends on the working load of the locomotive, on the clearences value of the bearings, on the relative position of the traction electric motor to the coheels axle and on the excentricity of the hole axis in the bearing shield, the bearing axis and the motor axis.

Concrete recommendations are made to decrease the wear of the trucks traction gears of the 060 DA, 2100 HP locomotive, constructed by the Reșița Metallurgical coocks.

AMÉLIORATION DU FONCTIONNEMENT DE L'ENGRENAGE DE TRACTION À ROUES DENTÉES DES BOGIES POUR LOCOMOTIVES DIESEL-ÉLECTRIQUES CFR 060 DA CONSTRUITES PAR U.C.M. REȘIȚA

(Résumé)

L'un de principaux problèmes qui préoccupent les constructeurs de même que les chercheurs en matériel roulant de traction, est constitué par les usures prématurées de la denture des roues dentées aux transmissions à roues dentées des bogies des locomotives diesel-électriques.

Il resulte de l'étude effectuée que le contact en longueur des dents du pignon et de ceux de la roue dentée dépend du régime de marche en charge de la locomotive, de la valeurs des jeux d'usure dans les pallers,

de la position des moteurs électrique de traction envers les essieux et du nonparallélisme de l'axe du trou dans le support du palier, l'axe du palier et celui du moteur.

On fait des decommandations concrètes pour la réduction des usures à l'engrenage de traction des bogies de la locomotive CFR 060 DA à 2100 C.V. construite à U.C.M. Reșița.

DIE VERBESSERUNG DES ZAHNRAD-DREHGESTELLANTRIEBES BEI DER DIESEL-ELEKTRISCHEN LOKOMOTIVE 060 D.A. C.F.R. BAUART U.C.M. REȘIȚA

(Zusammenfassung)

Ein Hauptproblem, welches die Konstrukteure und Forscher des rollenden Materials der Zugförderung beschäftigt, ist der vorzeitige Verschleiss der Zahnräder der Drehgestellantrieben bei den dieselelektrischen Lokomotiven.

Aus der Mitteilung geht es heraus, dass die Längsberührung zwischen dn Zahnrädem hängt ab von dem Lohbetrieb, von den Lagerspielen, von der Stellung der Elektromotoren gegen die Achswellen und von den Richtungen der Lager — und Motorachsen abhängt.

Es wärden Vorschläge für die Verkleinerung der Verschleissen bei den Zahnrädem der Drehgestellantrieben der Lokomotive 060 D.A. C.F.R. von 2100 H. P. Bauart U.C.M. Reșița gemacht.

Întreprinderea
Poligrafică nr. 6
București
c. 1012

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 2

MARTIE — APRILIE

1963

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

БULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. Б пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутсκик сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

MEGYEI MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1983

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 2

MARTIE — APRILIE

1963

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academie R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Conf. *Gh. Hagymaș*, cand. St. Th.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Conf. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R. P. R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr *R. Rădulet*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICA

I. M. MIU: Über die partikuläre Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung 13

A. TĂNĂSESCU: The descriptive aspect of interpretation of Lobacevski's geometry on a hyperboloid with two sheets. 25

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

S. LICĂ, G. TUDORACHE: Influența ultrasunetelor asupra proceselor de electrod la formarea compușilor oxigenați ai clorului pe electrod de platină rotativ. 35

REZISTENȚA MATERIALELOR

I. A. RADȚIG: Calculul sistemelor static nedeterminate de volum minim 49

CONSTRUCȚII DE MAȘINI

A. STAMBULEANU: Coeficientul de umplere al cilindrului motorului cu ardere internă și turație rapidă 69

M. R. MUSTAFA: Considerații asupra determinării temperaturii de rupere a filmului de lubrefiant 79

M. D. CAZACU, DUMITRU TUDOR: Influența lungimii finite a bielei asupra debitului pompelor cu piston 97

ENERGETICA

LAZĂR HASCAL : Influența gradului de dezacordare a bobinei de stingere a arcului electric asupra tensiunii de revenire pe fază pusă la pământ în cazul unei puneri la pământ monofazate 117

ELECTRONICA

G. RULEA : Măsurarea conductivității și permitivității în microunde 135

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

И. М. МИУ: О частном решении линейного неоднородного уравнения 13

А. ТЭНЭСЕСКУ: Начертательный аспект толкования геометрии лобачевского на двуполостном гиперболоиде . 25

ТЕХНОЛОГИЯ ХИМИИ

С. ЛИКЭ, Г. ТУДОРАКЕ: Влияние ультразвуков на процесс электродов, при образовании соединений хлора на вращающимся электроде платины 35

СОПРОТИВЛЕИИЕ МАТЕРИАЛОВ

И. А. РАДЦИГ: Расчет статически неопределенных систем наименьшего объема 49

МУШИНОСТРОЕНИЕ

А. СТАМБУЛЯНУ: Коэффициент наполнения цилиндра двигателей внутреннего сгорания, работающего с большим числом оборотов 69

М. Р. МУСТАФА: Некоторые экспериментальные соображения относительно температуры разрыва масляного слоя. 79

М. Д. КАЗАКУ, Д. ПОД: Влияние конечной длины на производительность поршневых насосов 97

ЭНЕРГЕТИКА

ЛАЗЭР ХАСҚАЛ : Влияние степени расстройки дугогасящей катушки на восстановливающиеся напряжение поврежденной фазы в случае однофазного заземления . . 117

ЭЛЕКТРОНИКА

Г. РАЛЯ : Методы измерений 135

CONTENTS

MATHEMATICS

I. M. MIU : Concerning the particular solution of the differential straight non — homogenuous equation 13

A. TĂNĂSESCU : The descriptive aspect of interpretation of Lobacevski's geometry on a hyperboloid with two sheets 25

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

S. LICĂ, G. TUDORACHE : The influence of the supersonnds on the electrode processes in the formation of the oxigenated compounds of the chlorine on the rotary Pt electrode . 35

STRENGTH OF MATERIALS

I. A. RADȚIG : The calculation of least volume statical undetermined system 49

MOTORS BRUILDINGS

A. STAMBULEANU : The volumetric efficiency of a cylinder of a rapid internal combustion engine 69

M. R. MUSTAFA : Some experimental considerations concerning the temperature at which it appears the breaking of a lubricating film 79

M. D. CAZACU, D. POP : Influence of the connectingrod finite length on the piston pumps delivery 97

ELECTRIC POWERS

LAZĂR HASCAL : Influence of the detuning degree of the arc suppression coil over the recovery voltage on the carthed phase for a single phase earth fault. 117

ELECTRONICS

G. RULEA : Measurement methods of permitivity and permeability in microwaves 135

SOMMAIRE

MATHEMATIQUE

I. M. MIU : Concernant la solution particuliére des équation différentielles linéaires inhomogenes 13

A. TĂNĂSESCU : L'aspect descriptif de l'interprétation de la géométrie de Lobatchewski sur un hyperboloide a deux nappes 25

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

S. LICĂ, G. TUDORĂCHE : L'influence des ultrasons sur les proces d'électrode à la formation des composes oxigénés du chlore sur l'electrode de Pt rotatif 35

RESISTANCES DES MATERIAUX

I. A. RADȚIG : Le calcule des systemes hyperstatiques de volume minimum 49

CONSTRUCTION DES MACHINE

A. STAMBULEANU : Le coefficient de remplissage du cylindre du moteur rapide à combustion interne 69

M. R. MUSTAFA : Quelques considérations sur la temperature de la pellicule portane de lubrifiant 79

M. D. CAZACU, D. TUDOR : Influence de la longueur finite de la bielle sur le débit des pompes a piston 97

ENERGETIQUE

LAZĂR HASCAL : L'influence du degré de desaccordage de la bobine d'éxtinction de l'arc electrique sur la tension de retour dans le phase, mise à la terre dans le cas d'une mise à la terre monophasée. 117

ELECTRONIQUE

G. RULEA : Méthodes de mesure de la permitivité et peartuibilité en microondes 135

INHALT

MATHEMATIK

I. M. MIU : Über die partikuläre Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichungen 13

A. TĂNĂSESCU : Die interpratation der Lobacevschischen geometrie auf einen zweischaligen hyperboloid vom standtpunkte der darstellenden geometrie. 25

TECHNOLOGISCHE CHEMIE

S. LICĂ. G. TUDORACHE : Der Einfluss von Ultraschallen, über die Elektrodenprozessen zur Bildung der clorsanerstoffver[illegible]brindungen auf einen Drehbaren Platinelektrod. . 35

FESTIGKEITSLEHRE

I. A. RADȚIG : Berechnung statisch unbestinnter Eysteme mit kleinstem Volumen 49

MASCHINENBAU

A. STAMBULEANU : Der ladungsgrad des zylinders der Schnellaufenden verbrennungsmotore 69

M. R. MUSTAFA : Experimental-beitrag zur abreiss-temperatur des schmierfilms 79

M. D. CAZACU : Einfluss der endlichen pleuelstangenlänge auf die förderleistung der kolbenpumpen 97

ENERGETIK

LAZĂR HASCAL: Der Einfluss des Verstmmunggrades der Lichthogenlöschspule auf die Rückkehrspannung der geerdeten Phase, im Falle eines einphasigen 117

ELEKTRONIK

G. RULEA: Messungmethoden der Permitivität und Permeabilität in Microwellen 135

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

MATEMATICĂ

ÜBER DIE PARTIKULÄRE LÖSUNG DER LINEAREN INHOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNG *

I. M. MIU

F. Fazekas und I. Sándor haben in ihren Aufsatz „Über die Lösung der gewöhnlichen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung" [1] neue Methoden zur Bestimmung der partikualären Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung untersucht.

Im nachfolgenden sollen die oben untersuchten Fälle auf lineare inhomogene Differentialgleichungen beliebiger Ordnung erweitert, und auch andere Methoden und Formen der gesuchten partikulären Lösung angegeben werden.

A. Methode der Konstantenvariierung

a) Es sei die Gleichung

$$L_n(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{1}$$

gegeben, worin die Koeffizienten a_j im allgemeinen Funktionen von x sind. Als bekannt wird ein Fundamentalsystem $y_1, y_2 \ldots y_n$ der homogenen Gleichung

$$L_n(y) = 0 \tag{2}$$

angenommen, und nun soll die partikuläre Lösung der Gleichung (1) bestimmt werden.

Im nachfolgenden wird verkürzt

$$\varphi = \varphi(x),\ \bar{\varphi} = \varphi(\xi)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \ldots & \bar{y}_n \\ \bar{y}_1' & \bar{y}_1' & \ldots & \bar{y}_n' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & \bar{y}_n^{(n-2)} \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{vmatrix}, \quad \bar{W}_n = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \ldots & \bar{y}_n \\ \bar{y}_1' & \bar{y}_2' & \ldots & \bar{y}_n' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \bar{y}_1^{(n-2)} & \bar{y}_2^{(n-2)} & \ldots & \bar{y}_n^{(n-2)} \\ \bar{y}_1^{(n-1)} & \bar{y}_2^{(n-1)} & \ldots & \bar{y}_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{3}$$

geschrieben.

* Vorliegender Bericht wurde in der wissensciaftlichen Tagung des Polytechnischen Instituts Bukarest, April 1962, mitgeteilt.

Die bekannte Methode der Konstantenvariierung ergibt für die partikuläre Lösung den Ausdruck

$$y_0 = \int_0^x \overline{f}\, \frac{D_n}{\overline{W}_n}\, d\xi \tag{4}$$

b) Angenommen sei, dass nur n—1 partikulare, linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2 \ldots y$ der homogenen Gleichung (2) bekannt sind, und für diesen Fall sei die partikulare Lösung der Gleichung (1) bestimmt.

Wir setzen

$$y_0 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1} \tag{5}$$

Nach Vornahme der Ableitungen $y_0', y_0'', \ldots y_0^{(n)}$ setzen wir nacheinander:

$$\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p' y_p^{(r)} = 0, \; r = 0, 1, 2, \ldots, n-3 \quad (\text{worin } y_p^0 = y_p) \tag{6}$$

und finden

$$y_0^{(s)} = \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p y_p^{(s)}, \quad s = 1, 2, \ldots n-2$$

$$y_0^{(n-1)} = \sum_{p=1}^{n=1} \lambda_p' y_p^{(n-2)} + \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p y_p^{(n-1)}$$

$$y_0^{(n)} = \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p y_p^{(n)} + \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p' y_p^{(n-1)} + \left[\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p' y_p^{(n-2)} \right]'$$

Durch Einsetzung von y_0 und der Ableitungen in 1) folgt

$$\lambda_1'(y_1^{(n-1)} + a_1 y_1^{(n-2)}) + \lambda_2'(y_2^{(n-1)} + a_1 y_2^{(n-2)}) + \ldots + \lambda_{n-1}'(y_{n-1}^{(n-1)} + a_1 y_{n-1}^{(n-2)}) =$$

$$= f(x) - \left[\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p' y_p^{(n-2)} \right]' \tag{7}$$

Der kürze halber bezeichnen wir

$$\left.\begin{aligned} y_p^{(n-1)} + a_1 y_p^{(n-2)} &= Y_p^{(n-2)} \\ \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p' y_p^{(n-2)} &= u \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und die Gleichung 7) wird

$$\lambda_1' Y_1^{(n-2)} + \lambda_2' Y_2^{(n-2)} + \ldots + \lambda_{n-1}' Y_{n-1}^{(n-2)} = f(x) - u' \tag{7'}$$

Zwischen den Gleichungen 6), der zweiten Gleichung aus 8) und 7′) werden $\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_{n-1}'$ ausgeschieden, und dann folgt

$$u' + \frac{A_{n-1}}{W_{n-1}} u = f(x),$$

worin mit W_{n-1} die Wronskysche Determinante des Systems $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{n-1}$ und

$$A_{n-1} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_{n-1}' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_{n-1}'' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \ldots & y_{n-1}^{(n-3)} \\ Y_1^{(n-2)} & Y_2^{(n-2)} & \ldots & Y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden.

Unter Berücksichtigung einer partikularen Lösen u_0 der Differentialgleichung (9) bilden wir mit den Gleichungen (6) und der zweiten Gleichung aus (8) das System:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p' y_p^{(r)} = 0, \quad r = 0, 1, \ldots n-3 \\ &\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p' y_p^{(n-2)} = u_0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Durch Ausscheidung von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ zwischen (10) und (5) erhält man die Lösung y_0:

$$y_0 = \int_0^x \frac{}{u_0} \frac{D_{n-1}}{\overline{W}_{n-1}} d\xi, \tag{11}$$

worin D_{n-1} und $\overline{W}_{n-1}$ sich auf $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$, beziehen und die von (3) gegebene Bedeutung besitzen.

c) Nun sei der allgemeinste Fall betrachtet, dass m partikulare, linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_m$ der homogenen Gleichung (2) $(m < n)$ und eine partikulare Lösung der reduzierten Differentialgleichung bekannt sind.

Wir setzen

$$y_0 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_m y_m. \tag{12}$$

Nach Vornahme der Ableitungen $y_0', y_0'' \ldots y_0^{(n)}$ unde sukzessiver Einsetzung von

$$\sum_{p=1}^{m} \lambda_p' y_p^{(r)} = 0, \quad r = 0, 1, 2, \ldots m-2 \tag{13}$$

folgt:

$$y_0^{(k)} = \sum_{p=1}^{m} \lambda_p y_p^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots m-1$$

$$y_0^{(m)} = \sum_{p=1}^{m} \lambda_p y_p^{(m)} + u_1$$

$$y_0^{(m+1)} = \sum_{p=1}^{m} \lambda_p y_p^{(m+1)} + u_1' + u_2$$

$$y_0^{(m+2)} = \sum_{p=1}^{m} \lambda_p y_p^{(m+2)} + u_1'' + u_2' + u_3$$

$$\vdots$$

$$y_0^{(m)} = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p y_p^{(n)} + u_1^{(n-m)} + u_2^{(n-m+1)} + \ldots + u_{n-m}' + u_{n-m+1}$$

worin

$$\sum_{p=1}^{m} \lambda_p' y_p^{(s)} = u_{s-m+2}, \quad s = m-1, \; m, \; m+1, \ldots, \; n-1. \tag{14}$$

bezeichnet wurde.

Setzt man die Ableitungen in Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &u_1^{(n-m)} + u_2^{(n-m-1)} + \ldots + u_{n-m}' + u_{n-m+1} + a_1 (u_1^{(n-m-1)} + \ldots + \\ &+ u_{n-m-1}' + u_{n-m}) + \ldots + a_{n-m-1} (u_1' + u_2) + a_{n-m} u_1 = f(x) \end{aligned} \tag{15}$$

Wir betrachten nun die aus den Gleichungen (13), der ersten Gleichung (14) und dann nacheinander aus je einer der übrigen Gleichungen (14) gebildeten Systeme. Es entstehen $n-m$ Gleichungssyteme, aus denen $u_2, u_3 \ldots u_{n-m+1}$ als Funktion von u_1 zu finden sind. Hieraus ergibt sich

$$u_j = \frac{W_m^j}{W_m} u_1 = \eta_j u_1, \quad j = 2, 3, 4, \ldots, n-m+1 \tag{16}$$

worin

$$W_m^j = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_m' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_m'' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_1^{(m-2)} & y_2^{(m-2)} & \ldots & y_m^{(m-2)} \\ y_1^{(m+j-2)} & y_2^{(m+j-2)} & \ldots & y_m^{(m+j-2)} \end{vmatrix}$$

Setzt man u_j aus (16) in (15) ein, so ergibt sich die reduzierte Gleichung

$$u_1^{(n-m)} + (\eta_2 u_1)^{(n-m-1)} + \ldots + (\eta_{n-m} u_1)' + \eta_{n-m+1} u_1 + \\ + a_1 [u_1^{(n-m+1)} + (\eta_2 u_1)^{(n-m-2)} + \ldots + (\eta_{n-m-1} u_1)' + \eta_{n-m} u_1] + \quad (17) \\ + \ldots + a_{n-m-1} [u_1' + \eta_2 u_1] + a_{n-m} u_1 = f(x).$$

Kennt man eine partikulare Lösung u_{01} der reduzierten Differentialgleichung (17), so ergivt sich die partikulare Lösung der Gleichung (1) aus Ansatz (12), in welchen die Funktionswerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ eingesetzt werden, die ihrerseits aus dem durch die Gleicungen (13) und die erste Gleicung aus (14) gebildeten System bestehen.

Unter Anweidung der Ansätze (3) lautet dann die partikulare Lösung der Gleichung (1) :

$$y_0 = \int_0^x \frac{D_m}{u_{01} W_m} d\xi \quad (18)$$

Hierzu sei bemerkt, dass die in allen drei Fällen durch die Formeln (4), (11) und (18) erzielte Form fur y_0 die gleiche ist.

B. Andere Methoden

In [2] habe ich eine neue Methode zur Bestimmung einer partikularen Lösung der Gleichung (1) für den Fall angegeben, dass ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung (2) bekannt ist. Diese Methode soll nun auf andere interessante Fälle erweitert werden.

a) Zur Bestimmung der partikularen Lösung y_0 der Gheichung (1) bei bekanntem Fundamentalsystem $y_{01}, y_{02} \ldots y_{0n}$ der homogenen Gleichung (2) wird nachstehende Tabelle aufgestellt :

0	y_{01}	y_{02}	y_{03}	y_{04}	—	$y_{0,n-1}$	y_{0n}
1		$y_{12} = \left(\frac{y_{02}}{y_{01}}\right)'$	$y_{13} = \left(\frac{y_{03}}{y_{01}}\right)'$	$y_{14} = \left(\frac{y_{04}}{y_{01}}\right)'$	—	$y_{1,n-1} = \left(\frac{y_{0,n-1}}{y_{01}}\right)'$	$y_{1n} = \left(\frac{y_{0n}}{y_{01}}\right)'$
2			$y_{23} = \left(\frac{y_{13}}{y_{12}}\right)'$	$y_{24} = \left(\frac{y_{14}}{y_{12}}\right)'$	—	$y_{2,n-1} = \left(\frac{y_{1,n-1}}{y_{1,2}}\right)'$	$y_{2n} = \left(\frac{y_{1n}}{y_{12}}\right)'$
3				$y_{34} = \left(\frac{y_{24}}{y_{23}}\right)'$	—	$y_{3,n-1} = \left(\frac{y_{2,n-1}}{y_{23}}\right)'$	$y_{3n} = \left(\frac{y_{2n}}{y_{23}}\right)'$
—					—	—	—
$n-1$							$y_{n-1,n} = \left(\frac{y_{n-1,n}}{y_{n-2,n-1}}\right)'$

Das partikulare Integrale ist

$$y_0 = y_{01}\int y_{12}dx\int y_{23}dx\ldots\int y_{n-1,n}dx\int\frac{f(x)dx}{y_{01}y_{12}y_{23}\cdots y_{n-1,n}}, \tag{19}$$

wobei die Quatraturen von rechts nach links vorgenommen werden.

In der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

finden F. Fazekas und I. Sándor [1]:

$$y_0 = y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}dx\int f(x)y_1e^{\int p dx}dx \tag{20}$$

Die partikulare Lösung der Gleichung zweiter Ordnung nach Formel (19) wird

$$y_0 = y_{01}\int y_{12}dx\int\frac{f(x)}{y_{01}y_{12}}dx \tag{20'}$$

Nun soll der Beweis erbracht werden, dass die Formeln (20) und (20′) identisch sind.

Die Folmel (20) kann auch in die Form

$$y_0 = y_1\int y_1^{-2}e^{-\int p dx}dx\int\frac{f(x)dx}{y_1y_1^{-2}e^{-\int p dx}} \tag{20''}$$

gebracht werden. Bei einem Vergleich von (20″) mit (20′) und unter Berücksichtigung der Beziehung von Liouville folgt

$$y_{12} = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = y_1^{-2}e^{-\int p dx}$$

b) Nun sei der Fall angenommen, das $n-1$ partikulare Lösungen $y_{01}, y_{02}\ldots y_{0,n-1}$ der homogenen Gleichung (2) bekannt sind, und davon ausgehend eine partikulare Lösung y_0 der Gleichung (1) bestimmt werden.

In der Gliechung (1) nehmen wir den Funktionstausch

$$y = y_{01}u_1 \tag{21}$$

vor und erhalten:

$$y_{01}u_1^{(n)} + (ny_{01}' + a_1y_{01})u_1^{(n-1)} + A_1u_1^{(n-2)} + A_2u_1^{(n-3)} + \ldots + A_{n-1}u_1' = f(x) \tag{22}$$

Aus Beziehung (21) folgt, dass die homogene Gleichung der Gleichung (22) für u_1' die partikularen Lösugen $y_{12}, y_{13}\ldots y_{1,n-1}$ zulässt.

In Gleichung (22) nehmen wir den Funktionswechsel

$$u_1' = y_{12}u_2 \tag{23}$$

vor und erhalten

$$\begin{aligned} y_{01}y_{12}u_2^{(n-1)} + [(n-1)\,y_{01}y_{12}' + ny_{01}'y_{12} + a_1y_{01}y_{12}]u_2^{(n-2)} + \\ + B_1u_2^{(n-3)} + \ldots + B_{n-2}u_2' = f(x) \end{aligned} \tag{24}$$

Analog folgt aus Bezeihung (23), dass die homogene Gleichung der Gleichung (24) für u_2' die partikuleren Lösungen $y_{23}, y_{24} \ldots y_{2,n-1}$ zulässt.

Mit Gliechung (24) fahrem wir in gleicher Weise fort, und nehmen nacheinander die Funktionstausche

$$u_2' = y_{23}u_3,\ u_3' = y_{34}u_4, \ldots,\ u_{n-2}' = y_{n-2,n-1}u_{n-1}$$

vor. Beim letztem Funktionstausch wird $u_{n-1} = z$ gesetzt und die Gleichung

$$y_{01}y_{12}\ldots y_{n-2,n-1}z'' + (2y_{01}y_{12}\ldots y_{n-3,n-2}y'_{n-2,n-1} + \\ + 3y_{01}y_{12}\ldots y_{n-4,n-3}y'_{n-3,n-2}y_{n-2,n-1} + \ldots + ny'_{01}y_{12}y_{23}\ldots y_{n-2,n-1} + \\ + a_1y_{01}y_{12}y_{23}\ldots y_{n-2,n-1})\,z' = f(x) \tag{25}$$

erzielt.

Berücksichtigt man die sukzessiven Funktionswechsel und bezeichnet mit z_0 eine partikulare Lösung der Gleichung (25), so erhält man

$$y_0 = y_{01}u_1 = y_{01}\int y_{12}u_2dx = y_{01}\int y_{12}dx\int y_{23}u_3dxx = \ldots \\ y_0 = y_{01}\int y_{12}dx\int y_{23}dx\ldots\int y_{n-2,n-2}z_0dx \tag{26}$$

Durch Integration der Differentialgleichung (25) erhält man dann die partikulare Lösung:

$$z_0 = \int \frac{e^{-\int a_1dx}}{y_{01}^n y_{12}^{n-1} y_{23}^{n-2}\ldots y_{n-2,n-1}^2}dx \int f(x)y_{01}^{n-1}y_{12}^{n-2}\ldots y_{n-2,n-1}e^{\int a_1dx}dx.$$

Setzt man diesen Wert in Formel (26) ein, so folgt

$$y_0 = y_{01}\int y_{12}dx\int y_{23}dx\ldots \\ \ldots\int y_{n-2,n-1}dx\int \frac{e^{-\int a_1dx}dx}{y_{01}^n y_{12}^{n-1}\ldots y_{n-2,n-1}^2}\int f(x)y_{01}^{n-1}y_{12}^{n-2}\ldots y_{n-2,n-1}e^{\int a_1dx}dx \tag{27}$$

Diese Formel liefert die partikulare Lösung y_0 der inhomogenen Gleichung in Funktion von $n-1$ Lösungen ihrer homogenen Gleichung.

c) Betrachten wir nun den Fall, dass p partikulare Lösungen der homogenen Gleichung (2) und eine partikulare Lösung der reduzierten inhomogenen Gleichung bekannt sind, und ferner den Fall dass n Lösungen der homogenen Gleichung bekannt sind. Für diesen Letzteren Fall wenden wir eine zusammengestetzte Methode an, u. zw. bis zu einem gewissen Punkt unsere Methode und anschliessend die Methode von Lagrange.

Dementsprechend wird die Aabelle bis zum Punkt $p-1$ einschleisslich ($p \leqslant n$) aufgestellt. Durch p Funktionstausche wie in b) gelangen wir zur reduzierten Differentialgleichung:

$$y_{01}y_{12}\ldots y_{p-1,p}z^{(n-p+1)} + A_1z^{(n-p)} + A_2z^{(n-p-1)} + \ldots + A_{n-p}z' = f(x) \tag{28}$$

Zwei Fälle sollen näher betrachtet werden:

1° Der Fall, dass nur p partikulare Lösungen der homogenen Gleichung (2) und eine partikulare Lösung der reduzierten Gleichung bekannt sind.

Gelingt es uns, in diesem Falle eine partikulare Lösung z_0 der reduzierten Differentialglieichung (28) zu finden, dann lautet die partikulare Lösung der Gleichung (1)

$$y_0 = y_{01}\int y_{12}dx\int y_{23}dx \ldots \int y_{p-1,p}y_0dx \tag{29}$$

Anmerkungen: Es ist ersichtlich, das die Formeln (19), (26), (27), (29) als allgemeine Form den gleichen Aufbau haben; wird eine davon geschnitten, so folgt:

α) Der druch die Integrale rechts des Schinttes gebildete Ansatz drückt eine partikulare Lösung der inhomogenen Gleichung aus, die durch die angegebenen Transformationnen aus Gleichung (1) bis zum vorgenommenen Schnitt erzielt wird.

β) Der durch die Integrale links des Schnittes gebildete Ansatz drückt eine partikulare Lösung der homogenen Gleichung (2) aus.

γ) Im Falle zweier Schnitte durch obige Formeln, die äusseren Ansätze haben die in α), β) angegebene Deutung.

Der mittlere Ansatz ist eine partikulare Lösung der reduzierten homogenen Differentialgleichung, entsprechend dem linken Schnitt.

2° Wird die zusammengestetzte Methode in Hypothese c) angewandt, so muss die partikulare Lösung z_0 durch die Methode von Lagrange bestimmt werden. Die homogene Differentialgleichung der Gleichung (28) lässt für z' die partikulare Lösungen:

$$z_1' = u_1 = y_{p,p+1},\ z_2' = u_2 = y_{p,p+2},\ \ldots\ z_{u-p}' = u_{n-p} = y_{p,n}$$

zu. Diese Werte sind auf Zeile p der Tabelle angegeben.

Wir setzen an:

$$D_{n-p} = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \ldots & \bar{u}_{n-p} \\ \bar{u}_1' & \bar{u}_2' & \ldots & \bar{u}_{n-p}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{u}_1^{(n-p-2)} & \bar{u}_2^{(n-p-2)} & \ldots & \bar{u}_{n-p}^{(n-p-2)} \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_{n-p} \end{vmatrix},$$

$$\overline{W}_{n-p} = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \ldots & \bar{u}_{n-p} \\ \bar{u}_1' & \bar{u}_2' & \ldots & \bar{u}_{n-p}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{u}_1^{(n-p-2)} & \bar{u}_2^{(n-p-2)} & \ldots & \bar{u}_{n-p}^{(n-p-2)} \\ \bar{u}_1^{(n-p-1)} & \bar{u}_2^{(n-p-1)} & \ldots & \bar{u}_{n-p}^{(n-p-1)} \end{vmatrix}$$

Durch Anwendung der Formel (4) folgt

$$z_0' = u_0 = \int_0^x \frac{\overline{f}}{\overline{y}_{01}\overline{y}_{12}\cdots\overline{y}_{p-1,p}} \cdot \frac{D_{n-p}}{\overline{W}_{n-p}}\, d\xi.$$

Setzt man den Wert von z_0 in (29) ein, so erhält man

$$y_0 = y_{01}\int y_{12}dx \int y_{23}dx \ldots \int y_{p-1,p}dx \int dx \int_0^x \frac{\overline{f}\, D_{n-p}}{\overline{y}_{01}\overline{y}_{12}\cdots\overline{y}_{p-1,p}\overline{W}_{n-p}}\, d\xi \quad (30)$$

d) Aufstellung der homogenen Gleichung (2) in Form eines Produktes von Differentialfaktoren mit Hilfe der Tabellenelemente.

Die Gleichung (2) kann in die Form

$$(D^1 - m_nD^0)(D^1 - m_{n-1}D^0)\ldots(D^1 - m_2D^0)(D^1 - m_1D^0)\, y = 0 \quad (31)$$

gebracht werden.

Nun sollen die Werte von m_k $(k=1, 2\ldots n)$, bestimmt werden.

In Gleichung (31) setzen wir $y=y_{01}$ und daraus ergibt sich:

$$(D^1 - m_1D^0)\, y_{01} = 0,$$

woraus

$$m_1 = \frac{y_{01}'}{y_{01}}$$

folgt.

In (31) nehmen wir die Funktionsänderung $y=y_{01}z$ vor und erhalten die Gleichung

$$(D^1 - m_nD^0)(D^1 - m_{n-1}D^0)\ldots(D^1 - m_2D^0)\, y_{01}z' = 0$$

die für die Funktion z' das Fundamentalsystem $y_{12}, y_{13}\ldots y_{1n}$ zulässt.

Setzen wir $z'=y_{12}$ so folgt:

$$(D^1 - m_2D^0)\, y_{01}y_{12} = 0$$

woraus sich

$$m_2 = \frac{(y_{01}y_{12})'}{y_{01}y_{12}}$$

ergibt.

In gleicher Weise fortfahrend, finden wir die Werte von m_k:

$$m_k = \frac{(y_{01}y_{12}\cdots y_{k-1,k})'}{y_{01}y_{12}\cdots y_{k-1,k}}, \quad k = 1, 2, \ldots n \quad (32)$$

Die Lösung y_0 der inhomogenen Differenzialgleichung (1) in Form (19) kann auch aus der Formel

$$y_0 = e^{\int m_1dx}\int e^{\int (m_2 - m_1)dx}dx \ldots \int e^{\int (m_n - m_{n-1})dx}dx \int f(x)\, e^{-\int m_n dx}dx \quad (33)$$

erzielt werden, wenn die Werte m_k aus (32) berücksichtigt werden.

Die Werte von m_k können auch noch in folgender Weise erzielt werden;

Aus (31) erhalten wir

$$(D^1 - m_n D^0)(D^1 - m_{n-1}D^0)\dots(D^1 - m_{k+1}D^0)[D^k - \\ -\left(\sum_1^k m_j\right) D^{k-1} + AD^{k-2} + \dots + LD^0]\, y = 0.$$

Wendet man die Beziehung von Liouville auf den letzten Faktor an, so erhält man

$$\sum_1^k m_i = \frac{W_k'}{W_k}$$

Hiervon zieht man $\sum_1^{k-1} m_j$ und erhält die Formel von Floquet:

$$m_k = \frac{d}{dx} \ln \frac{W_k}{W_{k-1}} \tag{34}$$

Aus dem Vergleich der Formel (32) und (34) folgt:

$$y_{01} y_{12} y_{23} \dots y_{k-1,k} = \frac{W_k}{W_{k-1}} \tag{35}$$

und aus dieser Formel erhält man:

$$y_{k-1,k} = \frac{W_k W_{k-2}}{W_{k-1}^2} \tag{36}$$

Berücksichtigt man in Formel (27) die Beziehung (35) so erhält man folgenden Ausdruck für y_0:

$$y_0 = y_{01} \int y_{12} dx \int y_{23} dx \dots \int y_{n-2,n-1} dx \int \frac{W_{n-2} e^{-\int a_1 dx}}{W_{n-1}^2} dx \int f(x)\, W_{n-1} e^{\int a_1 dx} dx \tag{37}$$

Die bezüglich des Schnittes der Formeln (19), (26), (27), (29) angeführten Bemerkungen behalten auch für diese Formel ihre Gültigkeit. Wird demnach das letzte Integral der Formel (37) fortgelassen, so erhält man die n^{te} partikulare Lösung der homogenen Gleichung (2).

Für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung wird im Falle, dass eine partikulare Lösung y_1 ihrer homogenen Gleichung bekannt ist, die Formel (37)

$$y_0 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a_1 dx} dx \int f(x)\, y_1 e^{\int a_1 dx} dx. \tag{38}$$

Für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung wird im Falle, dass 2 partikulare Lösungen y_1, y_2 ihrer homogenen Gleichung bekannt sind, die Formel (37)

$$y_0 = y_1 \int \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' dx \int \frac{y_1}{W_2^2} e^{-\int a_1 dx} dx \int f(x) W_2 e^{\int a_1 dx} dx \qquad (39)$$

worin W_2 die Wronskische Determinante des Systems y_1, y_2 ist.

Mathematische Katheder

SCHRIFTTUM:

[1] *F. Fazekas und I. Sándor:* „Über die Lösung der gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung (Einige Arbeiten des Lehrstuhles für Mathematik im Lehrjare 1956—1957, Budapest 1958).

[2] *Ion M. Miu:* O nouă metodă pentru determinarea unei soluții particulare la o ecuație diferențială lineară neomogenă (Gazeta Matematică și Fizică. București 1957, nr. 6).

О ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

(Резюме)

Даются методы определения частного решения для линейного неоднородного уравнения, когда известны решении однородноб уравнения.

В случае если известны p частных решений однородного уравнения, таким образом, что $p < n-4$ где — степень уравнения необходимо знать и одно частное решение неоднорооного приведенного уравне ия.

CONCERNING THE PARTICULAR SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL STRAIGHT NON — HOMOGENUOUS EQUATION

(Summary)

In this work are studied new methods for the determination of a particular solution of the differential straight non-homogenuous equation, for the cases when a number of particular solutions, lower or equal to the order of homogenuous equations are known.

CONCERNANT LA SOLUTION PARTICULIÈRE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES INHOMOGENES

(Résumé)

Dans cet ouvrage on etudie de nouvelles méthodes pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle linéaire inhomogène, pour les cas où sont connus un nombre de solutions plus petit ou égal à l'ordre de l'équation homogène.

Dans le cas où sont données un nombre de solutions de l'équation homogène plus petit que n—1 (n etand l'ordre d'équation), il est nécessaire de connaître aussi une solution particulière de l'équation réduite inhomogène.

ÜBER DIE PARTIKULÄRE LÖSUNG DER LINEAREN, INHOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

(Zusammenfassung)

In diesem Ansatz werden neue Methoden dür die Feststellung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung studiert, für die Fälle, dass eine kleinere oder gleiche Anzahl partikulären Lösungen bekannt sind, gegenüber der Ordnung der Differentialgleichung.

Im Falle, dass eine Anzahl Lösungen der homogenen Differentialgleichungen bekannt ist, kleiner als n—1 (won die Ordnung der Differentialgleichung ist) ist es notwendig auch eine partikulare Lösung der reduzierten Differentialgleichung zu kennen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

THE DESCRIPTIVE ASPECT OF INTERPRETATION OF LOBACEVSKI'S GEOMETRY ON A HYPERBOLOID WITH TWO SHEETS *

AURELIAN TĂNĂSESCU

In the work „Interpretation of Lobacevski's Geometry on a hyperboloid with two sheets" (the R.P.R. Academy's Paper, Volume IV, pag. 11—12, 1954) N. N. Mihăileanu shows how it is possible to interpret Lobacevski's Geometry on a hyperboloid sheet with two sheets.

This problem is analitic studied by Maria Neumann in the work „On interpretation of Lobacevski's Geometry on hyperboloid" (Scientific Bulletin, Section of Mathematics and Physics Science Volume VI, No. 4).

In this work we will study descriptively in the Monge common way the interpretation of Lobacevski's Geometry on hyperboloid with two sheets.

We will give the descriptive representations on the secant straight lines and not secant or on parallels and will shall put into evidence descriptively if the surface planes of these „straight lines" intersect themselves by interior lines, exterior lines or generators of asymptote cone to the surface.

We shall also give the means of the descriptive representation of the propre circles, of the oricycles and that of the equidistances. On the basis of these elements we are obliged, in the first place, to enterprise a descriptive study of the hyperboloid with two sheets, and in the second place we shall show that many of the problems of this interpretation are reduced under the descriptive aspect to the usual constructions in the byortogonal system of the Monge projection.

Without limiting the generality of the problem, we will consider the rotative hyperboloid with two sheets wheres (s, s') is the exremity of the asymptote cone which has as frontal generators the straght lines G (g_1, g_1'). Let's M (m, m') an arbitrary point of the principle meridian of the surface (fig. 1).

* Paper presented at the 7-th scientific session of the Polytechnical Institute Bucarest, as well as at the Architectural Institute Bucarest (7—8 april and 2—4 march 1962).

Under these circumstances the surface is completely defined in a descriptive way. Because the branches of a hyperbola and its asymptotes determine on an arbitrary secant equal segments (M. Botez, The Book of Descriptive Geometry), (page 192, 1958), we can therefore determine many other points of the main meridian which we turn back from the level rotation on certain points of the surface. For exemple N (n, n') or $N_1(n_1, n_1')$.

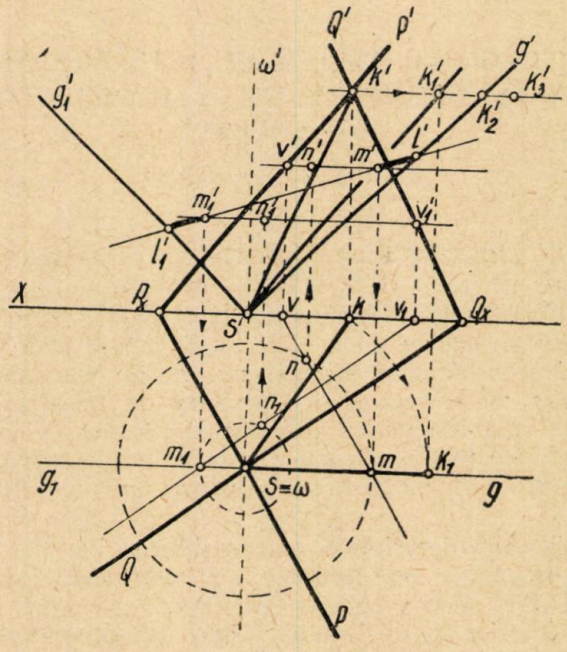


Fig. 1

1. The „straight" is named the interesection of a sheet of the hyperboloid to an arbitrary plane, drown through the centre of the surface.

Two „straights" are secant, not secant or parallel, owing to the way, in which their planes interesect themselves after an interior, exterior straight or generator to the asymptote cone.

We define descriptively the „straight" by its plane PP_xP' which always contains the centre $S(s, s')$ and two points of the surface, for exemple, $M(m, m')$ and $N(n, n')$ situated on the same parallel (fig. 1). The straights defined by the planes PP_xP' and QQ_xQ' interesect themselves after straight $(sk, s'k')$ which we rotate in a frontal position $(sk, s_1' k_1')$. Of the vertical projection the result is that this straighrt is interior to asymptote cone. Therefore, the two descriptively defined „straights" by planes P and Q are secant. For a movement of the vertical projection k' into k_2' or into k_3' „the straights" would respectively be parallel or not secant.

Through a certain point of the surface we may draw two parallels to a given straight. These parallels are the straight lines situated in the planes defined by the point and by the generators asymptote to the cone, obtained by the interesection with the given „straight" plane.

On the basis of the elements established above we can descriptively show that through a certain point of the surface we can draw two parallels to a given „straight". Plane PP' which defines the „straight"

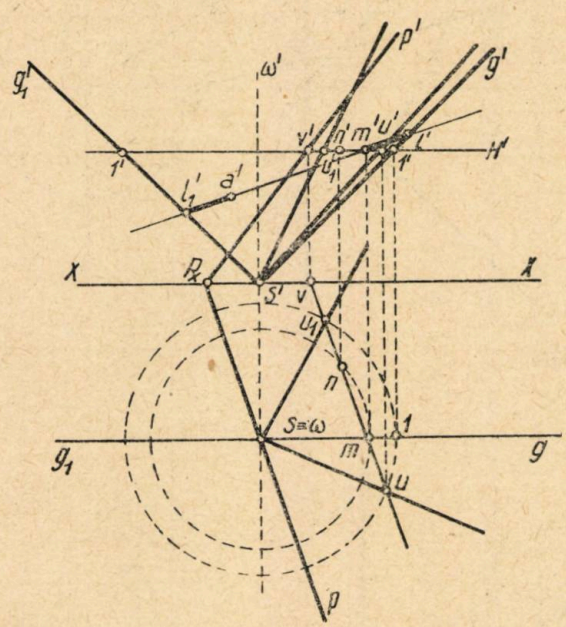


Fig. 2

(fig. 2) intersects itself with asymptote cone after the generant $(su, s'u')$ and (su_1, su_1'). The intersected straight line, between the planes defined by the type $(sk_1, s'k_2')$ (fig. 1).

2. Maria Neumann has shown that between the interpretation on the hyperboloid with two sheets and Klein's interpretation of Lobacevski's Geometriy a biunivocal correspondance exists.

Let equilateral hyperboloid be defined by the asymptote cone and the summit (t, t') of the hyperboloid (fig. 3 a). The tangent plane T' on the extremity of the hyperboloid interesect itself with the asymptote cone after circle $\Gamma\,\Gamma'$ of diameter $1'\,1'$.

Using the arbitrary secant $a'\,t'$ we determine the point (m_1', m_1) of the main meridian and trough this the real point (m, m') of the surface. The straight $D(d, d')$ which unites point (m, m') to the centre $S(s, s')$ of the hyperboloid ittersect itself with the tangent plane T' in point $N(n, n')$ situated in the interior of circle.

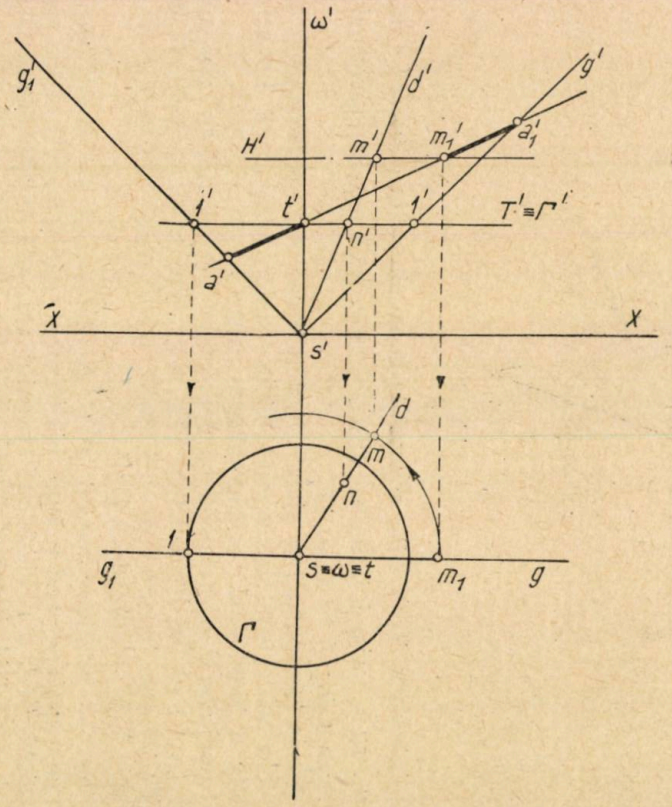

ω'
g'1
d'
g'
H'
m'
m'1
a'1
1'
t'
T'≡Γ'
n'
a'
X
X
s'
d
m
n
1
g1
S≡ω≡t
m1
g
Γ

Fig. 3 *a*

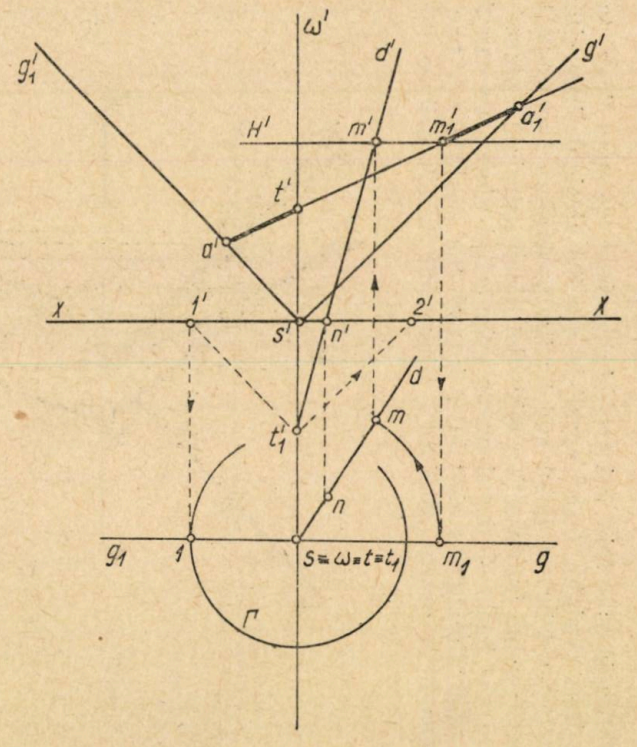

ω'
g'1
d'
g'
H'
m'
m'1
a'1
t'
a'
X
X
1'
2'
s'
n'
d
m
t'1
n
g1
1
S≡ω≡t≡t1
m1
g
Γ

Fig. 3 *b*

This circle Γ is the descriptive imagine of the absolute as seen from the Klein interpretation of Lobacevski's Geometry. To any point (n, n') of the circle interior $\Gamma\,\Gamma'$ a single real point (m, m') corresponds to it on the hyperboloid sheet and reciprocally. On the basis of this property we have on hand a new means by which we can descriptively represent current points on the hyperboloid sheet.

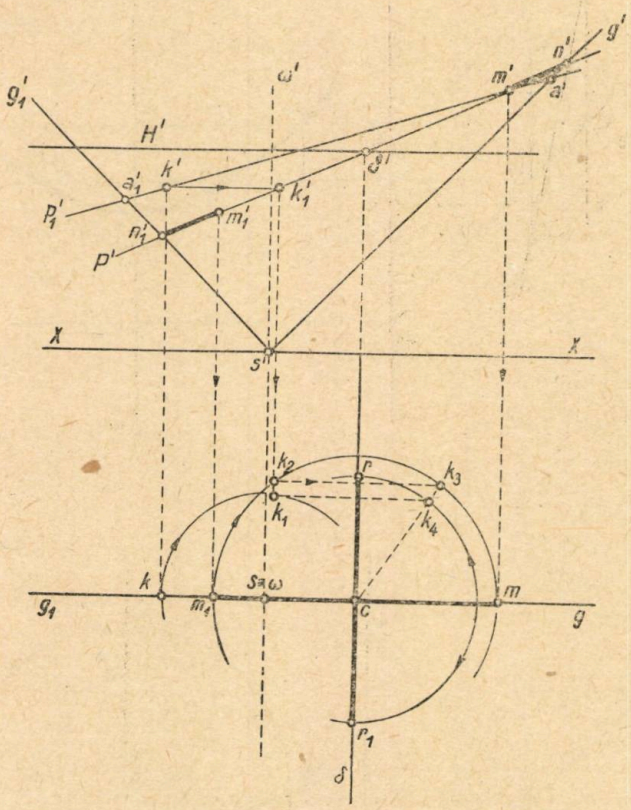


Fig. 4

To a straight line of the Klein plane corresponds on the hyperboloid the interesection of the hyperboloid with the plane which passes through the centre and the given straight-line.

We can also consider Kagan's interpretation of Lobacevski Geometry (fig. 3 b).

3. We call „circle" of the surface the intersection of sheet to an arbitrary plane. Let us determine the axes m, m_1 and r, r_1 in the horizontal projection of a propre „circle" (fig. 4). This propre „circle" is defined by the head arbitrary plane PP'.

An other head plane $P_1\,P_1'$ guide us to the arbitrary point (k_1, k_1').

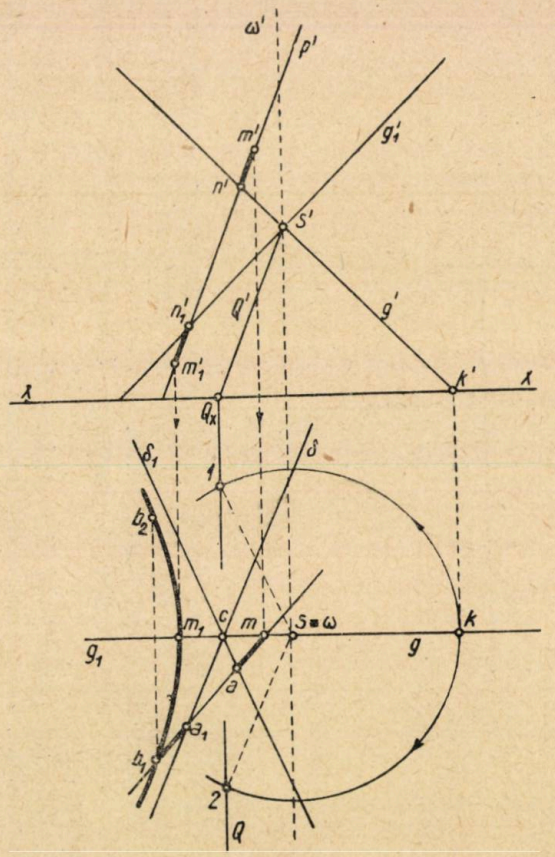

ω'
p'
m'
n'
g'₁
s'
n'₁
Q'
g'
m'₁
x
k'
x
Qₓ
δ₁
δ
1
b₂
m₁
c
m
s≡ω
k
g₁
g
a
a₁
b₁
2
Q

Fig. 5

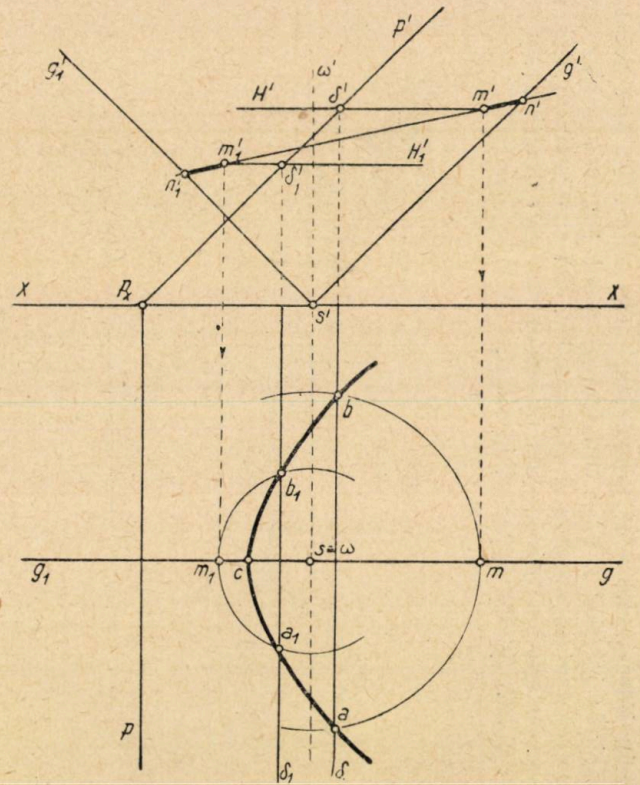

p'
g'₁
ω'
H'
δ'
m'
g'
n'
m'₁
H'₁
n'₁
δ'₁
x
Pₓ
x
s'
b
b₁
s≡ω
g₁
m₁
c
m
g
a₁
a
p
δ₁
δ

Fig. 6

The parallels tot the axes drawn from k_1 give us successively the following points k_2, k_3 and k_4 uniting c with k_3. We find r and r_1 on the head straigt (δ, δ').

4. In order to determine an equidistance b_1, m_1, b_2 (fig. 5) we will consider both sheets of a defined surface by the point (m, m') of the principal meridian and the asymptote cone. The asymptotes δ and δ_1 of the equidistance can usually be obtained and the current points of the equidistance appear on the basis of the hyperboloid properties mentioned above.

5. In the same way we can determine the oricycles as for example oricycle $a\ a_1\ cb_1\ b_2$ (fig. 6) obtained dividing in sections the surface with the head plane PP'. The surface is defined by the point (m, m') of the principal meridian and the asymptote cone.

The current points a_1 and b_1, of the oricycle are obtained utilising the level plane H_1.

Descriptive Geometry Chair

REFERENCES

[1] *B. V. Kutusov* — Geometry and basic elements of the geometry. Technical Publishing, 1952.

[2] *N. V. Efimov* — The superior geometry. Technical Publishing, 1952.

[3] *V. F. Kagan* — Osnovania Geometrii II, Moscova, 1956, p. 317—321.

[4] *N. N. Mihăileanu* — Noneuklidean geometry. Technical Publishing of the Academy R.P.R. 1954.

[5] *N. N. Mihăileanu* — Interpretarea geometriei lui Lobaceski pe un hiperboloid cu două pînze. Comunicările Academiei R.P.R., Tomul IV, nr. 11—12, 1954.

[6] *Maria Neumann* — Despre interpretarea geometriei lui Lobacevski pe un hiperboloid. Buletin ştiinţific, Secţiunea de Ştiinţe Matematice şi Fizice, Tomul VI, 1954.

[7] *D. D. Morduhai* — Boltoskoi — Nacertatelnaia Gheometria v prostranstve Lobacevskovo, Moskva, 1955.

[8] *D. A. Skopeţ* — Osnovî Nacertatelnoi Gheometrii prostranstva Lobacevscovo, Moskva, 1955.

[9] *Aurelian Tănăsescu* — The descriptive aspect of Lobacevski's Geometry on the interpretation of Poincare's space geometry. Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, Tomul XXIII, Fascicola 4, 1961.

НАЧЕРТАТЕЛЬНЫЙ АСПЕКТ ТОЛКОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕСКОГО НА ДВУПОЛОСТНОМ ГИПЕРБОЛОИДЕ

(Резюме)

В настоящей работе исследуется с начертательной точки зрения толкование геометрии Лобачевского на двуполостном гиперболоиде. Приводятся начертательные представления для секущих, иесекущих и параллельных „прямых“ выявляясь в то же время, начертательно, пересекаются ли плоскости этих „примх“ по внутренним, внешним или образующим прямым конуса, асимптотного поверхности.

Также приводятся средства начертательного представления соттвенных „окружностей“ опициклов и линий равных расстояний.

На основание этих элементов показывается как можно исследовать начертательно эту геометрию, которая совмещается с планиметрией Лобачевского на одном полотне двуполостного гиперболоида.

THE DESCRIPTIVE ASPECT OF INTERPRETATION OF LOBACEVSKI'S GEOMETRY ON A HYPERBOLOID WITH TWO SHEETS

(Summary)

In this work, we descriptively study Lobacevshi's geometrical interpretation on a two sheets hyperboloid.

The descriptive representations for straight lines, secants, not secants and parallels is given, showing at the same time in a clear way if the planes of these „straights“ intersect themselves after the inner, external straight lines or generant of the surface of the asymptote cone.

We also give the means by which we can descriptively represent the suitable „circles“, the oricycles and equidistances.

On the basis of these elements it is shown how we can descriptively study this Geometry which coincides to Lobocevschi's plane, geometry on a sheet of the hyperboloid with two sheets.

L'ASPECT DESCRIPTIF DE L'INTERPRÉTATION DE LA GÉOMÉTRIE DE LOBATCHEWSKI SUR UN HYPERBOLOÏDE À DEUX NAPPES

(Résumé)

Dans cet ouvrage nous étudions descriptif l'interprétation de la Géométrie de Lobatchewski sur un hyperboloïde à deux nappes.

Nous montrons les représentations descriptifs des „droites“ incidentes, nonincidentes et parallèles. Aussi nous montrons descriptif que les plans qui contienent ces „droites“ ont des droites d'intersections qui sont ou

génératrices du cône asymptot ou bien des droites intérieures ou extérieures par rapport avec ce cône.

Nous donnons les représentations descriptifs pour les „cercles" propres, pour les horicycles et pour les équidistantes.

Basées sur ces éléments nous pouvons étudier descriptif cette Géométrie qui coïncide avec la Géométrie du plan de Lobatchewski sur une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes.

DIE INTERPRETATION DER LOBACEVSCHISCHEN GEOMETRIE AUF EINEN ZWEISCHALIGEN HYPERBOLOID VOM STANDTPUNKTE DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird die Interpretation der Lobacevschischen Geometrie auf einem zweischalingen Hyperboloid darstellend untersucht.

Es werden scheindende Geraden dargestellt, ebenso nichtschneidende und parallele Gerade.

Dabai wird darstellend hervorgehoben ob die Ebenen dieser Geraden sich nach inneren, äusseren Geraden oder nach den Erzeugenden des Asymptoten-Kegels schneiden.

Ebenso werden die Mittel für die Darstellung der Eingenkreise, der Orizyklen und der Echidistanten angegeben.

Auf Grund dieser Elemente wird gezeigt wie diese Geometrie, welche mit der ebenen Lobacevschischen Geometrie auf einer Schale eines zweischaligen Hyperboloides zusammenfällt, untersucht werden kann.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

INFLUENȚA ULTRASUNETELOR ASUPRA PROCESELOR DE ELECTROD LA FORMAREA COMPUȘILOR OXIGENAȚI AI CLORULUI PE ELECTROD DE PLATINĂ ROTATIV

STANCU LICĂ, GHERGHINA TUDORACHE

În ultimul timp folosirea ultrasunetelor pentru diferite aplicații în tehnică, a luat o amplă dezvoltare. În lucrarea sa „Der Ultraschall" Bergman (1) a consacrat un întreg capitol referitor la acțiunea ultrasunetelor asupra electroliților, electrocineticei și depunerilor electrochimice.

În această lucrare se arată că Debye (2) este primul autor care în anul 1932, a aplicat ultrasunetele potențialului ce ia naștere la contactul dintre un metal și electrolit.

Debye presupunea că ionii mai grei decît solvatul trebuie să opună forța lor de inerție, mișcării provocate de ultrasunete. Într-un cîmp de unde staționare, ionii trebuie să se acumuleze într-un plan situat la o distanță de o jumătate de lungime de undă.

Un electrod care se deplasează perpendicular pe acest plan, trebuie să ia un potențial care variază sinusoidal cu poziția sa, deoarece acest potențial depinde de concentrația ionilor.

Debye a făcut un calcul pentru a evalua acest potențial, ținînd seama de toate forțele care acționează asupra fiecărui ion și calculînd numarul de ioni în fiecare element de volum, a ajuns la expresia:

$$\varphi = \frac{\frac{\sum m_i n_i e_i}{\varrho_i}}{\Delta} Uv \frac{\frac{4\pi\Delta}{\varepsilon\omega}}{\left[\left(\frac{1+4\pi\Delta}{\varepsilon\omega}\right)^2\right]^{1/2}}$$

unde φ reprezintă potențialul, m, masa ionilor, n numărul lor, e sarcina lor electrică ρ — tăria ionică, Δ conductibilitatea electrolitică, U este amplitudinea vitezei sunetului, v este viteza sa, ε este constanta dielectrică a electrolitului și ω este frecvența ultrasunetului.

La frecvențe medii de exemplu pentru $\omega = 10^5$, a doua parte a formulei devine egală cu 1.

Debye n-a verificat practic teoria sa ci a calculat pentru cazuri simple diferența de potențial găsind o diferență foarte mică de ordinul microvoltului.

Yeager și colaboratorii lui [3] [4] [5], pentru a verifica teoria lui Debye au folosit un aparat de ultrasunete de 200 kH cu amplitudinea U=1 cm/sec. utilizînd ca electroliți halogenuri alcaline. Ei au găsit că potențialul este indiferent de concentrația electrolitului și nu variază decît cu natura ionilor.

În cîteva lucrări [6—9], s-au efectuat cercetări asupra conductibilității electroliților, traversați de ultrasunete. În acestea se arată că ultrasunetele provoacă o mărire a conductibilității, dar în general rezultatele nu concordă cu teoriile elaborate, deoarece ele se bazează pe variații de presiune [7] și pe absorbția CO_2 [8]. În realitate fenomenele de depolarizare și oxidare iau naștere în interiorul lichidului ultrasonor și de acest lucru ei nu au ținut seamă.

Moriguchi (10) a găsit, primul, în 1934 că tensiunea necesară electrolizei apei între doi electrozi de platină este scăzută de ultrasunete.

Dutt (11) a remarcat o scădere a supratensiunii hidrogenului la catod la depunerea Al și Mg. În anul 1937 Schmid și Ehret (12) au examinat amănunțit aceste fenomene și au reluat cantitativ experiențele calitative de mai sus; ei au observat un efect de depolarizare care se amplifică cu puterea ultrasunetelor.

Ei au presupus, pentru a explica acest fenomen, că hidrogenul format la catod era antrenat de ultrasunet și nu putea să fie adsorbit de electrod, fenomen care scădea polarizarea.

Roll (13) a reluat aceste experiențe în funcție de frecvența ultrasunetului și n-a remarcat nici un efect.

Jack Guitton [14] a efectuat un studiu sistematic în lucrarea sa referitoare la acțiunea ultrasunetelor asupra fenomenelor de electrod. În lucrare, autorul a folosit un aparat cu o putere acustică ridicată (3,3 w/cm^2) ca experiențele să fie executate în prezența cavitației, utilizînd frecvență de 960 kH

Studiul său arată că acțiunea ultrasunetelor este analogă cu aceea a unei agitații volente și scade polarizația de concentrație anodică și catodică a metalelor cu condiția ca puterea acustică a paratului folosit să fie superioară aceleia necesară formării cavitației.

În ceea ce privește aplicarea ultrasunetelor asupra reacției de oxidare a ionilor Cl^- la ClO_3^-, în literatură nu se găsesc publicații în acest sens, deoarece mecanismul acestei reacții a început să fie studiat deabia în ultimul timp pe cale polarografică folosind electrozi rotativi de platină sau de grafit impregnat cu parafină.

Primul care folosește metoda polarografică, folosind un anod de platină rotativ a fost Iacovlev [19] și colaboratorii, lucrare în care arată că oxidarea ionilor Cl^- și ClO_3^- are loc pe acest electrod datorită formării compușilor oxigenați ai platinei, care fiind instabili pun în libertate oxigen cu mare capacitate de reacție, care oxidează apoi ionul Cl^- la ClO_3^-.

În lucrările noastre anterioare [15] s-au efectuat polarograme în aceleași condiții și pe electrodul de platină și pe electrodul de grafit impregnat cu parafină.

Ca urmare s-a ajuns la concluzia că nu oxizii de platină instabili joacă rolul important în procesul de oxidare, ci oxigenul adsorbit la suprafața electrozilor de platină și de grafit; oxigenul fiind în stare născîndă poate provoca oxidarea ionului Cl^- la ClO_3^-.

În prezenta lucrare s-a folosit acțiunea ultrasunetelor pentru a vedea cum acționează asupra potențialului de descărcare al ionului Cl^- în prima parte și apoi cum se manifestă această acțiune asupra cineticii de oxidare a ionului Cl^- la ClO_3^-.

Parte experimentală

Descrierea aparaturii folosite. Celula polarografică. La construirea celulei polarografice cu anod rotativ de un real folos ne-a fost celula construită de Rozentahl și Veselovski [18] care a fost modificată pentru a putea obține rezultate reproductibile.

Celula polarografică așa cum se vede în figura nr. 1 intră în compunerea aparatului care este constituit din trei părți: partea mobilă A, tubul fix B și celula de măsurat C.

Partea mobilă A este formată din motorul M, cu o turație variabilă între 0—3000 t/minut, și electrodul rotativ de platină construit dintr-un tub de sticlă de la un agitator KPG la al cărui vîrf s-a sudat electrodul de platină, (construit dintr-o sîrmă de platină cu diametrul de 0,5 mm și lung de 5 mm). Sîrma de platină a fost sudată electric în continuare cu un fir de cupru care a fost adus prin interiorul tubului la capătul superior, scos în exteriorul său și sudat pe bucșa E, care este presată pe diametrul exterior al tubului.

Contactul electric era apoi asigurat de la electrodul rotativ la sursa de curent cu ajutorul pensetei D care cuprindea bucșa E din două părți în așa fel ca să se elimine căderile de tensiune.

Legătura electrodului mobil la motor s-a efectuat cu ajutorul unui cauciuc direct de axul motorului. Lungimea cauciucului a fost de 8—12 cm ceea ce permitea o ușoară centrare și menținere a turației constante.

Tubul fix B era format din partea exterioară a tubului K.P.G. care la partea inferioară a fost lărgit și șlefuit ca să poată etanșa perfect celula de electroliză în care intra anodul rotativ de platină.

Celula de electroliză C a constat dintr-un vas de sticlă de 3—4 ml fiind prevăzut cu două robinete, prin cel inferior se introducea azot pentru a avea atmosferă inertă și cel lateral pentru evacuarea acestuia. În partea laterală celula are prevăzută o ramificație, care servește pentru introducerea electrodului de comparație. Ca electrozi de comparație s-au folosit electrodul de calomel saturat și cel de sulfat saturat, deoarece s-a înlăturat puntea de sare și potențialul de contact lichid; atunci cînd se efectuau polarograme din soluții de cloruri, se folosea electrodul de calomel și atunci cînd s-a lucrat din soluții de sulfați s-a folosit electrodul de sulfat.

Celula polarografică era așezată chiar pe cuarțul generatorului de ultrasunet folosit, firul de platină fiind la distanța de 2 cm de acesta. Cuarțul a avut o grosime de 1,5 mm, fiind argintat pe ambele fețe (fiecare față avînd dimensiunile $2 \times 2{,}5$ cm). Puterea ultrasonoră folosită a fost de 1 w/cm$_2$; iar frecvența ultrasunetului a fost de 1,9 kH frecvență care a putut fi obținută de la aparat.

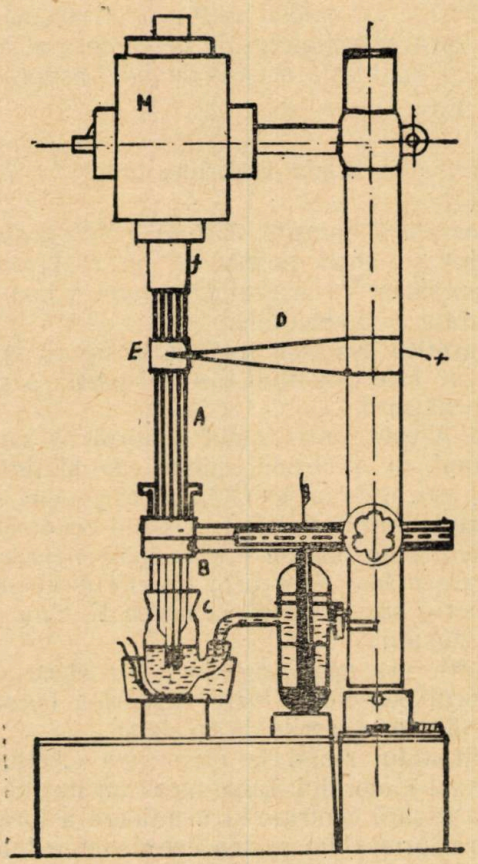


Fig. 1. Celulă polarografică cu anod rotativ.

Cuarțul vibrator era așezat într-un pahar cilindric așa cum se vede în figura nr. 1, în benzen care a servit drept lichid pentru producerea vibrațiilor; iar celula de electroliză era așezată pe cuarț în acest lichid.

Turația microanodului de platină a fost menținută constantă și egală cu 1 000 ture pe minut; iar motorașul era alimentat pentru menținerea constantă a turației de la un stabilizator de tensiune.

Aparatul astfel construit a fost pus în legătură cu polarograful Heyrowsky care înregistra automat polarogramele anodice.

Determinări

Pentru a vedea influența ultrasunetului asupra potențialului de descărcare al ionului Cl^-, s-au înregistrat polarogramele anodice ale acestuia, din soluții normale de HCl și NaCl, folosind ca electrod de comparație electrodul de calomel saturat.

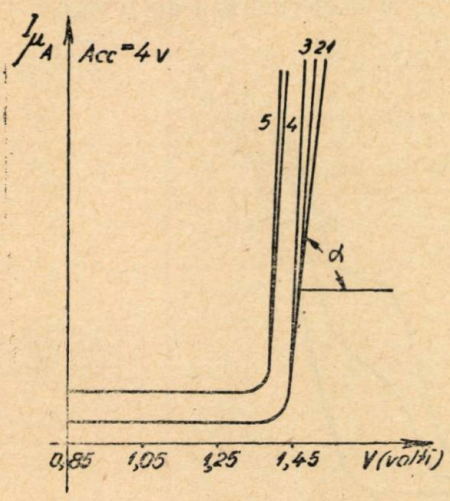


Fig. 2. Polarograme anodice înregistrate pe electrod de Pt rotativ:

1. Polarogramă anodică înregistrată din sol. NaCl $\frac{n}{1}$ fără rotire, fără ultrasunet.
2. Idem cu rotire fără ultrasunet.
3. Idem cu rotire și cu ultrasunet.
4. Polarogramă anodică înregistrată din sol. HCl $\frac{n}{1}$ cu rotire fără ultrasunet.
5. Idem cu rotire și cu ultrasunet.

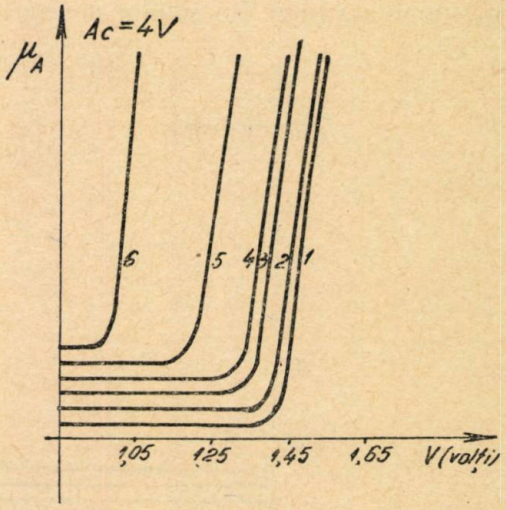


Fig. 3. Polarograme anodice înregistrate pe electrod de Pt rotativ:

1. curba i-e a ionului Cl^- din sol. NaCl $\frac{n}{1}$ . . . e = 1,39 v
2. curba i-e a ionului Cl^- din sol. RbCl $\frac{n}{1}$ . . . e = 1,36 v
3. curba i-e a ionului Cl^- din sol. HCl $\frac{n}{1}$ . . . e = 1,35 v
4. curba i-e a ionului Cl^- din sol. KCl $\frac{n}{1}$ . . . e = 1,24 v
5. curba i-e a ionului Cl^- din sol. CsCl $\frac{n}{1}$ . . . e = 1,17 v
6. curba i-e a ionului Cl^- dir sol. LiCl $\frac{n}{1}$ . . . e = 0,98 v

Așa cum rezultă din aceste polarograme prezentate în fig. 2 ionul Cl^- se descarcă pe electrodul de Pt la un potențial de 1,35 v din soluția de HCl $\frac{n}{1}$ și la un potențial de 1,39 v din soluția de NaCl $\frac{n}{1}$.

Aceste potențiale sînt foarte apropiate de potențialul teoretic de descărcare al ionului clor, ceea ce ne-a arătat că în aceste condiții aparatura folosită nu prezintă defecțiuni.

Influența ultrasunetului nu se observă pe curbele (i—e) asupra potențialului ci numai asupra înclinării curbelor, care sub acțiunea ultrasunetului fac un unghi α mai mare decît în absența lui.

Deoarece potențialul de descărcare al clorului pe electrodul de platină din soluția de NaCl $\frac{n}{1}$ a prezentat o diferență de 40 mv în plus față de potențialul obținut din soluția normală de acid clorhidric s-au înregistrat

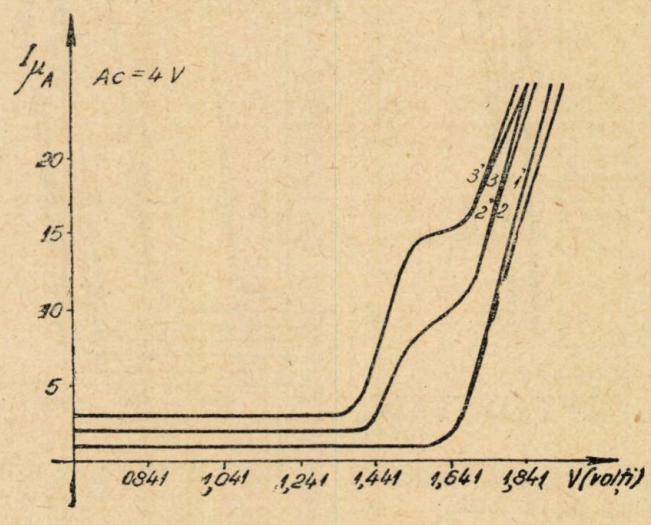


Fig. 4. Polarograme anodice:

1) Polarograma anodică de descărcare a O_2 din sol. de bază formată din 0,1 $NHNO_3$ + + 0,9N KNO_3 fără ultrasunet,
1') Idem — ultrasunete,
2) Polarogramă înregistrată din soluția: 0,1 N HNO_3 + 0,9 N KNO_3 + 5.10^{-3} N HCl — fără ultrasunete,
2') Idem — ultrasunete,
3) Polarogramă înregistrată din sol. 0,1 N HNO_3 + 0,9 N KNO_3 + 10^{-2} N HCl — fără ultrasunete.
3') Idem — ultrasunete,

polarograme din soluțiile normale ale tuturor clorurilor elementelor din grupa I-a a sistemului periodic al elementelor.

Polarogramele anodice înregistrate sînt prezentate în nr. 3 din care rezultă că ionul Cl^- se descarcă la potențialul de 1,35 v din soluția de HCl $\frac{n}{1}$, la potențialul de 0,98 v din soluția de LiCl $\frac{n}{1}$, la 1,39 v din soluția de NaCl $\frac{n}{1}$, la 1,34 v din soluția de KCl $\frac{n}{1}$, la 1,36 v din soluția de RbCl $\frac{n}{1}$ și la potențialul de 1,17 v din soluția de CsCl $\frac{n}{1}$.

După cum rezultă din aceste valori între potențialul de descărcare al ionului de clor din sol. NaCl care este 1,39 v și cel al ionului Cl^- din soluția de LiCl (0,98 v) este o diferență de 410 mv, deci o valoare apreciabilă.

S-ar putea atribui această diferență gradului de hidratare diferit, astfel ionul de Litiu care asociază cel mai mare număr de molecule de apă are potențialul cel mai scăzut 0,98 v.

Și razele aparente și reale ale acestor ioni arată aceasta, totuși aici este o nepotrivire; Cs^+ are raza reală raportată la cea deH^+ egală cu 2,57 Å și cea aparentă 5,05 Å. El asociază 13 molecule de apă, pe cînd Rb^+ care este mai puțin electropozitiv decît el are raza aparentă 5,09 și cea reală 2,21 Å și asociază 14 molecule. În această situație ar fi de așteptat ca și potențialele de descărcare a ionului Cl^- din soluțiile normale să fie foarte apropiate. Între ele există însă o diferență netă 1,36 v (soluția de RbCl) și 1,17 v din soluția CsCl. Aceasta ne face să presupunem că singură hidratarea nu este cauza acestei diferențe (190 mv).

În fig nr. 4 sînt prezentate polarogramele de oxidare a ionilor Cl^- din soluția de bază normală în ioni NO_3 avînd $E_{\frac{1}{2}} = 1{,}55$ v; și aici curbele 1′, 2′ și 3′ arată panta curbei cu un unghi α mai mare.

În aceleași condiții s-a înregistrat polarograme din soluție de $H_2SO_4 \frac{n}{1}$ care se prezintă în fig. 5.

La aceste polarograme curbele prezintă la început o formă de maxim care se accentuiază cu creșterea concentrației HCl din soluție. Pentru aceasta s-au efectuat polarograme din aceiași soluție de bază (H_2SO_4) cu adaosuri foarte mici (0,01%) de soluție de gelatină.

Rezultatele sînt prezentate în fig. 6.

După cum rezultă din polarograme pentru concentrații cuprinse între 5.10^{-3} și 10^{-2} $E_{1/2}$ dispare complet și acesta apare în formă bună la concentrații mai mari cuprinse între 2.10^- și 6.10^{-2} N HCl, dispărînd aspectul de maxim.

Aceste polarograme pe electrod rotativ de platin și pe electrod de grafit impregnat cu parafină în parte au mai fost executate de noi în alte condiții (15).

Discuție. Din cele expuse rezultă că ultrasunetele nu influențează potențialul de descărcare al ionilor, fenomen care de altfel a fost constatat în cercetările anterioare. Numai panta curbei este mai mare, ceea ce arată că este vorba de o scădere a polarizării de concentrație.

A rezultat de asemenea un potențial de descărcare al ionului clor diferit în soluții normale de cloruri alcaline. La sodiu s-a observat cel mai mare potențial de descărcare (1,39 v) și cel mai mic la litiu (0,98 v).

Dacă considerăm potențialul de descărcare al ionului Cl^- din soluția de HCl $\frac{n}{1}$ ca cel teoretic (1,35 v) atunci potențialul de descărcare al

ionului Cl^- din soluțiile de RbCl $\frac{n}{1}$ și NaCl $\frac{n}{1}$ prezintă supratensiuni în plus față de 1,35 v, de 40 și respectiv 10 milivolți; iar potențialul de descărcare al ionului Cl^- din soluțiile de KCl, CsCl și LiCl $\frac{n}{1}$, prezintă depo-

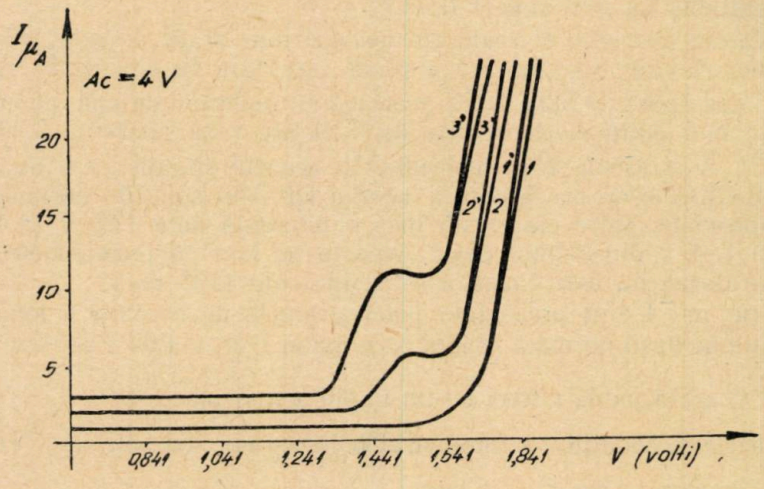


Fig. 5. Polarograme unodice înregistrate din soluția de H_2SO_4 $\frac{n}{1}$

1) Polarogramă înregistrată din sol. de H_2SO_4 $\frac{n}{1}$ fără ultrasunete,

1') Idem — cu ultrasunete,

2) Polarograme înreg. din sol. H_2SO_4 $\frac{n}{1}$ + 5.14^{-3} N HCl f. ultrasunete,

2') Idem — cu ultrasunete,

3) Polarogr. înreg. din sol. H_2SO_4 $\frac{n}{1}$ + 10^{-2} N HCl f. ultrasunete

3') Idem — cu ultrasunete,

larizări față de 1,35 v, de —10, —180 mv și —370 mv, diferențe care sînt destul de apreciabile.

Aceste valori ale potențialului de descărcare al ionului clor din soluțiile de mai sus se păstrează în aceiași ordine ca și seria potențialelor standard ale ionilor metalici care cresc în ordinea $Li \rightleftarrows Li^+ + \varepsilon$ (—3,005), $Cs \rightleftarrows Cs^+ + \varepsilon$ (— 3,02 v), $Rb \rightleftarrows Rb^+ + \varepsilon$ (— 2,99 v), $K \rightleftarrows K^+ + \varepsilon$ (— 0,92 v). $Na \rightleftarrows Na^+ + \varepsilon$ ionul de sodiu se formează la potențialul cel mai electropozitiv (—2,71 v) față de celelalte metale alcaline și litiu la potențialul cel mai electronegativ (—3,025 v). În sistemul periodic al elementelor caracterul electropozitiv al elementelor crește de la Litiu la Cesiu; deci seria potențialelor normale arată o abatere de la această regulă.

Comparînd mărimile termodinamice caracteristice ale ionilor se observă de asemenea că ionul Na^+ are cea mai mică căldură de formare (—57,48

kcal/ion gram) față de Li^+ (—66,63 kcal/ion gr) și K^+ (—60,27 kcal/ion gram). Aceeași situație se prezintă și în cazul energiilor liber ale ionilor, ionul de sodiu are cea mai mică energie liberă față de ceilalți ioni din grupa întîia a sistemului (—62,59 Kcal/ion gram) față de (—70,7 Kcal/ion gram) cît are ionul de Li^+ sau —306,0 Kcal/ion gr cît are ionul Cs^+.

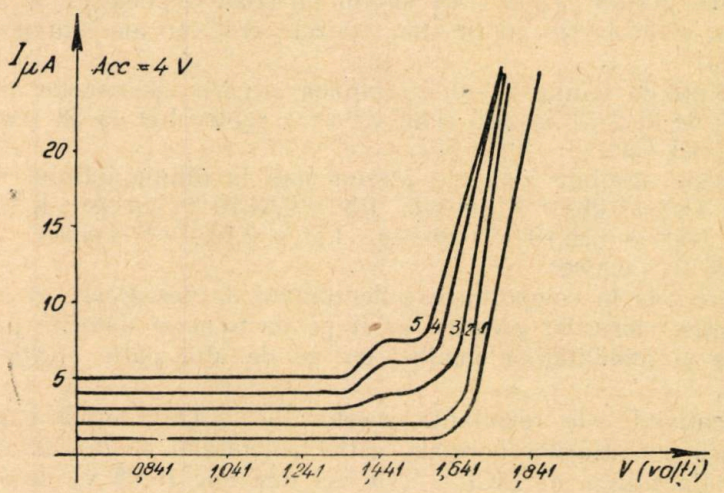


Fig. 6. Polarograme înregistrate din soluția de H^2SO_4 + 0,01% sol. gel.

1) Polarogramă luată din soluția $H_2SO_4 \frac{n}{1}$ + 5.10^{-3} N HCl + gelatină,

2) Polarogramă luată din soluție $H_2SO_4 \frac{n}{1}$ + 10^{-2} N HCl + gelatină,

3) Polarogramă luată din soluție $H_2SO_4 \frac{n}{1}$ + 2.10^{-2} N HCl + gelatină,

4) Polarogramă luată din soluție $H_2SO_4 \frac{n}{1}$ + 4.10^{-2} N HCl + gelatină,

5) Polarogramă luată din soluție $H_2SO_4 \frac{1}{4}$ + 6.10^{-2} N HCl + gelatină,

La entropii însă această regularitate nu se mai respectă, acestea cresc în ordinea obișnuită a elementelor din sistemul periodic.

Totuși din simpla comparare a acestor mărimi termodinamice nu se poate trage concluzia de ce ionul Cl^- din soluția de NaCl se descarcă la un potențial mai mare decît restul clorurilor alcaline, deoarece deși ionul Na^+ are cea mai mică căldură de formare și energie liberă, nu se poate explica faptul dece ionul Cs^+ care are energia liberă de —306 Kcal/ion gr urmează în seria potențialelor imediat după Li^+ care are —70,7 Kcal/ion gr. S-a atribuit această deosebire a comportării potențialului de descărcare a ionilor Cl^- din diferite cloruri alcaline gradului de hidratare diferit al acestor cationi.

Comparînd razele reale și aparente ale ionilor metalelor alcaline, acestea descresc în ordinea $Cs^+ \rightarrow Li^+$, iar numărul moleculelor de apă asociate la ioni sînt: $Li^+ < 120$, $Na^+ < 66$, $K^+ = 16$, $Rb^+ = 14$ și $Cs^+ = 13$ molecule, fapt real, deoarece ionii care au mai puține straturi electronice au în jurul lor un cîmp mai puternic care atrage moleculele polare ale apei.

Numai gradul de hidratare singur nu poate explica aceste abateri, de aceea s-a controlat în continuare, vitezele absolute ale ionilor și mobilităților lor.

Mobilitățile ionilor cresc în ordinea situării elementelor în sistemul periodic; de la 2—1 la 27,5 ($cm^2\ v^{-1}\ s^{-1}$) pentru Li^+ la 58 (cm^2v^- - s pentru ionul Cs^+.

Vitezele absolute însă ale acestor ioni la diluție infinită sînt următoarele: $Cs^+ = 6{,}98.10^{-4}$ cm/sec, $Rb^+ = 6.84.10^{-4}$ cm/sec, $K^+ = 6{,}65.10^{-4}$ cm/sec, $Na^+ = 4{,}56.10^{-4}$ cm/sec, $Li^+ = 3{,}44.10^{-4}$ cm/sec, iar ionul $H^+ = 32{,}4.10^{-4}$ cm/sec.

Diferențele în comportarea potențialului de descărcare al ionilor Cl^- din soluțiile clorurilor alcaline ar fi pe de o parte datorită gradului de hidratare și mobilităților ionilor, iar pe de altă parte enegiei libere a acestora.

Potențialul este rezultanta acestor efecte care situiază pe acestea în ordinea potențialelor normale, astfel potențialul de descărcare al ionilor Cl^- din soluția de LiCl este cel mai mic (0,98 v) deoarece ionul Li^+ este cel care asociază cel mai mare număr de molecule de apă și are cea mai mică mobilitate ionică în schimb are o energie liberă mai mare decît a ionului Na^+.

Ionul sodiu la rîndul său, deși se încadrează în seria crescîndă a mobilității ionice, el este ultimul în seria potențialelor standard datorită gradului mare de hidratare și în al doilea rînd datorită energiei libere scăzute. Deci ordinea de descărcare a ionilor Cl— din soluțiile metalelor alcaline este aproximativ aceiași cu ordinea potențialelor normale de electrod ale metalelor.

În ceea ce privește mecanismul de oxidare al ionului Cl^- la ClO_3 pe electrod de platin rotativ el s-a discutat în lucrările noastre anterioare (15) așa că în această lucrare nu se va mai discuta despre aceasta.

Totuși și aici atrage atenția faptul că atît în soluțiile de bază formate din HNO_3, sau din H_2SO_4, la care s-a adăugat ioni Cl^- în concentrații cuprinse între 5.10^{-3} N HCl și 10^{-2} N HCl, palierul curentului de difuziune la mărirea concentrației de ioni Cl^- adăugată ia forma unui maxim.

Deși s-a lucrat polarografie anodică, s-a trecut la înregistrarea polarogramelor din soluții de bază la care s-a adăugat gelatină în cantitate mică (0,01%).

Adaosul de gelatină așa cum rezultă din polarograme a scăzut mult valoarea curentului de difuziune și a înlăturat această tendință de maxim în mod asemănător cu polarogramele catodice.

Concluzii

1. S-a studiat influența ultrasunetului asupra potențialului de descărcare al ionilor Cl^- din soluțiile normale ale clorurilor metalelor alcaline și asupra oxidării ionului Cl^- la ClO_1^- din soluții de bază normale fn ioni NO_1^- sau SO_4^-.

A rezultat că ultasunetul nu influențează potențialul de descărcare sau de oxidare în mod apreciabil.

Polarogramele înregistrate în prezența ultrasunetelor au o pantă mai mare, ceea ce arată o scădere de polarizare de concentrație așa cum a prevăzut Debye.

2. Potențialele de descărcare diferite ale ionului Cl^- pe electrod de platin rotativ sînt aproape în aceiași ordine ca potențialele standard ale metalelor alcaline, ca rezultat al combinării efectului de hidratare și mobilitățile ionilor pe de o parte și energiilor libere ale ionilor pe de alta.

3. La polarografia anodică odată cu creșterea concentrației de HCl care se oxidează apare maxim polarografic care se înlătură prin adaos de soluție de gelatină în mod asemănător cu polarografia catodică.

Catedra de Tehnologia substanțelor anorganice

BIBLIOGRAFIE

[1] *I. Bergman* — Der Ultraschall, Hirzel, Zurich, 1945, Biblioteca Geneva.

[2] *Debye. P.* — J. Chem. Phys. 1953, I, 13.

[3] *Yeager E. și alții* — J. Acoust. Soc. Amer. 1951, 23, 627, 1953, 25, 456.

[4] *Yeager E. și alții* — Proc. Phys. Soc. 1951, 64 B, 83

[5] *Bugash I, Yeager E.* et *Hovorka F.* — J. Chem Phys. 1947, 15, 592.

[6] *Babnatt. S.* — J. Chem. Phys. 1953, 21, 908.

[7] *Fox. F. și alții* — Phys. Rev. 1946—70, 329.

[8] *Schulman M.* și *Tumanski S.* — J. Coloid U.R.S.S. 1939, 5, 961.

[9] *Buosanto M.* — Bull. Soc. Ital. Biol. Sper. 1950, 26, 269.

[10] *Moriguki. I.* — J. Chem. Soc. Japon. 1934, 55, 751.

[11] *Dutte. E.* — Brevet Francez, 1933.

[12] *Schmid G.* și *Ehret. I.* — Z. Electrochem. 1937, 43, 597.

[13] *Roll A.* — Z. Metallkunde, 1950, 41, 399 și 413.

[14] *Guiton Jaques* — J. Rech. Centre Natl. Rech. Sci. Paris nr. 48, 199, (1959).

[15] *I. Atanasiu* și *S. Lică* — Bull. Inst. Pol. Buc. — 20, 61, 1958.

[16] *Foerster* și *Müeller* — Z. Electrochem. 1903, 9, 171, 195.

[17] *Kiikiro S.* — Bull. Chem. Soc. Japan. 26, 185—8—1953.

[18] *Rezentahll* și *Veselovski* — J. Fiz. Him. 27, 1163, 71, 1953.

[19] *Iacovlev I. E., Rozentahl K. I.* și *Filipov S. T.* — Jur. Fiz. Him. 30, 937, 1956.

[20] *D. Valera Vivion* — Trans. Faraday Soc. 49, 1338, 1953.

[21] *Frunkin A. N.* — Kinetica electrohem. Proțesov. Moscova 1952.

[22] *I. Atanasiu, G. Facsko* — Electrochimie Princ. Teoretice, Ed. Tehnică, București, 1958.

[23] *I. Bănățeanu, A. Călușaru, Z. Slabu* — Metode fiz. chimice de analiză, Ed. Tehnică, Buc. 1961.

[24] Manualul ing. Chimist. Ed. Tehnică, Buc., 1952.

ВЛИЯНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВ НА ПРОЦЕСС ЭЛЕКТРОДОВ, ПРИ ОБРАЗОВАНИЙ СОЕДИНЕНИЙ ХЛОРА НА ПЛАТИНЫ ВРАЩАЮЩИМСЯ ЭЛЕКТРОДЕ

(Краткое содержание)

Показывается влияние ультразвуков на потенциал разряжения иона хлора из растворов хлоридов щелоъных металлов и на процес окисления ионов. Cl^- до ClO_3^- на платиновом вращающимся электроде.

Следует, что потенциал разряжения ионов хлора из растворов щелоъных хлоридов возрастяет в порядке нормальных электродных потенциалов щелоъных металлов.

Добавке желетана в онодной полярографий приводит к исчезновению полярографических максимум также как и в катодной полярографий.

THE INFLUENCE OF THE SUPERSOUNDS ON THE ELECTRODE PROCESSES IN THE FORMATION OF THE OXIGENATED COMPOUNDS OF THE CHLORINE ON THE ROTARY Pt ELECTRODE

(Summary)

It is shown the bearing of supersounds on the discharge potential of the chlorine ions from the solutions of chlorides of alkaline metals and on the process of oxidation of the ions Cl^- to ClO_3^- on the platinum rotary electrode.

It results that the discharge potential of the cholorine ions from these solutions increases by order of the normal potentials of electrode of the alkaline metals.

The addition of gelatine in the anodic polarographic analysis leads to the disappearance of the polarographic maximums, as in the cathodic polarographic analysis.

L'INFLUENCE DES ULTRASONS SUR LES PROCÉS D'ÉLECTRODE A LA FORMATION DES COMPOSÉS ORIGÉNÉS DU CHLORE SUR L'ÉLECTRODE DE Pt ROTATIF

(Résumé)

On montre l'influence des ultrasons sur le potentiel de décharge des ions chlore des solutions de chorures des métaux alcalins et sur le processus d'oxydation des ions Cl^- à ClO_3^- sur l'électrode de platine rotatif.

Il résulte que le potentiel de décharge des ions chlore de ces solutions s'accroît dans l'ordre des potentiels normaux d électrode des métaux alcalins.

L'addition de gélatine dans la polarographie anodique mène à la disparition des maxima polarographiques, de même que dans la polarographie cathodique.

DER EINFLUSS VON ULTRASCHALLEN, ÜBER DIE ELEKTRODENPROZESSEN ZUR BILDUNG DER CHLORSANERSTOFFVERBINDUNGEN AUF EINEM DREHBAREN PLATINELEKTROD

(Zusammenfassung)

Man zeigt den Einfluss von Ultraschallen über das Ionenpotential der Chlorionen aus den Chloridlôsungen von alkalischen Metallen und über den Oxydationsprozess von Cl^- — ionen zu ClO_3^- auf einem drehbaren Platinelktrod.

Es ergibt sich, dass das Ionenpotenial der Chlorionen aus diesen Lösungen in der Ordnung der Nodmalpotentiale der alkalischen Metalle sich vergrössert.

Der Zusatz von Gelatin in der anodischen polarographischen Analyse führt zur Vernichtung der polarographischen Maxima, ebenso wie in der kathodischen polarographischen Analyse.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

REZISTENȚA MATERIALELOR

CALCULUL SISTEMELOR STATIC NEDETERMINATE DE VOLUM MINIM

I A. RADȚIG

1. Privire generală și date istorice

Problema proiectării construcțiilor de greutate minimă își trage începuturile din vestita lucrare a lui Galileo Galilei „Discorsi e dimostrazioni matematiche", publicată în anul 1638, în care se examina problema proectării unei grinzi de egală rezistență la încovoiere.

În decursul secolelor al XVII-lea, al XVIII-lea și în deosebit al XIX-lea, cei mai de seamă reprezentanți ai mecanicii construcțiilor au abordat în repetate rînduri această problemă. În lucrările lui: Lagrange J. L. (1780), Navier L. M. (1825), N. F. Iastrjembschi (1838), Renoust des Orgeries (1871), Levy Maurice (1874), F. S. Iasinschi (1898) și ale multor alți savanți, s-au exprimat o serie de idei valoroase asupra proiectării construcțiilor de greutate minimă și s-au rezolvat o serie de probleme.

O fundamentare mai completă a problemei proiectării construcțiilor de greutate minimă și, în deosebi, a sistemelor static nedeterminate, se întîlnește abia în secolul al XX-lea. La începutul acestui secol au fost publicate lucrările lui V. L. Chirpiciov (1902) și Michell J. H. (1904), iar ceva mai tîrziu lucrarea lui A. I. Chefeli (1925). Ultima metodă propusă pentru rezolvarea problemei sistemelor de greutate minimă este cea energetică.

În această fundamentare a avut un mare rol întrebuințarea betonului armat, care necesită consumuri uriașe de material, precum și dezvoltarea aviației, care reclamă reducerea la minimum a greutății construcțiilor. Deasemenea, a avut rol important și construirea podurilor de deschidere mare, care au necesitat un studiu amănunțit al formelor celor mai economice.

În anul 1933, în U.R.S.S. a fost publicată lucrarea lui I. M. Rabinovici, referitoare la proiectarea grinzilor static nedeterminate prin metoda rezistențelor admisibile. În această lucrare, I. M. Rabinovici a făcut o analiză multilaterală a metodei expuse și a ridicat o serie de probleme noi în domeniul mecanicii sistemelor de bare de greutate

minimă, care au stabilit liniile de dezvoltare a metodei pentru mulți ani [1]. I. M. Rabinovici a mai făcut o expunere amănunțită a dezvoltării orientării inițiate de el în lucrarea [2].

Un numeros grup de oameni de știință s-a ocupat de rezolvarea unei serii de probleme dintre cele ridicate de I. M. Rabinovici. Dintre acestea fac parte, în primul rînd, lucrările lui C. M. Huberian [3], C. G. Protasov [4] și A. I. Vinogradov [5], care au adus o mare contribuție la proiectarea construcțiilor de greutate minimă.

Studiul continuu al acestor probleme și-a găsit oglindirea și în lucrările lui F. I. Sliusarciuc [6], Francis A. J. [7], I. I. Guerevici [8], Ready W. B. [9], Swed G. [10], N. A. Serov [11], A. B. Izraelit [12], Barta G. [13], S. P. Fesic [14] și mulți alții.

În anul 1946, autorul articolului de față, dezvoltînd ideile formulate de I. M. Rabinovici, a stabilit o nouă metodă de calcul al sistemelor static nedeterminate — metoda volumului minim [15] — care se tratează în acest articol.

Această metodă a fost dezvoltată într-o serie de lucrări ulterioare ale autorului [16—17], precum și în lucrările publicate de S. H. Gainulina [18], N. S. Volcovei [19], A. I. Corșunov [20], V. C. Iuriev [21], V. P. Vorisov [22] și și-a găsit o utilizare practică în lucrările lui S. N. Clepicov [23] și I. B. Volodarschi [24].

Legată direct de problema proiectării construcțiilor de greutate minimă, este și problema căutării unor forme raționale ale construcțiilor.

O contribuție valoroasă în acest sens au adus, în Polonia, Z. Wasiutynski, precum și numeroșii colaboratori ai școlii lui. Z. Wasiutynski a fundamentat problema proiectării cu ajutorul teoremei energiei potențiale minime a deformațiilor elastice, cu păstrarea constanței volumului materialului. Rezolvarea acestei probleme de mare importanță practică se face pe considerații de rigiditate [25].

Într-una din lucrările lor, Z. Wasiutynski și A. Brandt, fac o analiză amănunțită și o trecere în revistă a diferitelor curente, referitoare la determinarea formei construcțiilor de greutate minimă. În această lucrare, se prezintă o vastă bibliografie a acestor probleme, cuprinzînd 166 referințe bibliografice [26].

Cît de strîns legate între ele sînt problemele de minim al energiei potențiale cu problemele determinării volumului minim al construcției, abordate în lucrarea de față, se poate vedea din lucrarea citată mai sus a lui Z. Wasiutynski [25], precum și din lucrarea lui A. Brandt și J. Ignaczak [27].

Rezolvarea problemelor puse de noi se va face exclusiv în domeniul elastic; de aceea nu ne vom referi la numeroasele lucrări consacrate calculului construcțiilor prin metoda stării limită.

Observăm că se acordă atenție problemelor de proiectare a construcțiilor de greutate minimă în cursurile cunoscute de mecanica construcțiilor și rezistența materialelor. Astfel, ele se citează în cursul de mecanica construcțiilor de I. M. Rabinovici [28] și în cursurile de rezistența materialelor de Gh. Buzdugan [29] și I. Chisiov [30].

2. Formularea problemei și particularitățile rezolvării ei

Problema se poate formula în modul următor. Dată fiind forma și lungimile barelor unei construcții static nedeterminate, executată dintr-un material dat și încărcat cu forțe exterioare cunoscute, se cere să se determine dimensiunile secțiunilor transversale ale elementelor construcției.

În afară de aceasta, vom presupune că se respectă următoarele condiții puse la rezolvarea problemei:

1. În niciuna din barele construcției, eforturile unitare să nu depășească rezistențele admisibile, pentru construcția dată și materialul dat.

2. Volumul elementelor construcției, care determină în mare măsură greutatea ei, să aibă valoarea minimă posibilă, pentru condițiile problemei.

În rezolvarea problemei, se vor mai introduce o serie de limitări.

Se va presupune, în primul rînd, că eforturile unitare din elementele construcției nu vor depăși nicăieri limitele de elasticitate și proporționalitate, adică se vor afla în limita de valabilitate a legii lui Hooke.

În al doilea rînd, în rezolvarea problemei se va porni întotdeauna de la starea nedeformată a sistemului, neglijînd deformațiile, cu ocazia determinării eforturilor interioare, care apar în elementele lui.

În al treilea rînd, nu se va ține seama de influența tuturor factorilor exteriori posibili, care acționează asupra construcției (factori dinamici, de temperatură ,etc.), ci se vor lua în considerare numai acele sarcini, care au fost prevăzute cu ocazia formulării problemei.

Limitările enunțate restrîng întrucîtva problema. Aceasta însă nu va contrazice deloc precizările în rezolvarea diferitelor probleme, care pot fi făcute ulterior pe calea înlăturării restricțiilor enunțate.

Problemele de tipul celor indicate mai sus pentru determinarea dimensiunilor secțiunilor transversale ale elementelor unei construcții au căpătat denumirea de probleme inverse ale staticii construcțiilor. Particularitățile rezolvării problemelor inverse au fost studiate amănunțit de I. M. Rabinovici și de către adepții orientării dată de el.

Ne vom opri asupra a două particularități.

În primul rînd, la rezolvarea problemelor inverse ale staticii construcțiilor, mărimile căutate (ariile secțiunilor transversale ale barelor, momentele de inerție, modulele de rezistență) pot avea numai valori pozitive, în timp ce mărimile mecanice adoptate (forțele și eforturile unitare) pot fi atît pozitive, cît și negative.

În al doilea rînd, în virtutea celor expuse mai sus, problemele inverse ale staticii construcțiilor reclamă o fundamentare a posibilității rezolvării lor, iar în cazul posibilității ei, reclamă cercetarea problemei unicității sau multiplicității acestei rezolvări.

Ambele particularități, remarcate mai sus, ale problemelor inverse sînt strîns legate cu aparatul de calcul necesar rezolvării lor, asupra căruia ne vom opri ceva mai în amănunt.

3. Aparatul de calcul

Aparatul de calcul, care trebuie folosit la rezolvarea problemelor inverse ale staticii construcțiilor, are la bază funcția unitate

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{|x-a|}{x-a}\right] \tag{1}$$

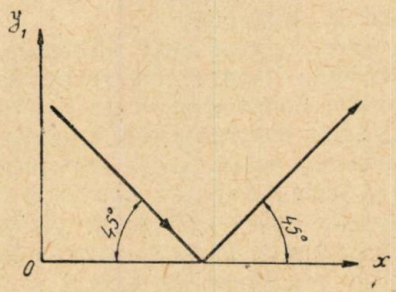


Fig. 1

care capătă valorile $\Phi(x)=0$ pentru $x<a$ și $\Phi(x)=1$, pentru $x>a$. Pentru $x=a$, $\Phi(x)$, devine nedeterminată.

Părțile componente ale funcției unitate (1) pot căpăta următoarele forme:

1. *Forma de oglindă* care are aspectul

$$y_1(x)=|x-a|$$

Această formă reprezintă ecuația razei reflectate de un plan, sub un unghi de 45° (fig. 1).

Mai general, forma de oglindă poate fi reprezentată prin formula:

$$y_1(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i|x-a_i| \tag{2}$$

Forma geometrică (2) corespunde poligonului funicular (fig. 2 *a* sau fig. 2 *b*).

2. *Forma mixtă de oglindă*, care are aspectul

$$y_2(x)=\frac{|x-a|}{x-a}$$

Din punct de vedere geometric, această formă reprezintă funcția de variație a semnului, care capătă valorile $y_2(x)=-1$ pentru $x<a$ și $y_2(x)=+1$ pentru $x>a$ (fig. 3).

Într-o formă mai generală, forma mixtă de oglindă va avea expresia

$$y_2(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{|x - a_i|}{x - a_i} \tag{3}$$

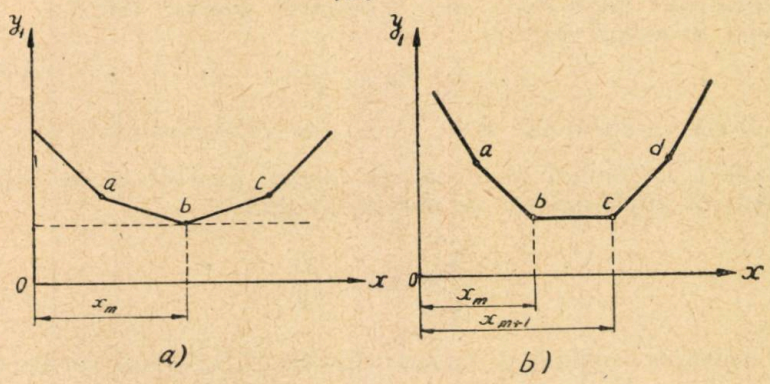


Fig. 2

Geometric, forma (3) va corespunde funcției în scară din fig. 4.

În practica rezolvării problemelor de proiectare a construcțiilor static nedeterminate de volum minim, are o importanță deosebit de mare

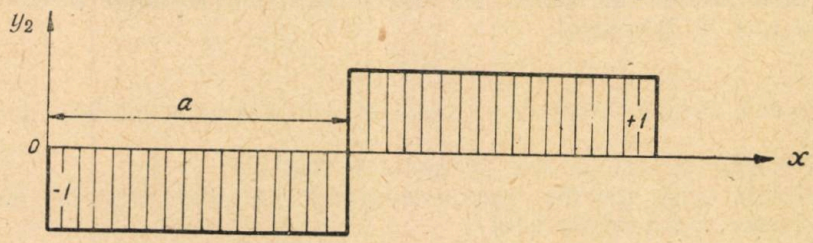


Fig. 3

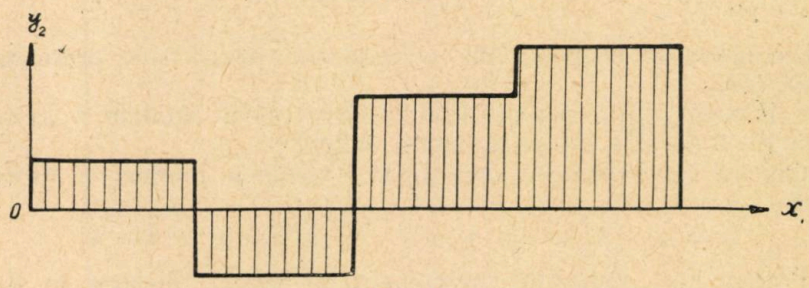


Fig. 4

forma (2). De aceea ne vom opri ceva mai amănunțit asupra uneia din operațiunile ce se efectuează cu această formă (2), anume stabilirea valorii ei minime.

1. După ce s-a egalat cu zero fiecare din termenii în modul ai formei (2) se află rădăcinile ecuațiilor obținute și se așează în ordinea mărimii lor:

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2 \ldots\ldots x_n = a_n$$

Coeficienții unghiulari, care corespund acestor rădăcini, în cazul termenilor în modul, vor fi:

$$b_1,\ b_2 \ldots\ldots b_n$$

2. După ce s-a notat $B = \sum_{i=1}^{n} |b_i|$, se va efectua consecutiv adunarea coeficienților unghiulari $|b_i|$, luați în modul, pînă ce la un ordin m al coeficientului unghiular nu va surveni depășirea:

$$\sum_{i=1}^{m} |b_i| \geqslant \frac{B}{2} \tag{4}$$

Atunci valoarea minimă a formei (2) va fi valoarea corespunzătoare lui $x_m = a_m$.

Totodată, dacă în formula (4) are loc semnul inegalității, atunci valoarea minimă va corespunde unui x unic. O vom denumi valoarea minimă de gradul întîi. Acest caz este prezentat în fig. 2 *a*.

Dar dacă în formula (4), are loc semnul egalității, atunci va exista o mulțime infinită de valori ale lui x care dau minimul formei (2), care se află în intervalul

$$x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1} \tag{5}$$

Această valoare minimă o vom denumi valoarea minimă de gradul doi.

Geometric, acest caz este prezentat în fig. 2 *b*.

Condiția celui mai mic volum de gradul doi poate fi scrisă evident și sub forma modulară, în felul

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \tag{6}$$

Demonstrațiile complete ale rezultatelor expuse sînt prezentate în lucrarea [31].

Să lămurim calea pentru determinarea valorii minime a formei de oglindă de tipul (2) pe un exemplu simplu.

Admitem că trebuie să determinăm valoarea minimă a formei de oglindă:

$$y = |x+2| + 3|x| + |x-2| + 2|x-3| + |x-4|$$

În acest caz, rădăcinile termenilor, în modul, dispuse în ordinea mărimii lor și coeficienții unghiulari corespunzători vor fi:

$$x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3;\ x_5 = 4$$

$$b_1 = 1;\ b_2 = 3;\ b_3 = 1;\ b_4 = 2;\ b_5 = 1,$$

de unde se află

$$\sum |b_i| = 8; \quad \frac{\sum |b_i|}{2} = 4$$

Efectuînd adunarea succesivă a coeficienților unghiulari luați în modul, se găsește:

$$b_1 = 1 < 4$$

$$|b_1| + |b_2| = 1 + 3 = 4$$

De aici conchidem că valoarea minimă a formei de oglindă adoptată va fi valoarea minimă de gradul doi și va surveni pentru toate valorile lui x, care se află în intervalul $0 \leqslant x \leqslant 2$. Nu este greu de calculat că această valoare minimă va fi egală cu 14.

Formele examinate permit să rezolvăm o serie de probleme legate de reprezentarea lor pe un plan. Pe același plan însă trebuie să operăm cu forme spațiale mai complexe. Forma de oglindă pentru ultimul caz va avea aspectul:

$$y(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{n} |a_0 + a_{1i} x_{1i} + a_{2i} x_{2i} + , \ldots, a_{mi} x_{mi}| \qquad (7)$$

Operarea cu ultima formă (7) reclamă studiul proprietăților varietăților din spațiul metric multidimensional euclidian. Fără a ne mai opri asupra operării cu forma de tipul (7), remarcăm că determinarea valorii minime a acestei forme a fost prezentată în lucrarea [32].

4. Metoda volumului minim, aplicată la calculul sistemelor static nedeterminate

Să ne oprim asupra proiectării unui sistem static nedeterminat, aflat sub acțiunea unor sarcini statice.

Nu este greu de văzut că dacă am putea adopta aceleași rezistențe admisibile pentru toate barele sistemului, atît cele întinse, cît și cele comprimate, atunci relația de condiție a deformațiilor, care se determină scriind ecuația canonică din metoda eforturilor, se poate identifica întotdeauna cu condiția volumului minim.

Într-adevăr, dacă notăm prin:

S_{0i} — efortul dintr-o bară oarecare i a sistemului static determinat, format din cel dat prin secționarea barei suplimentare;

S_{1i} — efortul din bara i datorit acțiunii forței unitare aplicate în locul de secționare al barei suplimentare;

σ_a — rezistența admisibilă;

n — numărul barelor sistemului, inclusiv cea suplimentară;

A_i — aria secțiunii transversale a barei i;

l_i — lungimea barei i;

E — modulul de elasticitate al materialului
atunci mărimea enegiei potențiale a grinzii U poate fi scrisă sub forma:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{(S_{0i} + S_{1i} X)^2}{2 E A_i} l_i$$

De aici, ecuația canonică a metodei, eforturilor, în conformitate cu teorema lui Castigliano, va avea forma:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(S_{0i} + S_{1i} X)}{A_i E} S_{1i} l_i = 0$$

Observînd că $\frac{S_{0i} + S_{1i} X}{A_i} = \sigma_a$, termenii condiției scrise devin constanți și ea poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{i=1}^{n} S_{1i} l_i = 0 \tag{8}$$

Pe de altă parte, expresia volumului V, pentru sistemul dat va avea forma:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{S_{0i} + S_{1i} X}{\sigma_a} \right| l_i \tag{9}$$

Este important de remarcat că mărimile din partea dreaptă a ultimei expresii, trebuie să fie luate în modul, deoarece volumul sistemului poate avea numai valoare pozitivă.

Să scriem acum pentru expresia (9) condiția volumului minim de gradul doi, în conformitate cu formula (6). Vom avea:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S_{1i} l_i}{\sigma_a} = 0$$

sau, după înmulțirea cu σ_a:

$$\sum_{i=1}^{n} S_{1i} l_i = 0 \tag{10}$$

Condițiile (8) și (10) sînt identice.

Este evident că se poate obține identificarea condiției (8) cu condiția (10) numai pentru un sistem cu eforturi unitare egale. Pentru orice sistem cu eforturi unitare neegale, relația de condiție a deformațiilor nu poate fi identificată cu condiția volumului minim. Astfel ecuația canonică a metodei eforturilor pentru cazul general al sistemului cu eforturi unitare neegale se poate aplica numai la sistemul preîncărcat.

Metoda rezistențelor admisibile care s-a aplicat totuși pînă acum la rezolvarea problemelor, după cum se știe, pornește tocmai de la condiția canonică:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{ai} S_{1i} l_i + \sigma_{ax} l_x = 0 \qquad (11)$$

în care σ_{ai} — reprezintă efortul unitar redus din bara suplimentară, iar σ_{ax} reprezintă eforturile unitare din barele principale, egale cu rezistențele admisibile.

Însă tot așa de bine s-ar fi putut raporta acest efort unitar redus la orice altă bară a sistemului, în afara celor absolut necesare *. Totodată s-ar fi putut satisface și condiția (11). Ba chiar mai mult, am fi putut ca, în locul reducerii efortului unitar dintr-o bară, să distribuim această reducere între orice grup de bare sau chiar între toate barele sistemului iar condiția (11) s-ar fi putut de asemenea satisface.

Astfel, deși ecuația canonică a metodei forțelor constituie o condiție absolut necesară în rezolvarea problemei, nu dă nici un fel de indicațiuni pentru calea ulterioară de rezolvare. Această indicație ne-o poate da numai o altă condiție — condiția volumului minim.

Pentru aceasta, după ce am scris volumul sistemului static nedeterminat cu ajutorul formulei (9), trebuie să găsim mai întîi valoarea minimă a lui, prin metodele expuse la punctul 3.

Numai după stabilirea volumului minim, care va permite să se stabilească numărul barei cu efort nul, ne putem pune problema reducerii eforturilor unitare în diferite bare ale sistemului, pentru a satisface ecuația canonică a metodei forțelor.

Admitem că volumul unei părți oarecare a sistemului se exprimă prin suma termenilor modulari, fiecare reprezentînd volumul unei singure bare:

$$V = |V_1| + |V_2| + , \ldots , + |V_p| \qquad (12)$$

Admitem că fiecăruia din acești termeni îi corespund coeficienții unghiulari de același semn $b_1, b_2, \ldots, b_p$ și totodată admitem că

$$\sum_{i=1}^{p} |b_i| = B$$

Presupunem, în sfîrșit, că se cere să se scadă cu C mărimea acestor coeficienți unghiulari. Atunci evident că s-ar fi putut scrie următoarele egalități:

$$\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots \mu_p b_p = M \qquad (13)$$

$$V = \frac{|V_1|}{\mu_1} + \frac{|V_2|}{\mu_2} + , \ldots , + \frac{|V_p|}{\mu_p}$$

* După clasificarea lui I. M. Rabinovici făcută în lucrarea [1] în pag. 9.

Problema pusă de noi constă în a determina valorile coeficienților $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_p$ astfel ca funcția V să capete valoarea minimă posibilă.

În urma rezolvării acestei probleme, substituind valoarea coeficientului μ_1 în expresia (14), derivînd succesiv această expresie în raport cu coeficienții $\mu_2, \mu_3 \ldots \mu_p$ și egalînd cu zero derivatele aflate, după rezolvarea ecuațiilor formate în acest fel, găsim că:

$$\mu_1 = \frac{M \sqrt{\frac{|V_1|}{b_1}}}{b_1 \sqrt{\frac{|V_1|}{b_1}} + b_2 \sqrt{\frac{|V_2|}{b_2}} + \ldots + b_p \sqrt{\frac{|V_p|}{b_p}}}$$

$$\mu_2 = \frac{M \sqrt{\frac{|V_2|}{b_2}}}{b_1 \sqrt{\frac{|V_1|}{b_1}} + b_2 \sqrt{\frac{|V_2|}{b_2}} + \ldots + b_p \sqrt{\frac{|V_p|}{b_p}}} \qquad (15)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_p = \frac{M \sqrt{\frac{|V_p|}{b_p}}}{b_1 \sqrt{\frac{|V_1|}{b_1}} + b_2 \sqrt{\frac{|V_2|}{b_2}} + \ldots + b_p \sqrt{\frac{|V_p|}{b_p}}}$$

Rădăcinile aflate, trebuie luate peste tot numai cu valori pozitive.

În unele cazuri, valorile unor coeficienți pot fi mai mari decît unitatea. În acest caz, asemenea bare nu se pot introduce deloc în calcul și ele trebuie să fie excluse la rezolvarea problemei distribuției, după ce s-a efectuat o variantă repetată a calculului.

După ce s-au egalat eforturile unitare și s-a obținut satisfacerea condiției de legătură a deformațiilor, se poate considera problema terminată.

5. Clasificarea volumică a sistemelor static nedeterminate și concluziile practice

La baza clasificării sistemelor static nedeterminate trebuie să fie puse proprietățile lor volumice, care sînt strîns legate de greutatea construcției ce se proiectează.

In primul rînd, atragem atenția asupra următorului fapt esențial. Dacă este dat un sistem oarecare simplu static nedeterminat, al cărui volum este exprimat sub forma:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{S_{0i} + S_{1i} X}{\sigma_{ai}} \right| l_i \qquad (16)$$

atunci rădăcinile expresiilor lui modulare, obținute pe calea rezolvării ecuațiilor de felul

$$S_{0i} + S_{1i} X = 0 \qquad (17)$$

își vor păstra întotdeauna valoarea pentru orice valori ale rezistențelor admisibile.

Practic, aceasta înseamnă că tuturor barelor acestui sistem li se poate da întotdeauna o numerotare oarecare pe deplin determinată.

Dacă, după ce am adoptat o mărime a eforturilor unitare din barele sistemului, am stabilit bara, în care prin transformarea în zero a efortului se obține volumul minim al sistemului, atunci prin aceasta am stabilit pentru mărimea dată a eforturilor unitare o serie întreagă de familii, fiecare caracterizîndu-se printr-o mărime pe deplin determinată a volumului minim.

La prima familie de acest fel ar fi trebuit să raportăm sistemul, care a determinat pentru eforturile unitare adoptate, valoarea minimă a volumului. Tot la aceeași familie, care are același volum minim, ar fi trebuit să raportăm și o serie de alte sisteme, care au o mărime scăzută a eforturilor unitare în comparație cu cea adoptată în bara, în care efortul s-a transformat în zero.

La a doua familie de sisteme, mai grele, ar fi trebuit să raportăm grinzile, care s-ar fi putut obține din sistemul dat pe calea reducerii eforturilor unitare din barele vecine cu bara în care, prin transformarea efortului în zero s-a obținut sistemul cu cel mai mic volum.

Cuvîntul „în cele vecine", trebuie înțeles în sensul numărului de ordine al barei, în care, la transformarea efortului în zero, se obține mărimea succesivă a volumului sistemului.

In mod cu totul analog, folosind rădăcinile următoare ale expresiilor modulare ale formei volumice, obținute pe calea rezolvării succesive a ecuațiilor de tipul (17), determinăm și următoarele clase de sisteme mai grele.

Astfel la proiectarea sistemelor simplu static nedeterminate, ajungem, în baza clasificării sistemelor expuse, la două situații foarte importante pentru practica proiectării

In primul rînd, în procesul de proiectare al sistemului simplu static nedeterminat, trebuie să încercăm a folosi cazul cel mai convenabil — sistemul cu volum minim.

Dacă din diferite considerații acest sistem cu volum minim nu se potrivește pentru proiectant (constructor, arhitect, etc.), atunci el are

posibilitatea unei largi alegeri a sistemelor ce se proiectează, dispuse în ordinea creșterii succesive a volumelor lor.

În al doilea rînd, alegînd pentru proiectare orice sistem concret, proiectantul are întotdeauna în fața lui un oarecare etalon de comparare: un sistem fictiv static determinat cu volum minim, proiectat pentru rezistențe admisibile egale în barele lui, dar care nu satisface în întregime toate cerințele puse de proiectant (incluzînd și cerința condiției de deformabilitate). Volumul acestui sistem va fi limita realizărilor posibile în procesul de proiectare reală a sistemului simplu static nedeterminat.

Toate cele expuse mai sus, cu privire la sistemele simplu static nedeterminate se pot generaliza și pentru cazul sistemelor static nedeterminate la care, posibilitățile oferite de clasificarea volumică a sistemelor se lărgesc mult.

Problemele de proiectare a sistemelor multiplu static nederminate de volum minim depășesc cadrul acestui articol sumar și nu pot fi lămurite în el, deoarece ele reclamă studiul problemelor de minimizare a funcțiilor de oglindă cu multe variabile, de tipul (7).

Aceste probleme au fost lămurite amănunțit în lucrările [17] și [32].

6. Particularitățile metodei volumului minim aplicată la construcțiile masive

S-a văzut mai sus că problema proiectării sistemelor static nedeterminate cu volum minim se reduce la stabilirea valorii minime a unei forme de oglindă. Această situație se poate generaliza și la construcțiile masive.

Admitem că volumul unui sistem multiplu static nedeterminat se exprimă prin formula:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{|S_{0i} + S_{1i} X_1 + S_{2i} X_2 + , \ldots, + S_{mi} X_m|}{\sigma_{ai}} l_i \qquad (18)$$

în care s-au notat cu S_{1i}, S_{2i}, ..., S_{mi} eforturile din bara i datorite forțelor unitare, aplicate în locurile de secționare a barelor suplimentare, la transformarea sistemului static nedeterminat dat într-unul static determinat.

Notăm

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_m) = |S_{0i} + S_{1i} X_1 + S_{2i} X_2 + \ldots + S_{mi} X_m|$$

$$K_1 = \frac{l_i}{\sigma_{ai}}$$

Atunci formula (18) poate fi scrisă sub forma:

$$V = \sum_{i=1}^{n} K_1 |f(X_1, X_2, \ldots, X_m)| \qquad (19)$$

Procesul de coordonare a deformațiilor, după cum am văzut din examinarea sistemului simplu static nedeterminat, reclamă soluționarea problemei reducerii rezistențelor admisibile în diferitele bare ale sistemului.

Procesul amintit mai sus, de coordonare a deformațiilor, este echivalent cu alegerea mărimii respective K_1 din formula (19). Esențial este faptul că în procesul acestei alegeri, forma funcională $f(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ care se află în modul in formula (19), rămîne constantă. Această formă constantă o vom denumi pe viitor *nucleul formei.*

Un tablou analog cu cel descris va avea loc și la proiectarea sistemelor continui.

Astfel, în cazul unei grinzi solicitată la încovoiere, exprimarea volumului se poate prezenta sub forma:

$$V = \int_{(l)} A(x)\, dx$$

unde s-a notat prin $A(x)$ aria secțiunii transversale a grinzii, iar prin l — lungimea ei.

Dar dacă, cum se știe, modulul de rezistență al grinzii $W(x)$ este legat de momentul de inerție al secțiunii transversale $I(x)$, de înălțimea $h(x)$ și de momentul încovoietor $M(x)$ prin formula:

$$W(x) = \frac{2\,I(x)}{h(x)} = \frac{2\,A(x)\,i^2(x)}{h(x)} = \frac{|M(x)|}{\sigma_a}$$

unde $i(x)$ este raza de inerție a secțiunii transversale, iar σ_a rezistența admisibilă, atinsă în fibrele extreme ale grinzii.

Din ultima formulă se poate deduce imediat aria secțiunii transversale:

$$A(x) = \frac{h(x)\,|M(x)|}{2\,\sigma_a\,i^2(x)} \tag{20}$$

De aici, însemnînd cu K_2 mărimea

$$K_2 = \frac{h(x)}{2\,\sigma_a\,i^2(x)} \tag{21}$$

se poate scrie expresia volumului grinzii sub forma:

$$V = \int_{(l)} K_2 |M(x)|\, dx \tag{22}$$

Din formula (22) se deduce că forma volumică pentru grindă are aceeași structură ca și pentru sistemul de bare cu zăbrele.

Pentru grinzile cu înălțimea secțiunii constantă, mărimile $h(x)$ și $i(x)$ vor fi constante și prin urmare, va fi constant și coeficientul K_2 dat de formula (21). De aceea, pentru o asemenea grindă, tot procesul de

rezolvare a problemei proiectării va fi identic cu problema analoagă din domeniul sistemelor de bare.

Pentru grinzile cu înălțime $h(x)$ a secțiunii variabilă, mărimea K_2 va fi variabilă, însă, cum au arătat cercetările, valoarea ei variază în limite relativ înguste [16]. De aceea și aici este posibilă construirea unei metode asemănătoare cu cea precedentă.

Pentru construcțiile în formă de cadre, formula volumului capătă o formă mai complexă:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \int_{(l)} K_2 |M(x)| \, dx \tag{23}$$

dacă se ține seamă nu numai de acțiunea momentelor încovoietoare, ci se adaugă și termenii datoriți forțelor longitudinale și transversale; asupra acestui lucru nu ne vom opri aici.

7. Posibilitatea realizării construcțiilor masive de volum minim

La un sistem static nedeterminat, solicitat la încovoiere, expresia energiei potențiale U poate fi scrisă sub forma:

$$U = \sum_{(n)} \int_{(l)} \frac{(M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_m X_m)^2 \, dx}{2EI}$$

unde s-a notat prin M_0 momentul încovoietor, într-o secțiune oarecare a sistemului de bază (static determinat) datorit forțelor exterioare, iar prin M_1, $M_2 \ldots M_m$ — momentele încovoietoare datorite forțelor unitare acționînd asupra aceluiași sistem.

Ecuațiile canonice ale metodei eforturilor, pentru cazul considerat, vor avea forma

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum_{(n)} \int_{(l)} \frac{(M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots . M_m X_m) M_i}{EI} dx = 0$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, m$.

Dacă se notează

$$M(x) = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots . M_m X_m \tag{24}$$

și se folosește formula (20), atunci, după reduceri, ecuațiile canonice capătă forma:

$$\sum_{(n)} \int_{(l)} \frac{M(x) M_i}{|M(x)| h(x)} dx = 0$$

Pentru cazul în care momentele încovoietoare în diferitele porțiuni ale construcției continui au numai valori pozitive, ecuațiile canonice vor căpăta forma:

$$\sum_{(n)} \int_{(l)} \frac{M_i\, dx}{h(x)} = 0 \tag{25}$$

Pe de altă parte, expresia volumului, în formă desfășurată, în conformitate cu formulele (21) și (22), se poate scrie sub forma:

$$V = \sum_{(n)} \int_{(l)} \frac{h(x)\,|M(x)|\,dx}{2\,\sigma_a\, i^2(x)}$$

Pentru cazul în care momentul încovoietor în porțiunile construcției masive are numai valori pozitive, modulul se poate suprima și în conformitate cu formula (24) condiția volumului minim capătă forma:

$$\sum_{(n)} \int_{(l)} \frac{M_i\, h(x)\, dx}{i^2(x)} = 0 \tag{26}$$

Din compararea condiției (25) cu condiția (26) conchidem că condiția de volum minim se poate identifica cu condiția de deformabilitate numai în două cazuri:

1) în cazul cînd raza de inerție a grinzii, în toate secțiunile este proporțională cu înălțimea ei;

2) în cazul înălțimii constante a secțiunii grinzii și, prin urmare, a valorii constante a razei de inerție.

Pentru aceste tipuri de grinzi, coeficientul din formula (22) va rămîne constant și de aceea tot procesul de rezolvare a problemei va fi cu totul identic cu rezolvarea problemei analoage pentru sisteme de bare.

Pe de altă parte, dacă condițiile formulate aici nu sînt satisfăcute, atunci, în cazul general, condiția de volum minim nu se va potrivi cu condiția de deformabilitate și pentru aceste grinzi, după ce a fost satisfăcută cerința de deformabilitate, se va putea pune numai problema determinării volumului convențional necesar.

În ultimul caz însă, la fel ca și pentru cazul analog de calcul al sistemelor de bare se va putea stabili întotdeauna etalonul de comparație, o grindă fictivă static nedeterminată cu volum minim, care însă nu satisface cerința de deformabilitate.

Întrucît la grinzi și la cadre capătă o importanță esențială problema coordonării deformațiilor, în practica calculelor este mai comod să se înceapă rezolvarea problemei tocmai cu această chestiune.

De exemplu, pentru grinzile cu înălțime constantă a secțiunii (în cazul unei lățimi variabile), aceasta duce la simpla folosire a ecuației diferențiale a săgeților.

8. Concluzii generale

În prezentul articol sumar ne-am oprit numai asupra particularităților principale ale noii metode de calcul al construcțiilor static nedeterminate — metoda volumului minim — care este continuarea firească a orientării ce s-a dezvoltat în decursul multor ani în statica construcțiilor.

Particularitățile acestei orientări noi sînt următoarele:

1. Prezența criteriului de economicitate a soluției problemei, pe calea comparării volumului aflat al construcției proiectate cu volumul unei construcții ideale, care satisface unilateral numai cerința volumului minim.

2. Posibilitatea unei realizări rapide a oricăror variante repetate ale calculului, legate de folosirea unor condiții noi, deoarece, atît pentru sisteme de bare cît și pentru construcțiile continui, în formulele care determină volumul construcției (19) sau (22), nucleul formei rămîne constant în desfășurarea calculelor.

3. Posibilitatea alegerii pentru proiectant a soluției în conformitate cu valorile succesive crescînde ale volumului construcției.

Avantajele indiscutabile ale metodei volumului minim, pe care le-am arătat mai sus, merită atenția proiectanților.

Putem spera că avantajele care apar la operarea cu noile forme matematice — funcțiile de oglindă — pe care se bazează metoda volumului minim, vor permite pe viitor să se rezolve o serie de probleme noi, ce se referă la calculul și proiectarea economică a construcțiilor inginerești.

Institutul de aviație din Kazan (U.R.S.S).
Catedra de rezistența materialelor

BIBLIOGRAFIE

[1] *I. M. Rabinovici.* Contribuții la teoria fermelor static nedeterminate. Editura pentru transportul feroviar, Moscova, 1933.

[2] *I. M. Rabinovici.* Mecanica construcțiilor din bare elastice, plane și spațiale, în cartea „Mecanica construcțiilor în U.R.S.S., 1917—1957", Edit. de Stat pentru literatura de construcții și arhitectură, Moscova, 1957.

[3] *C. M. Huberian.* Contribuții la calculul grinzilor static nedeterminate. Lucrările Institutului de cercetări științifice a construcțiilor din Tbilissi, fasc. 32, 1938.

[4] *G. G. Protasov.* Metoda alegerii fermelor echirezistente static nedeterminate. Colecția LIIDT, fasc. 137, 1948.

[5] *A. I. Vinogradov.* Probleme de calcul al construcțiiolr de greutate minimă. Lucrările Institutului de ingineri pentru transportul feroviar din Harcov, fasc. 25, 1955.

[6] *F. I. Sliusarciuc.* Despre calculul fermelor static nedeterminate prin metoda rezistențelor admisibile. Lucrările Institutului de ingineri pentru transportul feroviar din Novosibirsc, fasc. 8. Ed. pentru transportul feroviar, Moscova, 1952.

[7] *A. I. Francisc.* Direct design of elastic statically indeterminate triangulated frameworks for single of loads. Australian Journ. Appl. Science, vol. 4, nr. 2, 1953.

[8] *I. I. Gurevici.* În legătură cu problema legii raționale a variației secțiunilor sistemelor de bare static nedeterminate. Lucrările Institutului de ingineri pentru transportul feroviar din Habarovsk. Ed. pentru transportul feroviar, Moscova, 1954.

[9] *W. B. Ready.* Optimum design of indeterminate frames. Journ of the Aeronaut. Sciences, Vol. 21, 1954.

[10] *G. Swed.* The minimum weight of certain redudant structures. Australian Journ. of. Appl. Science. Vol. 5, N. 1, 1954.

[11] *N. A. Serov.* Metode de calcul al fermelor static nedeterminate cu asigurarea greutății minime. Lucrările științifice ale Institutului de ingineri constructori din Leningrad, fasc. 23, Leningrad, 1956.

[12] *A. B. Izraelit.* Despre garanția soluțiilor pozitive la calculul grinzilor și cadrelor static nedeterminate prin metoda eforturilor date. Lucrările Institutului Silvic unional fără frecvență. Nr. 2, 1956.

[13] *J. Barta.* On the minimum weight of certain redundant structures. Acta techn. Academiae scienciarum Hungaricae, N. 1—2, 1957.

[14] *S. P. Fesic.* Greutatea minimă a cadrelor simplu static nedeterminate. Mecanica construcțiilor și calculul construcțiilor, Nr. 1, 1961.

[15] *I. A. Radțig.* Determinarea volumului minim al fermelor static nedeterminate. Lucrările Institutului de aviație din Kazan, 1946.

[16] *I. A. Radțig.* Aplicarea metodei volumului minim la calculul grinzilor static nedeterminate. Lucrările Institutului de aviație din Kazan, fasc. 32, 1956.

[17] *I. A. Radțig.* Fermele static nedeterminate cu volum minim. Lucrările Institutului de aviație din Kazan, fasc. 51, 1960.

[18] *S. H. Hainullina.* Calculul grinzilor și cadrelor de volum minim static nedeterminate. Lucrările Institutului de aviație din Kazan, fasc. 33—34, 1958.

[19] *N. S. Volcova.* Proiectarea fermelor static nedeterminate care au volum minim de g radul II. Lucrările Insitutului de aviație din Kazan, fasc. 62, 1961.

[20] *A. I. Corșunov.* Metoda grafoanalitică de calcul al grinzilor de egală rezistență ținînd seamă de greutatea proprie. Lucrările Institutului de aviație din Kazan, fasc. 46, 1959.

[21] *V. C. Iuriev.* Contribuții la problema formei teoretice a barei de de egală rezistență la încovoiere. Lucrările Institutului de aviație din Kazan, fasc. 46, 1959.

[22] *V. P. Borisov.* Contribuții la calculul grinzilor continui de egală rezistență la încovoiere. Lucrările Institutului de aviație din Kazan, fasc. 46, 1959.

[23] *S. N. Clepicov.* Calculul fermelor de oțel pretensionate. Industria construcțiilor, nr. 7, 1958.

[24] *I. B. Volodarschi.* Calculul de rezistență al fermelor de oțel pretensionate de cost minim, cu folosirea funcțiilor de oglindă. Colecția „Proiectarea și construirea edificiilor și construcțiilor de producție", Nr. 5, Moscova, 1961.

[25] *Z. Wasiutynski.* O przeksztalceniu kratovnic przez wprowadzenie nowych wezów. Komitet Uczcenia Zaslug naukowych prof. dr. inz. Maksymiliana t. Hubera. Gdansk-Politechnika, 1950.

[26] *Z. Wasiutynski, A. Brandt.* Aktualny stan wiedzy o ksztatowaniu wytrzymaosciewyn konstrukcij. Rozprawy Inzynierskie CCXXV, Tom X, Zeszyt 2, 1962.

[27] *A. Brandt i J. Ignaszak.* Ksztatowanie wytrzmaosciowe belki wspornikowej. Rozprawy Inzynierskie, XCIV, N. I, 1958.

[28] *I. M. Rabinovici.* Curs de mecanică a construcțiilor sistemelor de bare, p. I și p. II. Ed. pentru literatura de construcții și arhitectură, Moscova, 1950—1954.

[29] *Gh. Buzdugan.* Rezistența materialelor, I, Ed. Tehnică, București, 1956.

[30] *I. Kisiov.* Rezistența materialelor, Ed. de Stat „Știința și arta", Sofia, 1954.

[31] *I. A. Radțig.* Principiile generale ale teoriei funcțiilor de oglindă. Lucrările Institutului de aviație din Kazan, fasc. 33—34, 1958.

[32] *N. S. Volcova, I. A. Radțig, N. H. Hasansin.* Calculul fermelor static nedeterminate de volum minim. Mecanica construcțiilor și calculul construcțiilor, nr. 4, 1961.

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НАИМЕНЬШЕГО ОБ'ЕМА

(Краткое содержание)

Данная работа посвящена изложению нового метода проектирования статически неопределимых систем, тесно связанного с развитием направления, высказанного в СССР И. М. Рабиновичем, в 1933 году.

Основным требованием проектирования для излагаемо метода является требование проектирования возможно меньшего об'ема конструкции при условии, чтобы напряжения в ее элементах не превосходили допускаемых.

Отличительными особенностями излагаемого метода являются: установление эталона сравнения, позволяющего сравнить об'ем запроектированной конструкци с предельным об'емом, который возможно осуществить, а также возможность быстрого выполнения любых повторных вариантов расчета, выбор которых связан с последовательным возрастанием об'ема конструкции.

Решение поставленной задачи оказывается возможным осуществить благодаря применению теории модулярных или зеркальных функций.

В настоящее время данный метод применяется в СССР при расчете предварительно напряженных конструкций.

THE CALCULATION OF LEAST VOLUME STATICAL UNDETERMINED SYSTEM

(Summary)

This paper describes the new method of designing statical undetermined system, closeli related to the development of the orientation stated in the USSR by I. N. Rabinovici, 1933.

In the stated method the fundamental requirement of designing is tot create a building volume as little as posible, provided the stresses of its constituients be not greater than the working stress.

The characteristics of the method described are: to determine the standard, which may allow to compare the designed building volume to the possibile limit to be achieved, as well as to make possible the rapid execution of any computing variant, which may be obtained by succesive increases of the building volume.

Doe to the applying of the modular function theory, this problem may be solved.

At present, this new method is applied in the USSR to the calculation of prestressed structures.

LE CALCULE DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES DE VOLUME MINIMUM

(Résumé)

On expose la nouvelle méthode de calcul des systèmes hyperstatiques, fondée sur le développement de l'orientation exprimée en URSS par Rabinovici, en 1933.

Le but de la méthode exposée, est de réaliser un volume de construction le plus petit possible, à condition que les contraintes dans ses éléments ne dépassent les résistances admissibles.

Les particularités de la méthode exposée sont: établir un étalon, qui permet de comparer le volume de la construction étudiée à un volume limite possible de réaliser, ainsi que la posibilité d'effectuer rapidement de n'importe quelles variantes du calcul, qui se réalisent avec des augmentations succesives du volume de la construction.

La solution du problème est possible grâce à l'application de la théorie des fonctions modulaires, ou de miroir.

Actuellement, cette méthode s'applique en URSS au calcul des constructions précontraintes.

BERECHNUNG STATISCH UNBESTIMMTER SYSTEME MIT KLEINSTEM VOLUMEN

(Zusammenfassung)

Es wird eine neue Methode für die Berechnung der statisch unbestimmten Systeme, in enger Verbindung mit der in der U.d.S.S.R. im Jahre 1933 durch I. M. Rabinovitsch ausgedrückten Entwicklungsrichtung vorgeführt.

Die Grundforderung dieser Methode tst die Ausführung eines möglichst kleinen Volumens der Konstruktion, mit der Bedingung dass die Spannungen ihrer Bestandteile nicht die zulässigen Werte überschreiten.

Die Sonderheiten dieser Methode bestehen in: Festsetzung eines Etalons, das den Vergleich des Volumens der projektierten Konstruktion mit einem möglich auszuführenden Grenzvolumen erlaubt wie, auch die Möglichkeit der schnellen Ausführung jedweder Varianten der Berechnung, welche mit nacheinanderfolgenden Wergrösserungen des Volumens, erreicht wird.

Die Lösung des Problems ist durch die Anwendung der Theorie der Modulären — oder — Spiegelfunktionen ermöglicht.

Gegenwärtig wird diese Methode, in der U.d.S.S.R. zur Berechung der Vorgespannten — Eisenbeton — Konstruktionen angewendet.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

CONSTRUCȚIA DE MAȘINI

COEFICIENTUL DE UMPLERE AL CILINDRULUI MOTORULUI CU ARDERE INTERNĂ ȘI TURAȚIE RAPIDĂ

ADRIAN STAMBULEANU

Se stabilește o nouă expresie a coeficientului de umplere al cilindrului motorului termic în funcție de factorii de care el depinde pe baza unei ipoteze de lucru în care se ține seama de condițiile de desfășurare ale admisiunii la motorul cu turație rapidă.

Puterea unui motor cu ardere internă și momentul lui motor, în afară de alți factori, depind și de greutatea de amestec proaspăt combustibil sau numai de aer cu care este umplut cilindrul în timpul admisiunii.

Pentru ca la un motor să se poată calcula eficacitatea cu care se realizează sau se poate realiza umplerea cilindrului și să se poată aprecia măsurile de luat pentru îmbunătățirea umplerii s-a introdus, în teoria termică a motorului, noțiunea de coeficient de umplere al cilindrului.

Acesta se definește prin raportul:

$$\eta_v = \frac{G}{G_0} \tag{1}$$

în care

G este greutatea de aer sau de amestec proaspăt combustibil ce intră și rămîne efectiv în cilindrul motorului;

G_0 — greutatea încărcăturii cilindrului în cazul cînd presiunea și temperatura acesteia ar fi, pentru motorul cu aspirație, acelea ale mediului ambiant pentru motorul cu supraalimentare, acelea dinaintea supapei de admisiune.

Greutatea de amestec proaspăt combustibil sau numai de aer care intră și rămîne efectiv în cilindru și care determină, conform ecuației (1), valoarea coeficientului de umplere, este dependentă de factorii care condiționează modul în care se desfășoară admisiunea. De aceea, pentru a se putea calcula coeficientul de umplere, pentru a se putea face o analiză a modului de dependență a coeficientului de umplere de diferiții factori, care condiționează desfășurarea admisiunii, este necesar să se stabilească o relațiune de legătură între coeficientul de umplere și acești factori.

În cele ce urmează s-a considerat că conducta de admisiune și cilindrul motorului, separate printr-o supapă, menținută deschisă în tot timpul

admisiunei într-o poziție de secțiune medie de deschidere a supapei, alcătuiesc o singură conductă, fig. 1, prin care aerul, amestecul proaspăt combustibil, gazele de ardere reziduale și în final amestecul din cilindru se găsesc pe întregul traseu al conductei (conductă de admisiune și cilindru), din momentul în care pistonul pornește din p.m.s. și pînă la

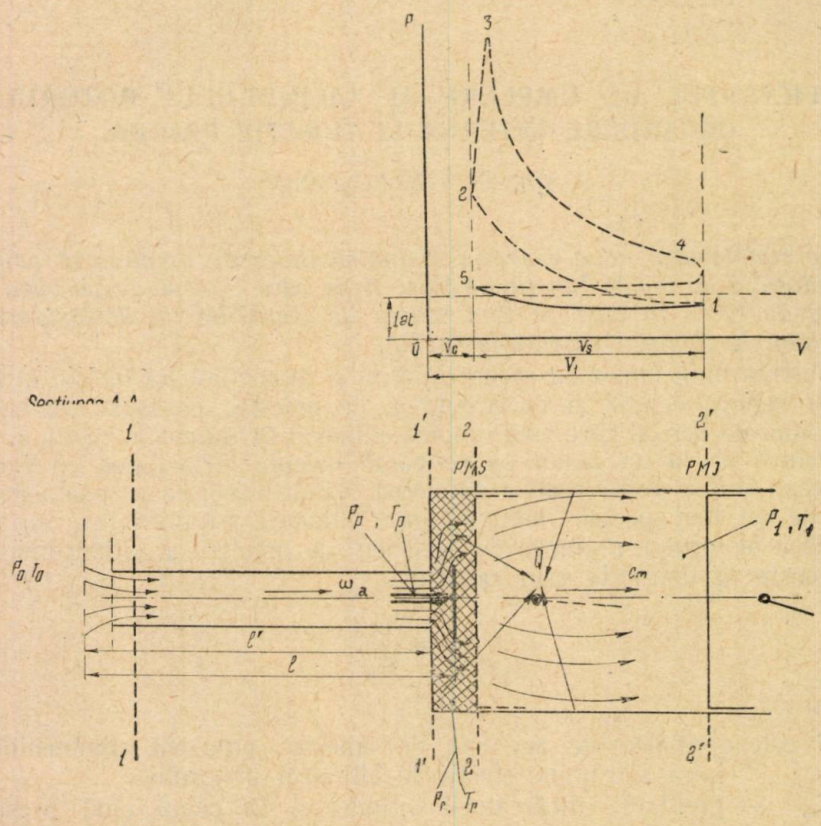


Fig. 1. Deducerea ecuației bilanțului energetic

sfîrșitul cursei de admisiune, într-o mișcare permanentă cu o viteză ω_a pe conducta de admisiune, cu o viteză c_m în interiorul cilindrului.

Această ipoteză de calcul este cu atît mai justificată, pentru motorul cu aspirație și turație rapidă, cu cît la acesta, după ce se învinge, la începutul cursei de admisiune, prin depresiunea creiată în cilindru datorită deplasării pistonului, inerția de repaus a coloanei de fluid de pe traseul de admisiune și coloana de fluid, pusă în mișcare și accelerată, se deplasează în lungul întregului traseu urmărind pistonul, tot datorită inerției, această coloană continuă să se miște, îndesîndu-se spre piston și după ce acesta, spre sfîrșitul cursei de admisiune, își încetinește mersul

și din p.m.i. se reîntoarce și se deplasează în cilindru în sens contrar cu sensul de mișcare pe care-l are în continuare coloana de fluid.

În această ipoteză de lucru masa de fluid care ocupă la începutul cursei de admisiune, cînd pistonul pornește din p.m.s. spre p.m.i., volumul 1—2, fig. 1, după timpul Δz, în care se efectuează cursa de admisiune, se găsește deplasată și ocupă întregul volum 1′—2′ al cilindrului.

Pentru deducerea expresiei coeficientului de umplere scriem ecuația bilanțului energetic între starea energetică inițială și finală pe care aceeași masă de fluid o are la începutul și sfîrșitul cursei de admisiune a pistonului în conducta formată din conducta de admisiune și din cilindrul motorului.

Pentru aceasta se notează cu:

$G_p = \frac{G}{\varrho}$, kg — greutatea aerului sau amestecului proaspăt combustibil ce intră în cilindrul motorului pînă la sfîrșitul cursei de admisiune;

ϱ, — gradul de încărcare suplimentară a cilindrului și după sfîrșitul cursei de admisiune a pistonului, datorită umplerii suplimentare prin inerție a cilindrului; valoarea lui ϱ în medie 1,02—1,06 [1];

$G_p i_p$, kcal — entalpia greutății G_p de aer sau de amestec proaspăt combustibil în condițiile de stare din conducta de admisiune înainte de supapa de admisiune;

$G_p A \frac{\omega_a^2}{2g}$, kcal — căldura corespunzătoare energiei cinetice a greutății G_p de aer sau de amestec proaspăt combustibil ce se scurge prin conducta echivalentă și orificiul de admisiune, fig. 1, cu viteza medie ω_a pe care o are fluidul în secțiunea de deschidere medie a supapei;
A, kcal/kgf.m = echivalentul caloric al lucrului mecanic;
g, m/sec^2 = accelerația gravitației;

$G_n \frac{xr}{Y+1}$, kcal — căldura necesară vaporizării a x procente din combustibilul lichid rămas să se vaporizeze în cilindrul motorului, în timpul cursei de admisiune;
pentru motorul cu gaz și pentru motorul cu autoaprindere (Diesel), $x = 0$;
pentru motorul cu injecție directă de combustibil lichid, în timpul admisiunei în cilindru, $x \approx 1$;
pentru motorul cu carburator $0 < x < 1$;
r, kcal/kg, este căldura latentă de vaporizare a combustibilului lichid,
$Y = \lambda_0 L_0$, kg/kg, cantitatea reală de aer necesară arderii unui kg de combustibil,
λ_0 = coeficientul de exces de aer,
L_0 = cantitatea de aer teoretică necesară arderii unui kg de combustibil;

G_r, kg — greutatea gazelor reziduale din cilindru;

$G_r i_r$, kcal — entalpia greutății G_r de gaze reziduale în condițiile de stare de la sfîrșitul cursei de evacuare;

$G_r A \frac{c_m^2}{2g}$, kcal — căldura corespunzătoare energiei cinetice a greutății G_r de gaze reziduale considerate în mișcare cu viteza medie a pistonului c_m;

G_1, kg — greutatea de aer și gaze reziduale sau de amestec carburant ce se găsește în cilindru la sfîrșitul cursei de admisiune;

$G_1 i_1$, kcal — entalpia greutății G_1 de aer și gaze reziduale sau de amestec carburant în condițiile de stare din momentul sfîrșitului cursei de admisiune;

$G_1 A \frac{c_m^2}{2g}$, kcal — căldura corespunzătoare energiei cinetice a greutății G_1 de aer și gaze reziduale sau de amestec carburant ce se găsește în cilindru, în timpul și la sfîrșitul cursei de admisiune, încă în mișcare cu o viteză medie, egală cu viteza medie c_m a pistonului;

Q_1, kcal — cantitatea de căldură luată de la pereții interiori, calzi ai cilindrului, în timpul cursei de admisiune, de greutatea G_1, de amestec de aer și de gaze reziduale sau de amestecul carburant din cilindru;

$G_1 Q_f = G_1 A L_f$, — cantitatea de căldură corespunzătoare lucrului mecanic de frecare, kcal.

În ipoteza de lucru și cu notațiile de mai sus, cu însemnările de pe fig. 1, ecuația bilanțului energetic, se poate scrie sub forma [2]:

$$G_p i_p + G_p \frac{A\omega_a^2}{2g} + G_r i_r + G_r \frac{Ac_m^2}{2g} + Q_1 + G_1 A L_f - G_p \frac{xr}{Y+1} = \\ = G_1 i_1 + G_1 \frac{Ac_m^2}{2g} + G_1 Q_f \tag{2}$$

sau

$$G_p \left(i_p + A \frac{\omega_a^2 - c_m^2}{2g} - \frac{xr}{Y+1} \right) + G_r i_r = G_1 i_1 - Q_1 \tag{3}$$

Dacă se înseamnă cu:

P_0, T_0, — presiunea absolută în kgf/m² și temperatura absolută în °K a atmosferei ambiante;

P_p, T_p, R_p, — presiunea absolută în kgf/m², temperatura absolută în °K, constanta amestecului proaspăt combustibil sau numai a aerului în kgf - m/kg - grd, în conducta de admisiune, înaintea supapei de admisiune;

P_r, T_r, R_r, — presiunea absolută în kgf/m², temperatura absolută în °K, constanta gazelor reziduale în kgfm/kggrd, în cilindru la sfîrșitul cursei de evacuare;

P_1, T_1, R_1, — presiunea absolută în kgf/m², temperatura absolută în °K, constanta amestecului de aer și gaze reziduale sau a amestecului carburant, în kgf · m/kg · grd, la sfîrșitul cursei de admisiune, în punctul 1 al diagramei, fig. 1, cînd energia cinetică a fluidului încă în mișcare cu viteza medie c_m nu s-a transformat, prin frînare, în căldură;

V_s, V_c, V_1, — volumul cursei pistonului, a camerii de ardere, total al cilindrului, fig. 1, în m³;

$\zeta = \frac{V_r}{V_c}$ $\frac{\text{(volumul gazelor reziduale)}}{\text{(volumul camerii de ardere)}} = 0 \ldots 1$, gradul de spălare al camerii de ardere de gazele reziduale;

se poate scrie:

$$G_p = \frac{\eta_v G_0}{\varrho} = \frac{\eta_v}{\varrho} \cdot \frac{P_0 V_s}{R_p T_0}, \text{ kg}, \tag{4}$$

$$G_r = \frac{\zeta P_r V_c}{R_r T_r}, \text{ kg}, \tag{5}$$

$$G_1 = \frac{P_1(V_c + V_s)}{R_1 T_1} = \frac{P_1 V_1}{R_1 T_1}, \text{ kg}. \tag{6}$$

Înlocuind în (3) pe G_p, G_r și G_1 cu egalul lor din (4), (5), (6) se obține:

$$\frac{\eta_v P_0 V_s}{\varrho R_p T_0}\left\{ i_p + A\,\frac{\omega_a^2 - c_m^2}{2g} - \frac{xr}{Y+1}\right\} + \frac{\zeta P_r V_c}{R_r T_r} i_r = \frac{P_1(V_c + V_s)}{R_1 T_1} i_1 - Q_1 \tag{7}$$

În ecuația (7), pentru simplificare considerăm aproximativ egale [1]:

— constanta amestecului carburant ($R_1 \approx 30$), constanta aerului sau a amestecului proaspăt (R_p), constanta gazelor de ardere (R_r), adică:

$$R_1 \approx Rp \approx Rr \tag{8}$$

— căldurile specifice la presiune constantă din expresiile entalpiilor specifice:

$$i_1 = c_{p_1} \cdot T_1\,;\; i_p = c_{p_p} \cdot T_p\,;\; i_r = c_{p_r} \cdot T_r, \tag{9}$$

adică:

$$c_{p_1} \approx c_{p_p} \approx c_{p_r} \approx 1/4, \text{ kcal/kg} \cdot \text{grad}. \tag{10}$$

Cu aceste simplificări, după cîteva înlocuiri și transformări, însemnînd raportul $(V_0+V_s)/V_c$ cu ε (raportul de compresiune), expresia coeficientului de umplere, dedusă din ecuația (7), are forma:

$$\eta_v = \varrho \frac{T_0}{P_0} \frac{\frac{\varepsilon}{4(\varepsilon-1)} P_1 \left(1 - \zeta \frac{P_r}{P_1} \frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{30 \cdot Q_1}{V_s}}{\frac{T_p}{4} + \frac{\omega_a^2 - c_m^2}{91{,}5^2} - \frac{xr}{Y+1}} \tag{11}$$

Modul cum pot să fie calculate mărimile P_1, P_r, T_p și Q_1, ce intră în expresia de mai sus, se arată în cele ce urmează.

Calculul lui P_1 și P_r. Dacă se notează cu:

P_{Σ_a}, P_{Σ_e}, P_u, suma pierderilor de presiune de pe traseul de admisiune, respectiv de pe traseul de evacuare; pierderea de presiune, cînd se produce accelerarea masei de fluid de pe traseul de admisiune.

$$P_1 = P_0 - P_{\Sigma_a} - P_u. \tag{12}$$

$$P_r = P_0 + P_{\Sigma_e}. \tag{13}$$

Dacă se notează cu:

$\Sigma\zeta_a$, suma coeficienților de pierdere de presiune de pe întregul traseu de admisiune raportată la secțiunea medie, deschisă de supapa de admisiune, prin care fluidul curge cu viteza medie ω_a;

γ_a, greutatea specifică medie a fluidului pe traseul de admisiune, aproximată la cca. 1, 2 kgf/m³;

$\Sigma\zeta_e$, suma coeficienților de pierdere de presiune de pe întregul traseu de evacuare raportată la secțiunea medie, deschisă de supapa de evacuare, prin care gazele de ardere se scurg cu viteza medie ω_e;

γ_e, greutatea specifică medie a gazelor de ardere la starea acestor gaze pe conducta de evacuare și aproximată la cca. 0,4 kgf/m³;

$= l' + l''$, fig. 1, lungimea echivalentă a coloanei de fluid de pe traseul de admisie, ce trebuie accelerată, redusă la diametrul orificiului supapei de admisiune, în metri;

$\frac{d\omega_a}{dt}$, accelerația masei coloanei de fluid a traseului de admisiune echivalent, în m/s²;

se poate scrie:

$$P_{\Sigma_a} = \Sigma\zeta_a \frac{\gamma_a \omega_a^2}{2g} \cong \Sigma\zeta_a \left(\frac{\omega_a}{4}\right)^2, \; kgf/m^2. \tag{14}$$

$$P_{\Sigma_e} = \Sigma\zeta_e \frac{\gamma_e \omega_e^2}{2g} \cong \Sigma\zeta_e \left(\frac{\omega_e}{7}\right)^2, \; kgf/m^2 \tag{15}$$

$$P_u = l \cdot \frac{\gamma_a}{g} \frac{d\omega_a}{dt} \cong \frac{l}{8} \frac{d\omega_a}{dt}, \; kgf/m^2. \tag{16}$$

și expresiile (12) și (13) devin:

$$P_1 = P_0 - \Sigma\zeta_a \left(\frac{\omega_a}{4}\right)^2 - \frac{l}{8}\frac{d\omega_a}{dt},\ kgf/m^2, \tag{12a}$$

$$P_r = P_0 + \Sigma\zeta_e \left(\frac{\omega_e}{7}\right)^2,\ kgf/m^2 \tag{13a}$$

Calculul, ca exemplu, a temperaturii T_p pentru cazul motorului cu benzină cu carburator. Se notează cu:

- t_0 — temperatura aerului atmosferic, în °C;
- t_1 — temperatura combustibilului lichid la buza de deschidere a jiclonului în difuzor, în °C;
- c_{p_a} — căldura specifică a aerului la presiune constantă, în kcal/kg°C;
- c_{pl} — căldura specifică a combustibilului lichid, în kcal/kg°C;
- c_{p_v} — căldura specifică a vaporilor de combustibil la presiune constantă, în kcal/kg°C;
- r — căldura laterală de vaporizare a combustibilului lichid, în kcal/kg;
- x — procentul (%) de combustibil lichid rămas să se vaporizeze în cilindrul motorului;
- Q_0 — canitatea de căldură schimbată de 1 kg de amestec carburant cu pereții conductei de admisiune, în kcal.

Din ecuația de bilanț de căldură:

$$\begin{aligned} &Yc_{pa}\cdot t_0 + c_{pl}\cdot t_l + (Y+1)\,Q_0 = x\cdot c_{pl}\cdot t_l + \\ &+ (1-x)\cdot c_{pv}\cdot t_p + (1-x)\cdot r + Y\cdot c_{pa}\cdot t_p \end{aligned} \tag{17}$$

rezultă t_p și deci T_p.

Calculul lui Q_1 [3]. Cantitatea de căldură Q_1 se poate calcula cu ecuația de bază a transmiterii căldurii

$$Q = \alpha\cdot F\cdot(t_w - t)\,\Delta Z,\ \text{kcal}, \tag{18}$$

pusă sub formula [3]:

$$Q_1 = \alpha\left[\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\int_{F_0}^{F\pi} t\omega\cdot dF\cdot d\varphi - F\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} t\cdot d\varphi\right]\frac{1}{2\cdot\pi\cdot n\cdot 60}\,\frac{\text{kcal}}{\text{cursa admisiune}} \tag{19}$$

În această ecuație s-a însemnat cu:

- α, — un coeficient mediu de transmitere al căldurii de la pereții interiori calzi ai cilindrului, la amestecul din cilindru, în timpul cursei de admisiune, în kcal/m²/°Ch;

F_φ — suprafața interioară a pereților cilindrului care ia parte la transmiterea căldurii și care variază de la valoarea F_0, pentru punctul mort superior al pistonului (cînd unghiul de rotație al manivelei arborelui motor este $\varphi = 0$), pînă la F_π (cînd $\varphi = \pi$), în m; pentru o formă cilindrică a cilindrului motorului, dacă d este diametrul cilindrului, s cursa pistonului și ε raportul de compresiune:

$$F_0 = 2\,\frac{\pi d^2}{4} + \frac{1}{\varepsilon - 1}\,\pi \cdot d.\ s. \text{ și}$$

$$F_\pi = 2\,\frac{\pi d^2}{4} + \left(\frac{1}{\varepsilon - 1} + \frac{1}{2}\right)\pi \cdot d.\ s.;$$

t_w, — temperatura pereților cilindrului ce variază cu suprafața care ia parte la transmiterea căldurii, în °C; suprafața este mereu alta cu unghiul de rotație al manivelei arborelui motor.

t, — temperatura medie a amestecului din cilindru peste tot aceiași în fața fiecărei suprafețe interioare a pereților cilindrului ce transmite căldura, variind însă în lungul cilindrului de la temperatura cu care amestecul intră în cilindru pînă la temperatura pe care acesta o are la sfîrșitul cursei de admisiune, în °C;

$\Delta Z = \dfrac{1}{2 \cdot \pi \cdot n \cdot 60}$ — durata în timp în care se desfășoară cursa de admisiune la un motor în 4 timpi, în ore (h); cu n s-a însemnat numărul de rotații ale arborelui motor.

Coeficientul mediu de transmitere al căldurii α se poate calcula cu expresia [4]:

$$\alpha = 3600 \cdot A_m \cdot c_{p_w} \cdot \eta_w^{1/4} \cdot \left(\frac{T_z}{T_{wm}}\right)^m \cdot (c_m \cdot \gamma)^n, \qquad (20)$$

în care:

A_m — este un coeficient mediu ce poate fi determinat [3] în funcțiune de poziționea supapei în cazul cilindrului și valorile pe care le ia, pentru fiecare φ, rapoartele: $\frac{h\ (\text{cursa sup.})}{d\ (\text{diam. cil.})}$; $\frac{D\ (\text{diam. orif. adm.})}{d\ (\text{diam. cil.})}$; $\frac{l\ (\text{lungim. cil.})}{d\ (\text{diam. cil.})}$;

c_{p_w} — căldură specifică a amestecului (sau a aerului) la presiune constantă și la temperatura medie a peretelui cilindrului, în kcal/kg°C;

$T_{w_m}=273+t_{w_m}$ — temperatura medie absolută a pereților cilindrului, în °K.
T_z — temperatura medie absolută a amestecului din cilindru în timpul cursei de admisiune, socotită ca media aritmetică a temperaturilor amestecului la intrarea în cilindru, la începutul admisiunii și la sfîrșitul cursei de admisiune, în °K ;
$(c_m\,\tau)$ — greutatea amestecului ce trece în timp de o secundă prin secțiunea de 1 m², în kg/m²s ;
$m=2$, $n=0{,}75$, exponenți.

Catedra ae aviație

BIBLIOGRAFIE

[1] *M. M. Maslenicov și M. S. Rapiport* — Motoare cu piston pentru aviație, Ed. Tehnică, București, 1953.
[2] *A. Stambuleanu* — Studiul termodinamic al admisiunii la motorul cu ardere internă în 4 timpi : Bul. Soc. Politehnice, București, nr. 5, 1943.
[3] *A. Stambuleanu și Osamu Hirao* — Încălzirea amestecului carburant în timpul umplerii, de la pereții interiori calzi ai cilindrului motorului cu benzină, rev. M.T.Z., Stuttgart, nr. 6, 1962.
[4] *S. Stambuleanu* — Contribuție la problema transmiterii căldurii în timpul admisiunii la motorul cu ardere internă, dis. T. H. Berlin, 1935.

КОЭФФИЦИЕНТ НАПОЛНЕНИЯ ЦИЛИНДРА ДВИГАТЕЛИ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ, РАБОТАЮЩЕГО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ОБОРОТОВ

(Краткое содержание)

В работе выводится новое выражение коэффициента наполнения цилиндра термического мотора в связи с факторами, от которых он зависит на основе рабочей гипотезы, где действие мотора, работающего с большим числом оборотов, зависит от условии всасывания.

THE VOLUMETRIC EFFICIENCY OF A CYLINDER OF A RAPID INTERNAL COMBUSTION ENGINE

(Summary)

A new evpression for the volumetric efficiency of a cylinder of a rapid internal combustion engine was defined in terms of the factors they depend upon having as basis a hiyppothesis of work taking more into account the conditions of developement of the admission in the cylinder of a rapid internal combustion engine.

LE COEFICIENT DE REMPLISSAGE DU CYLINDRE DU MOTEUR RAPIDE A COMBUSTION INTERNE

(Résumé)

Une nouvelle expression est établie pour le coefficient de remplissage du moteur rapide à combustion interne en fonction des facteurs dont elle dépend ayant comme base une hyppothèse de travail qui tient compte davantage des conditions de développement de l'admission dans le cylindre du moteur rapide.

DER LADUNGSGRAD DES ZYLINDERS DER SCHNELLAUFENDEN VERBRENNUNGSMOTORE

(Zusammenfassung)

Es wird ein neuer Ausdruck für den Ladungsgrad des Zylinders von Verbrennungsmotoren aufgestellt, in Abhängigkeit der Umstände und begründet durch eine Arbeitshypothese die die Ausbildung der Einlassverhältnisse beim schnellaufenden Motor berücksichtigt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

CONSIDERAŢII ASUPRA DETERMINĂRII TEMPERATURII DE RUPERE A FILMULUI DE LUBRIFIANT

MUSTAFA R. MUSTAFA

1. Consideraţii teoretice

Într-o lucrare anterioară (1) s-a arătat rolul fenomenelor superficiale în procesul ungerii. Astfel s-a stabilit că, pentru a se putea forma o peliculă de lubrefiant între două suprafeţe solide, lubrefiantul trebuie să posede în primul rînd, capacitatea de a „uda" suprafeţele respective; în al doilea rînd pentru a se putea forma o peliculă rezistentă, care să se menţină timp îndelungat sub acţiunea unor sarcini, moleculele sale trebuie să fie adsorbite şi orientate pe aceste suprafeţe. Cercetările röentgenografice şi cele făcute cu ajutorul difracţiei electronice au arătat că moleculele lubrefiantului din păturile adiacente suprafeţelor solide, sînt dispuse paralel una faţă de cealaltă şi perpendicular (în unele cazuri paralel) pe suprafeţele respective (fig. 1).

Această orientare a moleculelor, modifică într-o măsură însemnată structura ei şi prin aceasta implicit şi proprietăţile sale volumetrice. Structura lubrifiantului din acest strat se apropie de structura corpurilor solide, fapt ce a determinat pe unii cercetători să o denumească structură quasicristalină. Această structură specială este determinată de acţiunea moleculară a suprafeţei corpului solid şi de aceea depinde de natura lui. Orientarea moleculelor facilitează alunecarea straturilor în direcţia acestor straturi (analog planelor de clivaj de la cristale) şi în acelaşi timp măreşte rezistena de distrugere a peliculelor sub acţiunea sarcinei.

Vom întregi această concepţie cu cîteva date noi, apărute în literatura respectivă.

În primul rînd, se indică că orientarea moleculelor slăbeşte neîntrerupt pe măsura ce ne îndepărtăm de suprafaţa corpului solid. Se pare însă că, conform unor date noi (3) orientarea moleculelor nu se schimbă neîntrerupt, ci brusc la anumită distanţă de peretele solid. Fenomenul este analog cu modificarea orientării moleculelor cristalelor lichide la limita de despărţire între faza cristalină lichidă şi faza lichidă necristalină.

Conform acestei teorii, pelicula de lubrifiant ar fi formată deci din două zone distincte, separate printr-o limită bine pronunţată, cu structuri şi proprietăţi diferite.

In al doilea rînd, însuși stratul superficial al corpului solid se modifică. Datorită temperaturilor mari de pe aceste suprafețe se produc o serie de transformări fizico-chimice cum ar fi: formarea de faze noi, procese de difuzie, de sudare, de îmbogățire a straturilor de pe supra-

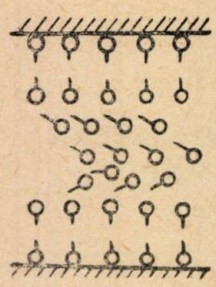


Fig. 1

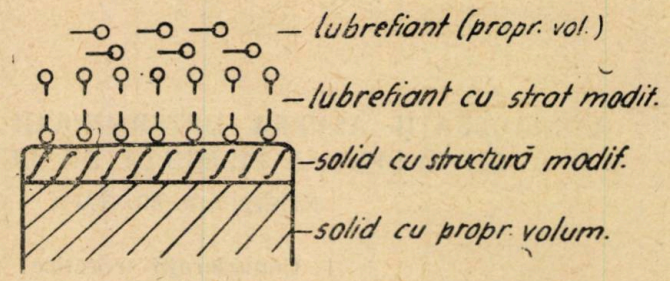


Fig. 2

față cu atomii unui element și sărăcirea în atomi altui element. Toate aceste fenomene fac ca stratul respectiv să-și schimbe structura față de structura corpului și prin aceasta și proprietățile sale, și anume aceea de a prezenta o duritate mai mare.

Deci în cazul suprafețelor lubrifiate situația s-ar prezenta în felul următor (fig. 2). Corpul solid, cu proprietățile sale fizice și mecanice, prezintă la suprafață un strat cu structură și proprietăți diferite; urmează stratul adsorbit și orientat de lubrifiant, cu structură și proprietăți specifice și mai departe, în cazul ungerii fluide stratul de lubrifiant cu molecule neorientate.

Modificările pe care le suferă stratul orientat de lubrifiant și cele pe care le suferă suprafața corpului solid precum și interacțiunea dintre ele

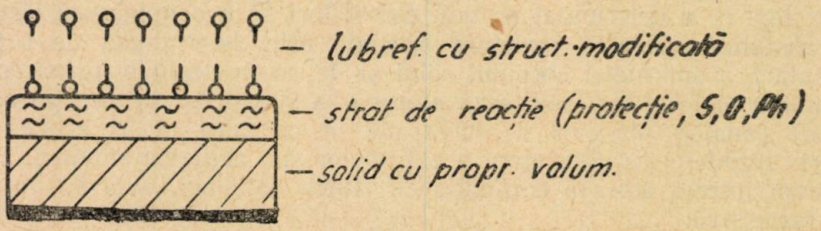


Fig. 3

sînt diferite în funcție de sarcina și viteza (respectiv temperatura) la care funcționează ansamblul respectiv. De aceea în prezent, în funcție de acești doi parametri (sarcină și viteză) se deosebesc următoarele aspecte ale ungerii la limită:

1. Ungere cu presiuni joase și viteze joase sau condiții ușoare ale ungerii la limită (lagăre cu viteze reduse, arcuri cu foi, inbinări articulate).

2. Ungere limită la temperaturi înalte (cilindrii mașinilor care funcționează cu aburi supraîncălziți, motoare cu ardere internă etc.).

3. Ungere limită la presiuni înalte (rulmenți cu bile, unele angrenaje cilindrice).

4. Ungere limită la presiuni și temperaturi foarte mari (angrenaje hipoide).

Este de menționat faptul, că ultimul tip de ungere este caracterizat printr-o acțiune chimică între uleiul și metalul respectiv. În acest caz, probabil că între metalul cu proprietăți volumetrice și stratul de lubrefiant orientat se găsește un strat intermediar format din compuși de metal și elementele ce se găsesc în ulei (sulf fosfor, sau alte elemente de aditivare a uleiului) (fig. 3). Acest strat joacă un rol protector în ceea ce privește griparea pieselor, și în unele cazuri poate reduce frecarea.

Toate aceste considerațiuni prezintă importanță din punct de vedere al înțelegerii fenomenului fizic al ungerii. Din punct de vedere practic însă, mai ales în legătură cu alegerea și întrebuințarea lubrefianților deja cunoscuți sau a altor lubrefianți noi, se simte nevoia unui criteriu de aprecierea capacității de ungere al unui lubrefiant. Prin *capacitate de ungere, înțelegem proprietatea unor fluide de a forma, menține și reface o peliculă de lubrefiant în prezența unui anumit corp solid (1)*. În definirea capacității de ungere va intra deci vîscozitatea lubrefiantului precum și totalitatea fenomenelor superficiale amintite mai sus și care au fost denumite provizoriu *onctuozitate*. Între onctuozitate și vîscozitate există o diferențiere calitativă accentuată în sensul că pe cînd vîscozitatea este o proprietate intrisecă a lubrefiantului, onctuozitatea este o proprietate care se manifestă în prezența anumitor corpuri și în anumite condiții.

Vîscozitatea uleiului se determină prin metodele cunoscute și influența ei se ia în considerare prin teoria hidrodinamică a ungerii. Deci criteriul de apreciere a capacității de ungere se referă mai ales la onctuozitate.

Trebuie subliniat faptul că vîscozitatea uleiului joacă un rol însemnat în cazul ungerii fluide, pe cînd în toate celelalte cazuri rolul principal îl deține onctuozitatea.

În lucrarea amintită (1) s-a făcut un studiu sistematic și s-a analizat atît natura fenomenelor superficiale („udare", adsorbție și orientare) cît și factorii de care depind aceste fenomene. Dintre acești parametri, și anume tensiunea superficială, polaritatea moleculelor, căldura de umectare, energia de adsorbție, lungimea catenelor, temperatura, drept criteiru de apreciere al unctuozității s-a propus temperatura la care se rupe pelicula de lubrefiant (deci se produce contact direct metal pe metal), pe care am denumit-o *temperatura de rupere*.

Această alegere s-a făcut pe baza a două considerente. În primul rînd temperatura superficială constituie legătura între parametrii de exploatare (sarcina, viteza) și fenomele superficiale descrise anterior. Creșterea sarcinii și a vitezei, duce implicit la creșterea temperaturii superficiale, ceea ce are ca urmare o slăbire a coeziunii moleculare atît pe suprafața corpului respectiv cît și între moleculele corpului solid și a lubrefiantului. În final, la anumită sarcină și viteză, deci la anumită temperatură,

structura orientată a filmului poate să dispară, pelicula se distruge și se produce contactul metalic direct.

În al doilea rînd, la celelalte criterii (tensiunea superficială, căldura de umectare, energia de absorbție) nu se ține seamă de transformările structurale pe care le suferă stratul superficial al corpului solid. Valorile care caracterizează aceste criterii sînt deduse pe baza unor experiențe în care procesul frecării nu intervine deloc, și ca atare se măsoară comportarea lubrefiantului față de un corp, ale cărui proprietăți nu sînt modificate, care prezintă aceleași proprietăți în volum și pe suprafață.

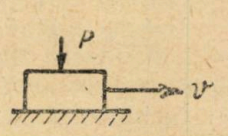
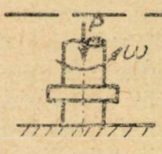
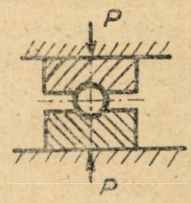
Spre deosebire de aceasta, temperatura de rupere se măsoară chiar în procesul frecării și deci valoarea ei va reflecta implicit toate transformările structurale care se petrec în procesul frecării.

Pentru verificarea practică a celor de mai sus, se pune în primul rînd problema realizării unui aparat cu ajutorul căruia să se poată determina temperatura de rupere.

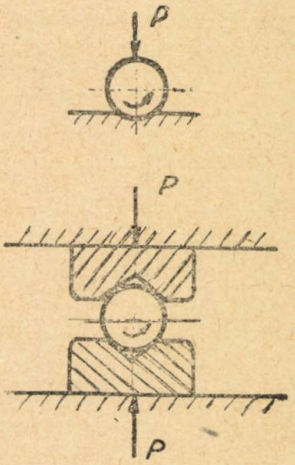
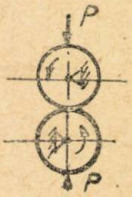
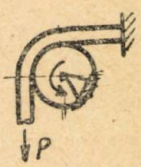
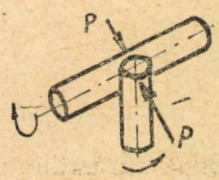
Există în prezent o serie de aparate destinate studiului ungerii la limită. Caracteristica lor comună o constituie faptul că ele sînt formate de obicei din două suprafețe bine ajustate, separate printr-o peliculă de lubrefiant, iar una din ele sau ambele se află în mișcare. Pe una din aceste suprafețe se aplică o sorcină, care se mărește treptat pînă cînd se produce griparea celor două suprafețe, ceea ce constituie un indiciu sigur de distrugere a peliculei de lubrefiant.

În tabelul următor se dau schemele principalelor aparate cunoscute, grupate pe caracteristici comune.

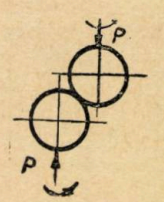
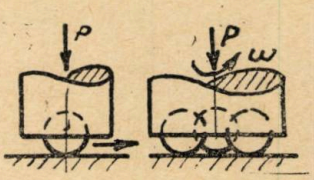
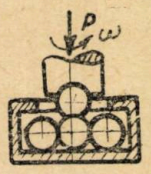
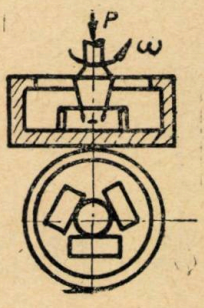
Tabelul 1

Caracteristica comună	Presiunea nominală	Tipul	Schema
I Contact de suprafață	800—1000 kgf/cm²	Alunecarea unei suprafețe pe altă suprafață	a)  b) 
		Alunecarea unui cilindru coaxial pe suprafețe	

Tabelul 1 (continuare)

Caracteristica comună	Presiunea nominală	Tipul	Schema
II Contact liniar	10.000—15000 kgf/cm²	Alunecarea unui cilindru pe o suprafață	
		Rostogolire și alunecare a doi cilindri cu axe paralele	
		Alunecarea unei benzi pe un cilindru	
III Contact punctiform	Pînă la 50.000 Kgf/cm²	Alunecarea cilindrilor cu axe neparalele	

Tabelul 1 (continuare)

Caracteristica comună	Presiunea nominală	Tipul	Schema
		Alunecare şi rostogolire a două sfere	
		Alunecarea bilelor pe suprafaţă	
		Alunecarea bilelor pe bile	
		Alunecarea unui con pe cilindri cu axe perpendiculare	

După afirmaţiile unor autori, se pare că aparatul cu patru bile caracterizează cel mai corect calitatea lubrefiantului, fapt ce ne-a determinat şi pe noi să alegem acest aparat.

2. Descrierea aparatului cu 4 bile.

In principiu aparatul prieclat de noi se compune (fig. 4) dintr-o mandrină de care se ficsează o bilă de oțel (2). În cuva (3) sînt puse alte 3 bile, astfel încît să fie fixe față de cuva (3). Cuva este sprijinită de un platou (4) care este în legătură cu pîrghia (5), fixată articulat de

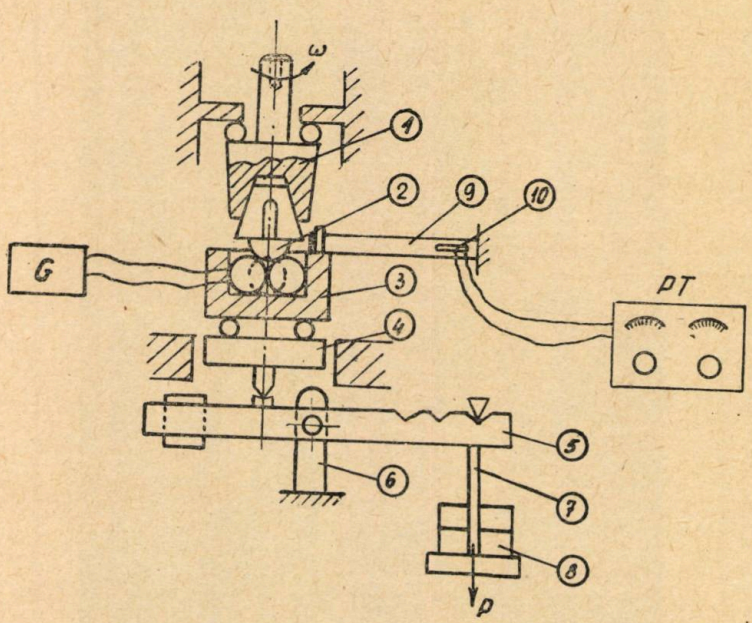


Fig. 4

bara (6). La capătul pîrghiei 5 se pune un platou (7) pe care se așează greutățile (8).

Mandrina (1) se cuplează cu un motor astfel încît bila (2) se rotește cu o viteză unghiulară (ω) iar cuva (3) se umple cu ulei ceea ce permite formarea unei pelicule între bila de sus și bilele de jos. Încărcarea se face de jos prin intermediul pîrghiei (5) și a greutăților (8). Datorită frecării dintre bila de sus și cele de jos, există tendința de a se roti cuva 3. Această rotire este împiedicată de lamela (9) pe care sînt montate niște mărci tensiometrice (10), în legătură cu o punte tensiometrică. Prin intermediul acestui dispozitiv se poate măsura coeficientul de frecare. Temperatura se măsoară cu ajutorul unui termocuplu.

Vederea generală a aparatului este arătată în fig. 5, iar în fig. 6 este arătat dispozitivul de măsurarea coeficientului de frecare. Subliniem

faptul că acest dispozitiv este original și că a fost întrebuințat pentru prima oară la un astfel de aparat.

Menționăm faptul că în țară mai există o mașină cu patru bile, la care însă aprcierea lubrefianților se face pe baza uzurii bilelor (prin cîntărirea lor, înainte și după experiențe).

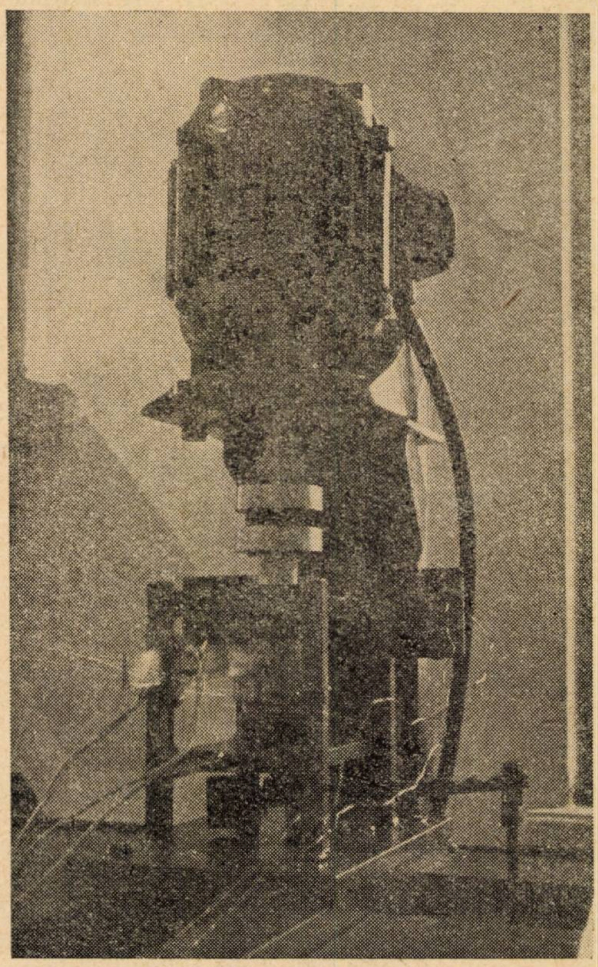


Fig. 5

O primă problemă care se pune în legătură cu acest aparat, este aceea dacă în timpul funcționării există regim de ungere la limită. Această problemă a fost studiată de Howlet (4), Nolme (4), acad. Kapița (4) și în ultimul timp, mai complet de către Korovcinski (4). Ca o concluzie generală a acestor lucrări, rezultă imposibilitatea unei frecări

pur hidrodinamice în condițiile de încercare a lubrefianților în mașina cu patru bile, chiar dacă se ține seama de variația vîscozității în funcție de presiune și de elasticitatea materialului bilelor în vecinătatea domeniului de contact.

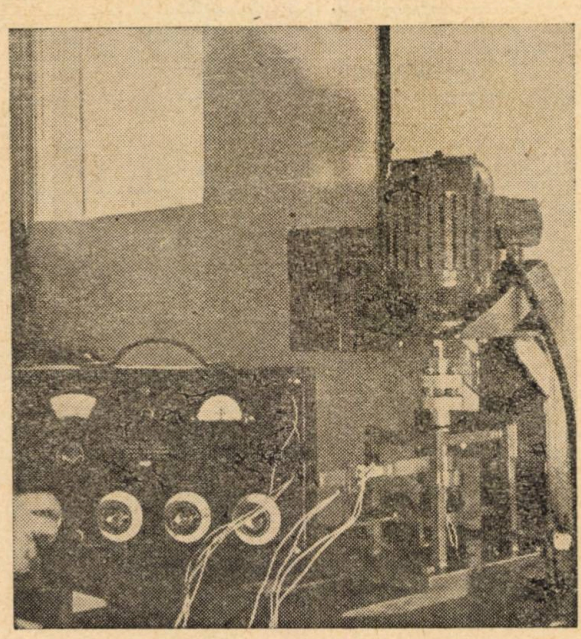


Fig. 6

3. Condițiile de experimentare.

In timpul experiențelor au fost întrebuințate bile de rulmenți fabricate în uzinele „Steagul Roșu" conform prescripțiilor prevăzute în STAS 4203.

Uleiurile întrebuințate precum și caracteristicile lor principale se dau în tabela 2.

Tabela 2

Simbolul uleiului	Densitatea relativă la 15°C.	Viscozitatea la 50°C		Indice de viscozitate I. V.	Congelare °C max.	Cocs Conradson % max.	STAS
		°E	ν				
302	0,887	6,25— 12	1,5— 2	60	—12	0,1	1194/50
305	0,912	37,5 — 45	5— 6	60	—20	0,3	1195/51
410	0,905	72,5 — 84	9,5—11	90	—12	0,5	751/49
413	0,905	98,5 —106	13—14	90	— 8	0,6	751/49

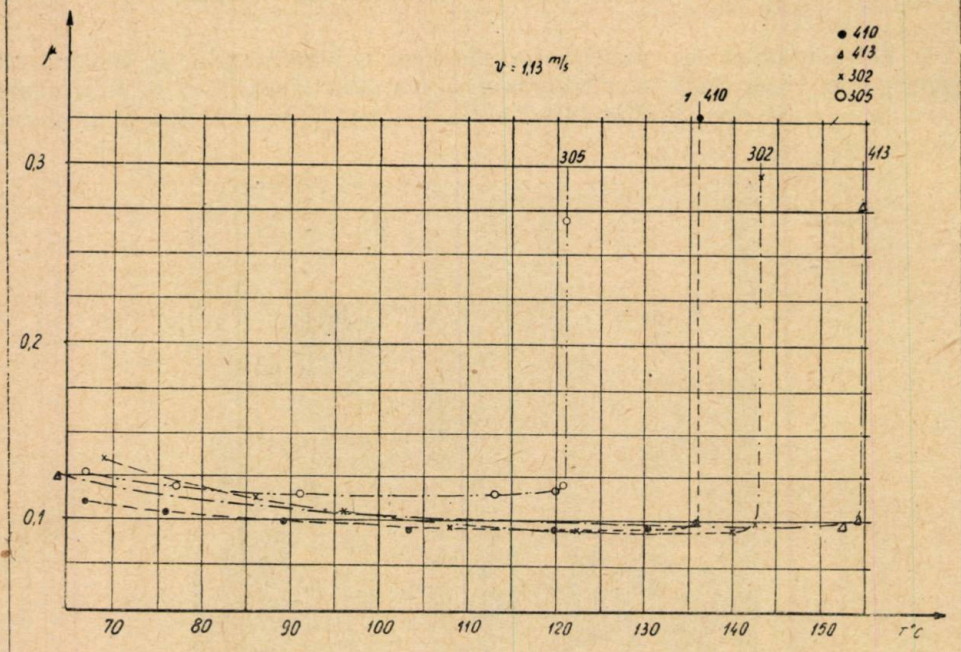

μ
v = 1,13 m/s
● 410
▲ 413
× 302
○ 305
410
305
302
413
0,3
0,2
0,1
70
80
90
100
110
120
130
140
150
T°C

Fig. 7

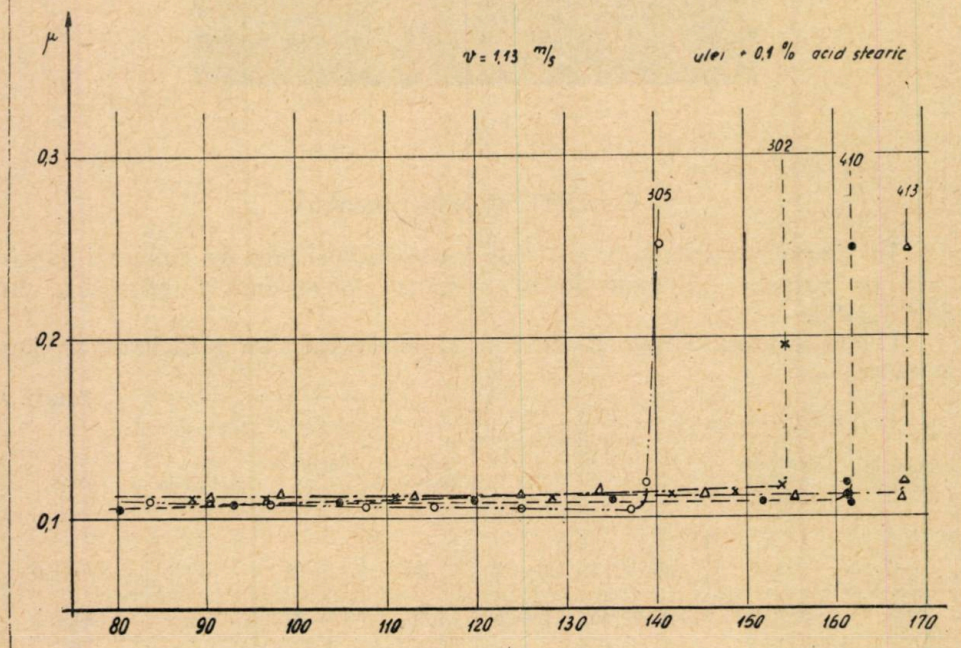

μ
v = 1,13 m/s
ulei + 0,1 % acid stearic
302
410
305
413
0,3
0,2
0,1
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170

Fig. 8

A doua serie de experiențe s-a făcut cu același ulei la care s-a adăogat acid stearic în proporție de 0,1%.

Pentru determinarea curbelor coeficientului de frecare funcție de temperatură, durata experiențelor era de 1 minut, după care bilele se

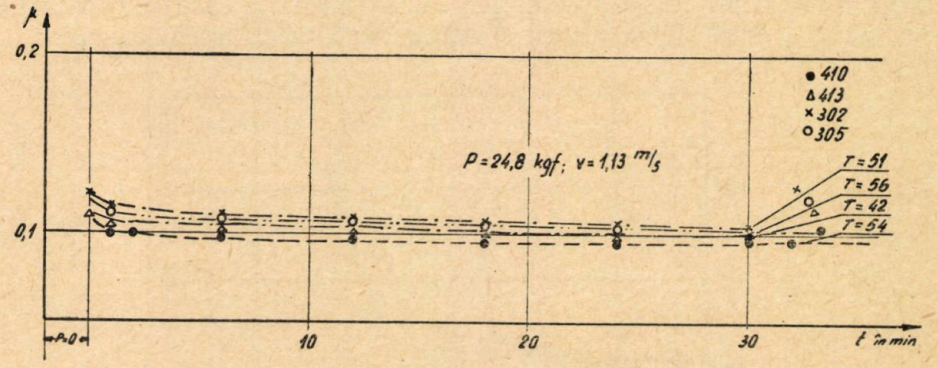


Fig. 9

întorceau sau erau înlocuite. Sarcina se mărea progresiv iar pentru fiecare punct se măsura coeficientul de frecare și temperatura.

În afara curbelor $\mu = f(T)$ s-au determinat curbele de variația coeficientului de frecare funcție de timp $[\mu = f(t)]$.

Rezultatele experiențelor se văd pe fig. 7, 8, 9.

În tabela 3 sînt trecute temperaturile de rupere pentru fiecare ulei încercat.

Tabela 3

Ulei	°E (20°)	T_r °C	$p \frac{kg}{cm^2}$	kgm/cm²s $p.v$	$\mu\, pv \frac{kgm}{cm^2 s}$	Observațiuni
410	72,5 — 84	134	21500	24.300	2370	
413	98,5 —106	154	25250	28.500	2850	
302	6,5— 12	140	22500	25.450	2480	
305	37,5 — 45	120	17000	19200	2120	
410+0,1%	—	161	26500	30500	3360	
413+0,1%	—	166	28000	31500	3550	
302+0,1%	—	154	25250	28500	3290	
305+0,1%	—	137	22000	24900	940	

Datele numerice ne-au permis să calculăm pentru fiecare caz în parte valorile presiunii, al lui p_0 precum și μp_0, pentru punctele la care are loc gripajul. Rezultatele acestor calcule sînt date în tabela 3.

Pentru comparație în fig. 10 sînt redate curbele $\mu = f(t)$ după datele experimentale ale lui Matveeski [2] iar în tabela 4 valorile temperaturii de rupere pentru cîteva uleiuri sovietice după datele aceluiași autor.

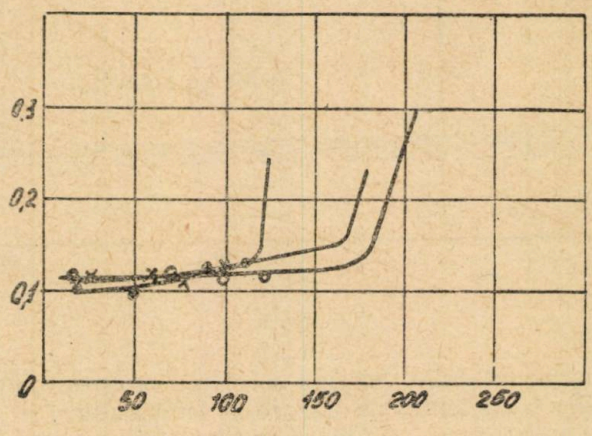


Fig. 10

Menționăm că experiențele respective au fost făcute la o anumită sarcină și viteză, determinarea temperaturii și a coeficientului de frecare făcîndu-se prin încălzire treptată a cuvei de ulei.

Tabela 4

(după Matveeski)

Ulei	°E	T_r
MKE	183	210
MC	150	165
M3C (av)	—	140
Avtol 10	—	150
CY	—	140
YT (tur)	—	140
(tur)	13	120
Y	6,11	165
Transp.	4,09	180

Tabela 5

	p_0/Olmen	Gripaj
1	33.000	ușor
2	34.000	ușor
3	35.000	puternic
4	38.000	puternic
5	39.000	f. puternic
6	43.900	f. puternic

Tot ca un criteriu comparativ în tabela 5 sînt redate valori ale lui p_0 determinate de Olmen (6) pentru o pereche de roți dințate din oțel cu diverși lubrefianți.

Datele experimentale prezentate permit să se tragă următoarele concluzii :

1. Temperatura de rupere poate fi socotită ca o mărime specifică a comportării unui lubrefiant față de un corp solid. În orice condiții de experimentare (sarcina aplicată brusc, sau progresiv), cînd temperatura atinge o anumită valoare, pelicula respectivă se rupe, contactul se face direct metal pe metal, bilele se sudează una de cealaltă și ca urmare,

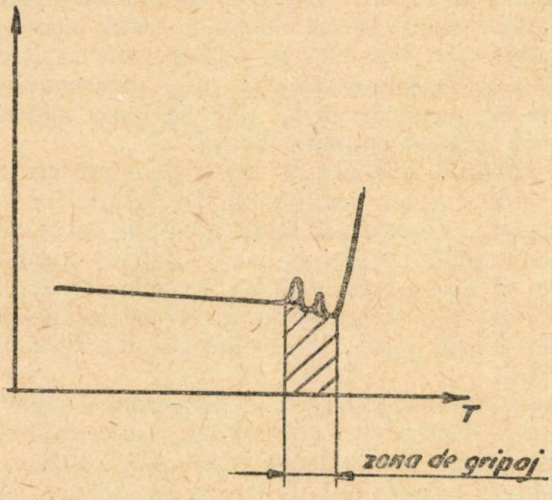


Fig. 11

coeficientul de frecare crește brusc. S-au făcut pentru unul și același lubrefiant o serie de experiențe și s-a constatat că ruperea peliculei se produce la aceeași temperatură.

2. Fenomenul de gripaj (sudarea bilelor) este foarte puternic. Locurile de sudură prezintă urme vizibile de particule smulse. Se poate afirma că gripajul se manifestă brusc. Totuși cu puțin timp înainte de gripaj există anumite fenomene, care indică apariția lui. Astfel în imediata vecinătate a punctului respectiv, aparatul indică creșteri și scăderi bruște, al coeficientului de frecare (fig. 11). Acest lucru dovedește că mai înainte de a se stabili o înlănțuire moleculară puternică, au loc legături temporare care nu sînt așa de puternice și care se rup imediat.

3. Le uleiuri neaditivate se observă într-o oarecare măsură o dispersie a coeficientului de frecare pentru fiecare lubrefiant în parte, pe cînd în cazul ulieurilor cu un adaos de 0,1% acid stearic coeficientul de frecare prezintă valori apropiate pentru diverse feluri de lubrefiant.

4. Pare surprinzătoare comportarea unor uleiuri cu vîscozitate mică de exempl. 302, care s-a comportat mult mai bine decît 305 și chiar 410. Așa cum s-a arătat la început, în cazul ungerii la limită, uleiurile respective nu trebuiesc judecate după vîscozitate, deoarece aceasta nu joacă un rol esențial în fenomenele pe care le studiem. Probabil că uleiurile

subțiri, au o facilitate mai mare de a forma anumite straturi de protecție în combinație cu corpul solid, ceea ce explică buna lor comportare. De astfel, poate tocmai din aceste cauze, în timpul perioadei de rodaj se întrebuințează uleiuri mai subțiri.

5. Adăogarea unui compus polar (în cazul nostru acidul stearic) o confirmă faptul consemnat și de alte experiențe și anume aceea că se mărește temperatura de rupere a filmului de lubrefiant (fig. 10, tabela 4). Totuși nu în toate cazurile, acest adaos a arătat aceeași eficacitate. Pe cînd în cazul uleiurilor 305, 302 și 413 a fost de aproape 8°—14°, în cazul uleiului 410 această creștere este mult mai mare. Cu alte cuvinte, adaosul polar nu se comportă la fel față de toate uleiurile, prezentînd o anumită preferință față de anumite uleiuri.

6. În toate cazurile, coeficientul de frecare pentru uleiurile aditivate este mai mare decît a celor neaditivate. În legătură cu aceasta se pune următoarea problemă : Ce este mai avantajos din punct de vedere practic ? Micșorarea coeficientului de frecare sau mărirea durabilității piesei din punct de vedere al uzurii ? Credem că în actualul stadiu al tehnicii, a doua chestiune este mai importantă, decît prima, deoarece coeficientul de frecare crește foarte puțin, însă durabilitatea la uzură crește într-o măsură însemnată.

7. La regimuri de funcționare la o temperatură superficială mai mică decît temperatura de rupere, se constată că, coeficientul de frecare rămîne aproape constant în funcție de temperatură (fig. 10).

8. Determinarea temperaturii de rupere ar putea constitui un criteriu de calcul atît pentru pisele de mașini care funcționează în domeniul ungerii la limită cît și pentru lagărele de alunecare.

Acest calcul s-ar putea desfășura în modul următor :

Pe baza considerațiunilor teoretice, în funcție de sarcina și viteza, se poate determina în fiecare caz o anumită temperatură superficială de funcționare

$$T_s = f(p, v)$$

Pentru siguranța funcționării trebuie ca

$$T_s < T_r$$

unde T_r este temperatura de rupere determinată experimental pentru fiecare cuplu lubrefiant-corp solid.

9. Temperatura de rupere poate constitui un criteriu de apreciere al aliajelor de antifricțiune. În momentul de față nu există un criteriu cu valabilitate generală pentru aprecierea acestora.

Comportarea mai bună sau mai proastă a acestor aliaje depinde de posibilitatea lor de a facilita fenomelele superficiale amintite mai sus. Deoarece temperatura de rupere reflectă cel mai bine fenomenele superficiale ce au loc într-un lubrefiant-corp solid, înseamnă că în cazul unui cuplu la care temperatura de rupere este mare, aceste fenomene se manifestă puternic și deci aliajul respectiv va fi mai bun.

Catedra de organe de mașini,

BIBLIOGRAFIE

[1] *Mustafa R. M.* Contribuții la studiul comportării lagărelor de alunecare cu luare în considerare a cuplului lubrefiant-cuzinet, și cu aplicațiuni la materiale indigene. (Lucrare de diseratație 1958).
[2] *Matveeski M. P.* Temperaturnăi metod oțenki predelnoiu smazocinăi spocovnocti mașinîh macel. (Moskova 1956).
[3] *Dereaghin V. B.* Pobășenie dolgobicinosti mașin. (Moskova 1956).
[4] *Korofcinski M.V.* Trenie u iznos b mașinah. (Moskova 1958).
[5] *Pomery J.* Revue de l'Institut Francais du Petrole. 6, 7 — 1957.
[6] *Genkii D. M.* Voprocă zaedanie zubcatah kolec. (Moskova 1959).

НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТЕМПЕРАТУРЫ РАЗРЫВА МАСЛЯНОГО СЛОЯ

(Краткое содержание)

Теоретнческие и экспериментальные исследования в области граничной смаски привели к выводу о потребности оценки масла по иному признаку, характеризующему его поведение в присутствии твердых теи.

Исследуя разные параметры, которые повлияси бы на это поведение, автор приходит к заключению, что температура разрыва масляного слоя может являться подобным признаком.

В связи с этим в работе производится экспериментасьное изучение относительно изменения коэффициента трения в зависимости от поверхностной тешпературы и таким образом определяется температура разрыва. Даётся ряд диаграмм коэффициента трения в зависимости от нагрузки, поверхностной температуры и т.д.

Опыты были проделаны при помощи спроектированного автором прибора с четырьмя шариками, а измерения момента трения производитись тензометрическим методом. Выли проэкспериментированы три вида смазки местного происхождения, и были получены некоторые заключения, которые могут служить основой для будущих исспедований.

SOME EXPERIMENTAL CONSIDERATIONS CONCERNING THE TEMPERATURE AT WHICH IT APPEARS THE BREAKING OF A LUBRICATING FILM

(Summary)

Theoretical study and experimental reasearches in the field of the *limit-lubrication* call for the necessity of taking into consideration a new criterion of appreciation of the behaviour of a lubricant working in contact with solid bodies.

Examining the influence of various agents on the behaviour of the lubricant, the author arrives at the conclusion that the temperature, at wich the lubricating film begins to break, might be taken as a criterion of appreciation.

The breaking temperature of the lubricating film was determined by working out the results of the experimental work concerning the variation of the friction coefficient with the superficial temperature. In the paper there are presented also a series of diagrams in wich is shown the variation of the friction coefficient with the load, with the superficial temperature, with the quality of the lubricant, etc.

The experimental worh was carried out for three sorts of roumanian lubricants on a four bolls apparatus designed by the author, the values of the friction momentum were measured by the tensiometric method.

Some of the conclusions drawn from the above study might be looked upon as a basis for future researches.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA TEMPÉRATURE DE LA PELLICULE PORTANTE DE LUBRIFIANT

(Résumé)

Les recherches théoriques et expérimentelles dans le domaine du graissage a la limite ont démontré la nécessité d'un nouveau critérium d'apprétiation du lubrifiant, critérium caractérisant son comportement en présence des corps solides.

L'étude des divers paramètres pouvant influencer ce comportement a amené l'auteur a considérer que la température de la pellicule de lubrefiant pourrait être un de ces paramètres.

A ce sujet, on fait dans l'ouvraje une étude expérimentale concernant la variation du coefficient de frottage fonction de la température superficielle et on determine, en fonction de cela, la température de rupture. On donne une série de diagrammes du coefficient de frottage en fonction de charge, température superficielle etc.

Les expériences ont été executées sur un appareil à 4 billes, conçu par l'auteur, les mesures du moment de frottage ayant lieu par la méthode tensiometrique. On a experimenté trois sortes de lubrifiantes de fabrication indigènes, en arrivant a certains conclusions pouvant servire comme base pour des recherches à venire.

EXPERIMENTAL-BEITRAG ZUR ABREISS-TEMPERATUR DES SCHMIERFILMS

(Zusammenfassung)

Im Gebiete der Grenzschmierung haben die theoretischen und experimentellen Untersuchungen die Notwendigkeit neuer Gesichtspunkte für die Bewertung der Schmierstoffe erwiesen, welche das Verhalten der Schmierstoffe in Anwesenheit fester Körper charakterisieren.

Auf Grund einer Untersuchung der verschiedenen Faktoren, welche dieses Verhalten beeinflussen können, gelangt der Verfasser zur der Schlussfolgerung, dass die Abreisstemperatur des Schmierfilms einen derartigen Bewertungs-Gesichtspunkt darstellen könnte.

Im Hinblick darauf wird über Versuche zur Feststellung des Verlaufes der Reibungszahl bei wechselnder Oberflächentemperatur berichtet und es wird die jeweilige Abreisstemperatur des Schmierfilms bestimmt. In einer Reihe von Diagrammen wird der Verlauf der Reibungszahl über Druckkraft, Oberflächentemperatur usw. dargestellt.

Die Versuche wurden mit einem vom Verfasser entworfenen 4-Kugel-Apparat durchgeführt; der Moment der Reibkraft wurde mit Dehnungsmessstreifen bestimmt. Untersucht wurden 3 einheimische Schmieröle; die erzielten Ergebnisse können eine Grundlage weiterer Untersuchungen bilden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

INFLUENȚA LUNGIMII FINITE A BIELEI ASUPRA DEBITULUI POMPELOR CU PISTON *

MIRCEA-DIMITRIE CAZACU, DUMITRU TUDOR

Introducere

Răspunzînd cerințelor tehnicii noi de perfecționare continuă a producției de mașini hidraulice, studiul de față aduce contribuția sa la teoria exactă a pompelor cu piston, care au mecanismul bielă-manivelă intercalat în lanțul cinematic al pieselor lor mobile (fig. 1).

Observăm cu această ocazie, că prezența acestui mecanism și a volantului chiar la pompele cu piston acționate direct, deși complică într-o anumită măsură construcția mașinii, contribuie mult la ridicarea economicității lor, ceea ce face ca și în cazul acestor construcții să se aplice rezultatele studiului de față.

Teoria clasică a pompelor cu piston cu mecanism de bielă și manivelă, expusă cel mai sistematic în remarcabila lucrare a lui H. Berg [1], care stă și în prezent la baza calculului ingineresc al acestor mașini hidraulice [2] [3], face ipoteza lungimii infinite a bielei

$$l = \infty, \text{ sau } \lambda = \frac{r}{l} = 0, \tag{1}$$

presupunînd prin aceasta, că viteza pistonului c și deci debitul dat de piston $Q = F \cdot c$, ar avea o variație sinusoidală simplă în funcție de unghiul α de rotație al arborelui cotit.

Această ipoteză aproximativă dar simplificatoare, care permite calculul expeditiv și rapid al mașinii, era în concordanță cu valorile mici ce se alegeau pentru raportul dintre raza manivelei și lungimea bielei.

Dintre tendințele moderne în desvoltarea mașinilor cu piston, de creștere a turației și micșorare a gabaritelor, care au drept scop o utilizare mai intensă a materialului și deci scăderea greutății pe unitatea de putere, cea de a doua a condus la adoptarea rapoartelor λ din ce în ce mai mari, ajungîndu-se astăzi în mod uzual pentru pompele cu piston

* Comunicare prezentată la a VII-a Seziune științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 7—8 aprilie 1962.

la valorile $\lambda = \frac{1}{6}; \frac{1}{5}$. În acest caz, aproximația (1) conduce la erori ce nu mai pot fi neglijate nu numai în probleme de cercetare științifică, ci nici chiar la calculul ingineresc de proiectare a pompelor cu piston.

În studiul de față și într-o serie de lucrări ce vor urma, vom pune în evdiență acest lucru desvoltînd teoria exactă a pompelor cu piston

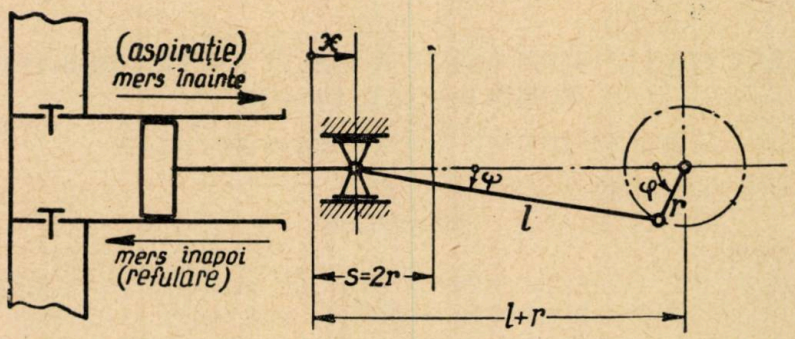


Fig. 1

cu mecanism de bielă și manivelă, și comparînd rezultatele numerice, obținute în cazul concret și foarte frecvent astăzi [4].

$$\lambda = \frac{r}{l} = \frac{1}{5}, \tag{2}$$

cu rezultatele clasice obținute în ipoteza lungimii infinite a bielei (1).

1. Spațiul, viteza și accelerația pistonului.

Poziția pistonului x la un anumit moment se poate calcula în funcție de unghiul φ de rotație al arborelui cotit (fig. 1).

$$x = r + l - (r\cos\varphi + l\cos\psi), \tag{3}$$

sau ținînd cont de teorema sinusurilor, $r\sin\varphi = l\sin\psi$, obținem după calcule evidente:

$$x = r\left(1 - \cos\varphi + \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi}}{\lambda}\right). \tag{4}$$

Viteza de deplasare a pistonului se obține prin derivarea expresiei (4) față de timp

$$c = \dot{x} = r\,\omega\left(\sin\varphi + \frac{\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\right), \tag{5}$$

iar accelerația pistonului, printr-o nouă derivare

$$j = \dot{c} = \ddot{x} = r\omega^2 \left[\cos\varphi + \lambda \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + \lambda^2 \sin^4\varphi}{(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} \right]. \qquad (6)$$

Reprezentarea grafică a acestor funcțiuni de argumentul φ și compararea lor cu cele obținute în ipoteza clasică (1), se poate vedea în figura 2.

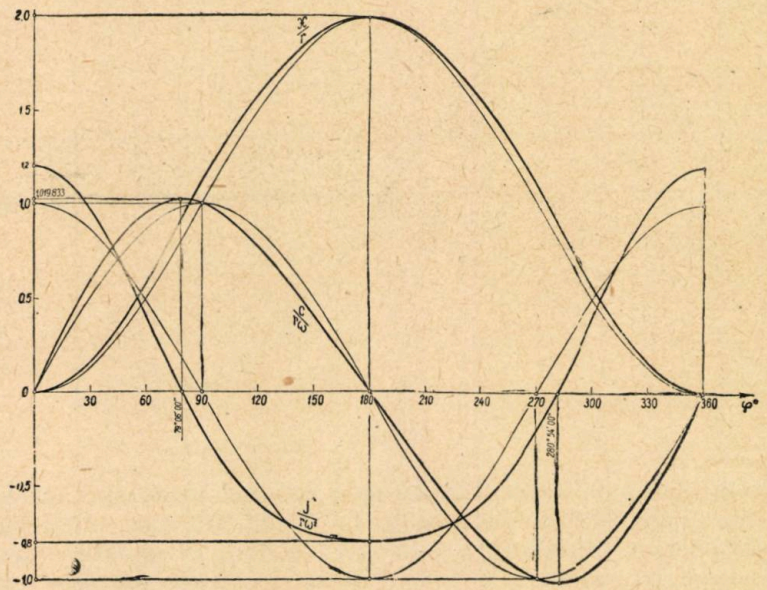


Fig. 2

În punctele moarte avem valorile maxime și minime ale accelerației $(j/r\omega^2)_{\min}^{\max} = \lambda \pm 1$, iar rădăcina expresiei accelerației se află la unghiul $\varphi = 79°06'00''$ cu o precizie de $j/r\omega^2 = +0{,}000.002.64$. Pentru acest argument valoarea maximă a vitezei relative este $c/r\omega = 1{,}019.833.06$.

2. Variația debitului pompei cu piston cu simplu efect * și calculul volumului excendentar.

Variația debitului aspirat în cursa de mers înainte a pistonului și a debitului refulat la mersul înapoi este reprezentată adimensional în figura 3 în funcțiune de unghiul φ. Este evident și se poate verifica ușor, că și în acest caz al calculului exact, cînd viteza pistonului are expresia

* Simbolul mărimilor fizice afectate de această caracteristică vor purta indicele 1.

(5), volumul aspirat sau refulat la o rotație a manivelei este egal cu cilindreea.

$$V_a = \int_{t(0)}^{t(\pi)} Q\,dt = F\int_0^{\pi} c\frac{d\varphi}{\omega} = F\,s.$$

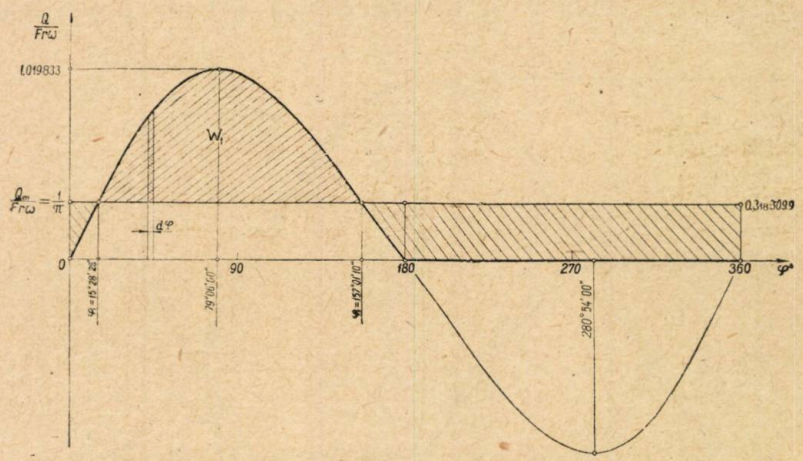


Fig. 3

a. Problema ce ne interesează în mod deosebit în această lucrare este calculul volumului maxim excedentar de lichid W, care dimensionează camera pneumatică (hidroforul) pompei cu piston, în ipoteza obținerii în exteriorul flanșelor pompei, a unui circuit de lichid de debit aproape constant * și egal cu debitul mediu al pompei Q_m.

Conform figurei 3 și a relației $Q_{m1} = \frac{Fsn}{60} = \frac{Fr\omega}{\pi}$, avem în cazul de față:

$$W_1 = \int_{t(\varphi_1)}^{t(\varphi_2)} (Q - Q_{m1})\,dt = Fr\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\sin\varphi + \frac{\lambda \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{\pi} \right) d\varphi, \qquad (7)$$

unde unghiurile φ_1 și φ_2, ce reprezintă limitele necunoscute ale integralei (7) și se găsesc la intersecția curbei $Q(\varphi)$ cu dreapta $Q_{m_1} = \text{const.}$, se determină prin anularea integrandului, observînd că pentru aceste valori ale argumentului volumul excedentar de lichid are valoarea minimă, respectiv maximă.

$$\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} = \sin\varphi + \frac{\lambda \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{\pi} = 0. \qquad (8)$$

*) În limita gradului de iregularitate al presiunii în hidrofor, de ordinul cîtorva procente.

Găsirea valorilor φ_1 și φ_2 care verifică ecuația (8), conduce la aflarea rădăcinilor ecuației de gradul trei

$$\sin^3\varphi + \left(\frac{\pi}{2\lambda^2} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi}\right)\sin^2\varphi - \frac{1}{\lambda^2}\sin\varphi + \frac{1}{2\pi\lambda^2} = 0. \tag{9}$$

Remarcăm cu acaestă ocazie, că dacă ne-am fi situat în cazul calculului aproximativ, în care se consideră că variația lui x cu λ este liniară [4],

$$x = r\left(1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right),$$

valorile φ_1 și φ_2 s-ar fi obținut prin rezolvarea unei ecuații de gradul patru, ceea ce complică problema mai mult decît în cazul calculului exact.

b. Introducînd notația $\sin\varphi = z$, în cazul condiției (2), ecuația (9) se concretizează în

$$P(z) = z^3 - 37{,}539\cdot957\ z^2 - 25\,z + 3{,}978\cdot873\cdot7 = 0. \tag{10}$$

Observînd variația semnelor termenilor ecuației în z și $-z$, conform teoremei lui Descartes și ținînd cont de sensul fizic al problemei, ecuația (10) are două rădăcini pozitive reale și una negativă.

Pentru a afla rădăcinile ecuației (10), propunem două metode de calcul expeditive.

α. Metoda algoritmului cubic [5] [6], care permite obținerea rapidă a rădăcinei, dublînd la fiecare etapă de calcul numărul cifrelor cunoscute.

β. Metoda grafo-numerică, care constă în reprezentarea grafică a valorilor obținute $P(z)$ pe o succesiune de diagrame la scări din ce în ce mai mari și determinarea grafică a intersecției curbei $P(z)$ cu axa Oz.

Astfel, au fost obținute soluțiile: .

$$z_1 = 0{,}266\cdot809\cdot1\ ;\ z_2 = 0{,}390\cdot416\cdot5 \text{ și } z_3 = -38{,}197\cdot184$$

cu precizii în afara numărului de cifre admis în calcul: $P(z_1) = 8\times10^{-8}$; $P(z_2) = 1\times10^{-8}$, z_3 neprezentînd interes din punct de vedere fizic.

c. Argumentele principale ce corespund acestor două rădăcini sînt următoarele:

$$\sin\varphi_1 = 0{,}266\cdot809\cdot1 \rightarrow \varphi_1 = 15^\circ\ 28'\ 28''$$

și

$$\sin\varphi_2' = 0{,}390\cdot416\cdot5 \rightarrow \varphi_2' = 22^\circ\ 58'\ 50'' \tag{11}$$

celelalte argumente avînd expresiile $2k\pi + \varphi$ și $(2k+1)\pi - \varphi$, cu k întreg.

Din considerente fizice (fig. 3), vom alege pentru limitele integralei (7) valorile:

$$\varphi_1 = 15^\circ\ 28'\ 28'' \text{ și } \varphi_2 = \pi - \varphi_2' = 157^\circ\ 01'\ 10''. \tag{12}$$

Astfel, calculînd volumul excedentar de lichid obținem:

$$W_1 = Fr \left| -\cos\varphi - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} - \frac{\varphi}{\pi} \right|_{15°28'28''}^{157°01'10''} = \\ = 1{,}106 \cdot 168\, Fr = 0{,}553 \cdot 084\, Fs, \tag{13}$$

și comparînd această valoare cu cea clasică *, obținută în ipoteza (1), avem:

$$\frac{W_1}{W_{1\infty}} = 1{,}003 \cdot 596 \cdot 52 \tag{14}$$

3. Variația debitului pompei cu două pistoane cu simplu efect, decalate la 180° și calculul volumului excendentar de lichid.

În acest caz, variația debitului aspirat și refulat, marcat cu linie groasă respectiv subțire, este reprezentată adimensional în funcție de unghiul φ în figura 4, pentru cazul (2).

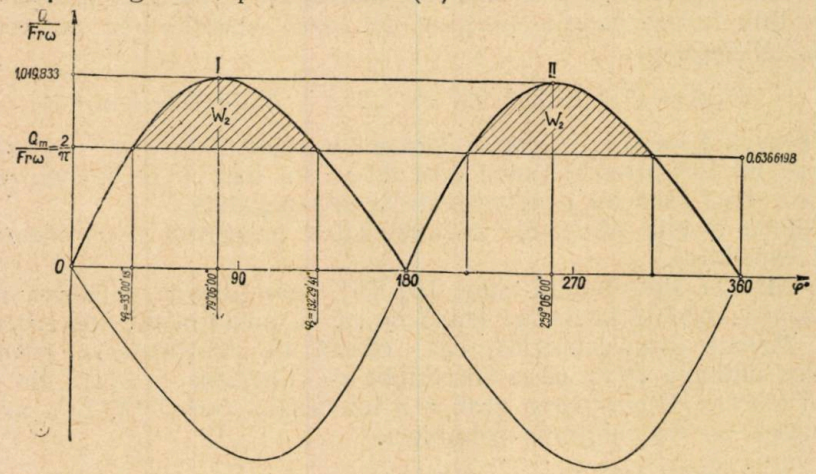


Fig. 4

Volumul maxim excedentar de lichid are o expresie analoagă cu (7)

$$W_2 = \int_{t(\varphi_1)}^{t(\varphi_2)} \left(Q - \frac{2\,Fsn}{60} \right) dt = \\ = Fr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\sin\varphi + \frac{\lambda \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}} - \frac{2}{\pi} \right) d\varphi, \tag{15}$$

* Efectuînd calculul precis, obținem în cazul clasic:

$\sin\varphi_\infty = \frac{1}{\pi} = 0{,}318 \cdot 309 \cdot 9$, $\varphi_{1\infty} = 18°33'39''$, $\varphi_{2\infty} = 161°26'21''$, iar $W_{1\infty} = 0{,}551 \cdot 101 \cdot 95\, Fs$.

în care limitele φ_1 și φ_2 ale integralei se obțin prin anularea integrandului și aflarea rădăcinilor ecuației de gradul trei:

$$\sin^3\varphi + \left(\frac{\pi}{4\lambda^2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\right)\sin^2\varphi - \frac{1}{\lambda^2}\sin\varphi + \frac{1}{\pi\lambda^2} = 0, \tag{16}$$

sau în cazul concret (2)

$$\sin^3\varphi + 18{,}531\cdot 246\cdot 9\,\sin^2\varphi - 25\,\sin\varphi + 7{,}957\cdot 747\cdot 5 = 0. \tag{17}$$

Procedînd analog ca la 1, *b*, obținem soluțiile și valorile principale ale argumentelor:

$$\sin\varphi_1 = 0{,}544\cdot 711\cdot 35 \rightarrow \varphi_1 = 33°00'18'', \text{ cu } P(z_1) \approx 0$$

și (18)

$$\sin\varphi_2' = 0{,}737\cdot 338\cdot 662 \rightarrow \varphi_2' = 47°30'19'', \text{ cu } P(z_2) = -1 \times 10^{-8}.$$

Din considerente fizice ale fenomenului (fig. 4) reținem următoarele valori pentru limitele integralei (15)

$$\varphi_1 = 33°00'18'' \text{ și } \varphi_2 = \pi - \varphi_2' = 132°29'41''. \tag{19}$$

Calculînd acum volumul excedentar de lichid, obținem

$$W_2 = Fr\left| -\cos\varphi - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} - \frac{2\varphi}{\pi}\right|_{33°00'18''}^{132°29'41''} = \tag{20}$$

$$= 0{,}433\cdot 610\cdot 01 \cdot Fr = 0{,}210\cdot 805\cdot 005\, FS,$$

și comparînd această valoare cu cea clasică *, calculată în ipoteza (1), avem:

$$\frac{W_2}{W_{2\infty}} = 1{,}029\cdot 885\cdot 8. \tag{21}$$

4. Variația debitului la o pompă cu un piston cu dublu efect și calculul volumului excedentar maxim

În cazul pistonului cu dublu efect vom lua în considerare și secțiunea f a tijei pistonului, care raportată la secțiunea pistonului F variază în funcție de presiunea de refulare a pompei, între limitele

$$\frac{f}{F} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = 0{,}025 \div 0{,}200, \tag{22}$$

* In ipoteza clasică se obține:

$$\sin\varphi_\infty = \frac{2}{\pi} = 0{,}636\cdot 619\cdot 8;\ \varphi_{1\infty} = 39°32'25'';\ \varphi_{2\infty} = 140°27'35'',$$

iar $W_{2\infty} = 0{,}210\cdot 513\cdot 63\,Fs.$

construcțiile uzuale în aceste cazuri avînd $d/D = 0{,}16 \div 0{,}45$, sau chiar valori mai mari la pompele cu efect diferențial [1], [2].

Variația debitului pompei cu piston cu dublu efect este reprezentată în figura 5 ca funcție de unghiul φ de rotație al manivelei, pentru valoarea

$$\frac{f}{F} = 0{,}2 \quad \text{sau} \quad m = 1 - \frac{f}{2F} = 0{,}9. \tag{23}$$

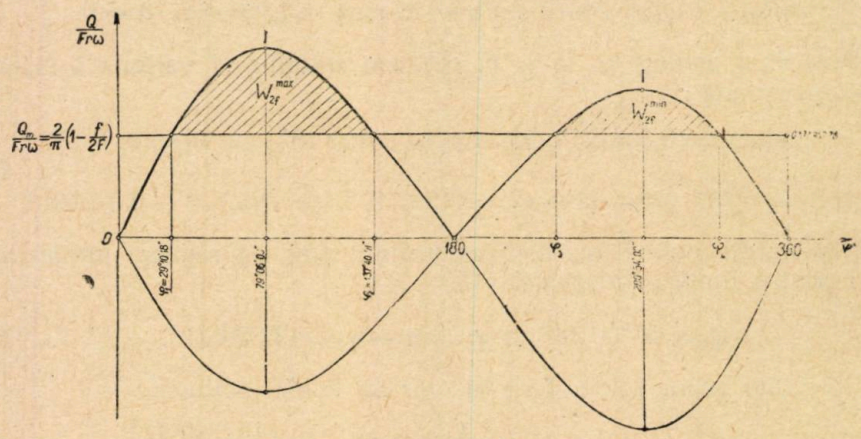


Fig. 5

Ținînd cont de formula debitului mediu în acest caz

$$Q_{m2f} = \frac{2Fsn}{60}\left(1 - \frac{f}{2F}\right), \tag{24}$$

volumul maxim excedentar de lichid are expresia

$$W_{2f} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left[\sin\varphi + \frac{\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}} - \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{f}{2F}\right)\right] d\varphi, \tag{25}$$

unde valorile limitelor integralei se găsesc prin rezolvarea ecuației de gradul trei

$$\sin^3\varphi + \left(\frac{\pi}{4m\lambda^2} - \frac{m}{\pi} - \frac{\pi}{4m}\right)\sin^2\varphi - \frac{1}{\lambda^2}\sin\varphi + \frac{m}{\pi\lambda^2} = 0, \tag{26}$$

sau în cazul concret (2), (23)

$$\sin^3\varphi + 20{,}657 \cdot 472 \cdot 4\ \sin^2\varphi - 25\sin\varphi + 7{,}16197275 = 0. \tag{27}$$

Rădăcinile acestei ecuații și valorile principale ale argumentelor fiind

$$\begin{aligned} &\sin\varphi_1 = 0{,}487 \cdot 429 \cdot 5 \rightarrow \varphi_1 = 29°10'18'', \text{ cu } P(z_1) = 5 \times 10^{-8}, \\ &\sin\varphi_2' = 0{,}673 \cdot 440 \cdot 31 \rightarrow \varphi_2' = 42°19'59'', \text{ cu } P(z_2) = 1 \times 10^{-8} \\ &\varphi_2 = \pi - \varphi_2' = 137°40'01'', \end{aligned} \tag{28}$$

rezultă :

$$W_{2f} = Fr \left| \cos\varphi + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} + \frac{2\varphi}{\pi} m \right|_{\varphi_2}^{\varphi_1} = \tag{29}$$

$$= 0{,}549 \cdot 197 \cdot 41 \; Fr = 0{,}274 \cdot 598 \cdot 705 \; Fs,$$

și comparînd cu cazul clasic *, obținem

$$\frac{W_{2f}}{W_{2f\infty}} = 1{,}020 \cdot 235 \cdot 61 \tag{30}$$

5. Variația debitului pompei (triplex) cu trei pistoane cu simplu efect, decalate la 120° și calculul volumului maxim excedentar.

Variația debitului aspirat și refulat este reprezentată adimensional în figura 6 cu linie groasă respectiv subțire, ca funcție de unghiul φ, în presupunerea concretă (2).

În acest caz, volumul excedentar maxim are expresia

$$W_3^{\max} = \int_{\varphi_1}^{120°} (Q_{m3} - Q_I) \frac{d\varphi}{\omega} + \int_{120°}^{\varphi_2} (Q_{m3} - Q_I - Q_{II}) \frac{d\varphi}{\omega} =$$

$$= Fr \int_{\varphi_1}^{120°} \left(\frac{3}{\pi} - \sin\varphi - \frac{\lambda \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}} \right) d\varphi + \tag{31}$$

$$+ Fr \int_{120°}^{\varphi_2} \left(\frac{3}{\pi} - \sin\varphi - \frac{\lambda \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}} - \sin(\varphi - 120°) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda \sin(\varphi - 120°) \cos(\varphi - 120°)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi - 120°)}} \right) d\varphi,$$

în care valoarea limitei inferioare φ_1 a primei integrale și a limitei superioare φ_2 a celei de a doua integrale se află anulînd integranzii respectivi, ceea ce conduce la aflarea rădăcinilor ecuațiilor

$$\sin^3\varphi + \left(\frac{\pi}{6\lambda^2} - \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2\pi} \right) \sin^2\varphi - \frac{1}{\lambda^2} \sin\varphi + \frac{3}{2\pi\lambda^2} = 0, \tag{32}$$

sau în cazul nostru concret (2)

$$z^3 + 12{,}088 \cdot 906 z^2 - 25z + 11{,}936 \cdot 620 \cdot 5 = 0, \tag{33}$$

---

* Efectuînd calculele în ipotezele (1) și (23), avem :

$\sin\varphi_\infty = \frac{2m}{\pi} = 0{,}572 \cdot 957 \cdot 78$; $\varphi_{1\infty} = 34°57'24''$; $\varphi_{2\infty} = 145°02'36''$, iar $W_{2f\infty} =$

$= 0{,}269 \cdot 152 \cdot 245$ Fs.

și

$$\sin\varphi + \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}} + \frac{\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)}} = \frac{3}{\pi}. \tag{34}$$

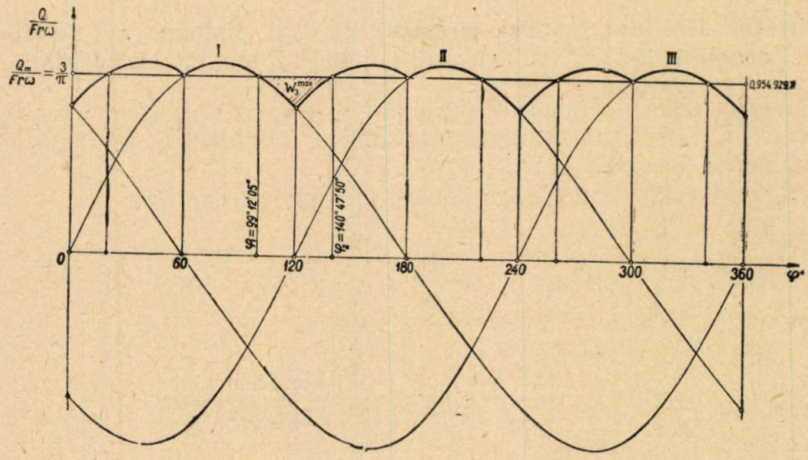


Fig. 6

Rezolvînd ecuația (33), obținem rădăcina care ne interesează și argumentul :

$$\sin\varphi_1 = 0{,}987 \cdot 132 \cdot 4 \rightarrow \varphi_1 = 99°12'05'', \text{ cu } P(z_1) = 5 \times 10^{-7}, \tag{35}$$

iar ecuația (34), rezolvată prin metoda grafo-numerică (2, b, β) ne dă rădăcina și argumentul :

$$\sin\varphi_2 = 0{,}632 \cdot 066 \cdot 9 \rightarrow \varphi_2 = 140°47'50'' \text{ cu } P(z_2) = 5{,}5 \times 10^{-7}. \tag{36}$$

Integrînd ecuația (31) între limitele (35) și (36), avem :

$$W_3^{max} = Fr \left| \frac{3\varphi}{\pi} + \cos\varphi + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} \right|_{99°12'05''}^{120°} + Fr \left| \frac{3\varphi}{\pi} + \cos\varphi + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} + \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)} \right|_{120°}^{140°47'50''} = 0{,}058 \cdot 775 \cdot 39\, Fr = \tag{37}$$

$$= 0{,}029 \cdot 387 \cdot 695\, Fs,$$

și comparînd cu cazul clasic *, obținem :

$$\frac{W_3^{max}}{W_{3\infty}} = 3{,}250 \cdot 257 \cdot 9 \qquad (38)$$

Această diferență apreciabilă se explică prin variația nesimetrică a debitului dat de pistoanele pompei (fig. 6) și creșterea maximului său față de cazul clasic al bielei de lungime infinită.

6. Variația debitului pompei cu două pistoane cu dublu efect cu hidrofor comun, decalate la 90° și calculul volumului excedentar maxim.

În tratarea acestei probleme, care prezintă și un alt aspect interesant, privitor la unghiul de decalaj al pistoanelor, ce va constitui obiectul unui viitor studiu, ne vom limita la următoarele două cazuri :

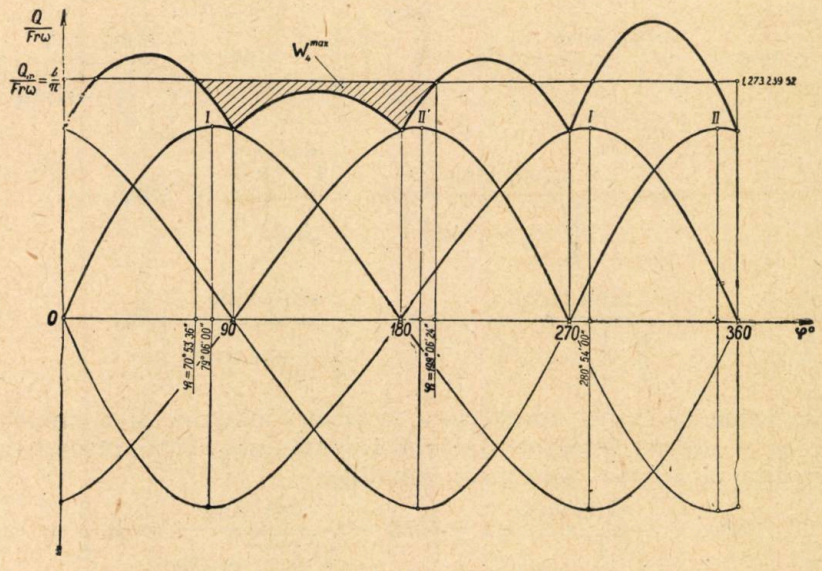


Fig. 7

a. Vom presupune mai întîi $f=0$, neglijînd astfel grosimea tijei pistonului și obținînd variația debitului pompei ca în figura 7, unde am considerat

$$Q_{m4} = \frac{4\,Fsn}{60}\,;\quad Q_I = Fr\omega\left(\sin\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}}\right),$$

* Pentru cazul clasic (1), avem :

$$\sin\varphi_\infty = \frac{3}{\pi} = 0{,}954 \cdot 929 \cdot 644\,;\ \varphi_{1\infty} = 72°43'57''\,;\ \varphi_{2\infty} = 107°16'03''\ \text{iar}\ W_{3\infty} =$$

$$= 0{,}009 \cdot 041 \cdot 65\ Fs.$$

$$Q_{II} = Q_I\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = Fr\,\omega\left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi\,\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}}\right), \tag{39}$$

$$Q_{I'} = -Q_I \text{ și } Q_{II'} = = Q_{II}.$$

În acest caz volumul excedentar maxim de lichid are următoarea expresie:

$$W_4^{\max} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (Q_{m4} - |Q_I| - |Q_{II}|)\frac{d\varphi}{\omega} =$$

$$= Fr\int_{\varphi_1}^{90^\circ}\left(\frac{4}{\pi} - \sin\varphi - \frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}} - \right.$$

$$\left. - \cos\varphi + \frac{\cos\varphi\,\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}}\right)d\varphi + \int_{90^\circ}^{180^\circ}\left(\frac{4}{\pi} - \sin\varphi - \frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}} + \right. \tag{40}$$

$$\left. + \cos\varphi - \frac{\cos\varphi\,\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}}\right)d\varphi + \int_{180^\circ}^{\varphi_2}\left(\frac{4}{\pi} + \sin\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}} + \cos\varphi - \frac{\cos\varphi\,\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}}\right)d\varphi,$$

în care valoarea limitei inferioare φ_1 a primei integrale și a limitei superioare φ_2 a ultimei integrale se află anulînd integranzii respectivi, ceea ce conduce la aflarea rădăcinilor ecuațiilor

$$\sin\varphi + \frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}} + \cos\varphi - \frac{\cos\varphi\,\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}} = \pm\frac{4}{\pi}, \tag{41}$$

care de fapt reprezintă una și aceeași ecuație, deoarece

$$\sin(\pi + \alpha) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ și } \cos(\pi + \alpha) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

figura 7 fiind simetrică pe porțiunea φ_1, $\pi/2$, π, φ_2, iar prima și a treia integrală având aceeași valoare.

Rezolvînd această ecuație în cazul nostru concret (2), prin metoda grafo-numerică (2, b, β), obținem

$$\varphi_1 = 70°53'36'', \text{ cu precizia } P(\varphi_1) = 1{,}2 \times 10^{-6},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 = 19°06'24'' \text{ și deci } \varphi_2 = \pi + \alpha = 199°06'24'' \tag{42}$$

Integrînd relația (40) între limitele (42), vom avea

$$W_4^{max} = Fr\left|\frac{4\varphi}{\pi} + \cos\varphi + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} - \sin\varphi + \right.$$

$$+ \left.\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}\right|_{70°53'36''}^{90°} + Fr\left|\frac{4\varphi}{\pi} + \cos\varphi + \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} + \sin\varphi - \left.\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}\right|_{90°}^{180°} + \qquad (43)$$

$$+ Fr\left|\frac{4\varphi}{\pi} - \cos\varphi - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} + \sin\varphi - \right.$$

$$- \left.\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}\right|_{180°}^{199°06'24''} = 0{,}285 \cdot 998 \cdot 06\ Fr = 0{,}142 \cdot 999 \cdot 03\ Fs,$$

și comparînd cu cazul clasic *, obținem :

$$\frac{W_4^{max}}{W_{4\infty}} = 3{,}390 \cdot 416 \cdot 72 \qquad (44)$$

b. Vom arăta acum studiul cazului real, în care vom presupune ca și mai înainte $f/F = 0{,}2$ (23).

In această ipoteză diagrama de variație a debitului pompei, în funcție de unghiul de rotație φ al vilbrochenului, se prezintă ca în figura 8.

Considerînd următoarele debite :

$$Q_{m4f} = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{f}{2F}\right) Fr\ ;\ Q_I \text{ și } Q_{II} \text{ ca în relațiile (40),}$$

$$Q_{I'} = -(F - f)\, r\omega \left(\sin\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}}\right);$$

$$Q_{II'} = -(F - f)\, r\omega \left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}}\right),$$

* In cazul (1), avem :

$Q_I = Fr\omega\sin\varphi$; $Q_{II} = Fr\omega\cos\varphi$; $\sin\varphi_\infty = 0{,}328 \cdot 861 \cdot 35$; $\varphi_{1\infty} = 19°11'59''$;

$\varphi_{2\infty} = 70°48'01''$ iar $W_{4\infty} = 0{,}042 \cdot 177 \cdot 42\ Fs$.

volumul maxim excedentar de lichid are expresia :

$$W_{4f}^{max} = Fr\int_{\varphi_1}^{90^\circ}\left(\frac{4m}{\pi} - \sin\varphi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\sin^2\varphi}} - \cos\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\cos^2\varphi}}\right)d\varphi + Fr\int_{90^\circ}^{180^\circ}\left[\frac{4m}{\pi} - \sin\varphi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\sin^2\varphi}} + \right.$$

$$+\left(1-\frac{f}{F}\right)\left(\cos\varphi - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\cos^2\varphi}}\right)\Bigg]d\varphi + Fr\int_{180^\circ}^{270^\circ}\left[\frac{4m}{\pi} + \right. \qquad (45)$$

$$+\left(1-\frac{f}{F}\right)\left(\sin\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\sin^2\varphi}} + \cos\varphi - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\cos^2\varphi}}\right)d\varphi +$$

$$+ Fr\int_{270^\circ}^{\varphi_2}\left[\frac{4m}{\pi} + \left(1-\frac{f}{F}\right)\left(\sin\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\sin^2\varphi}}\right) - \cos\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}-\cos^2\varphi}}\right]d\varphi,$$

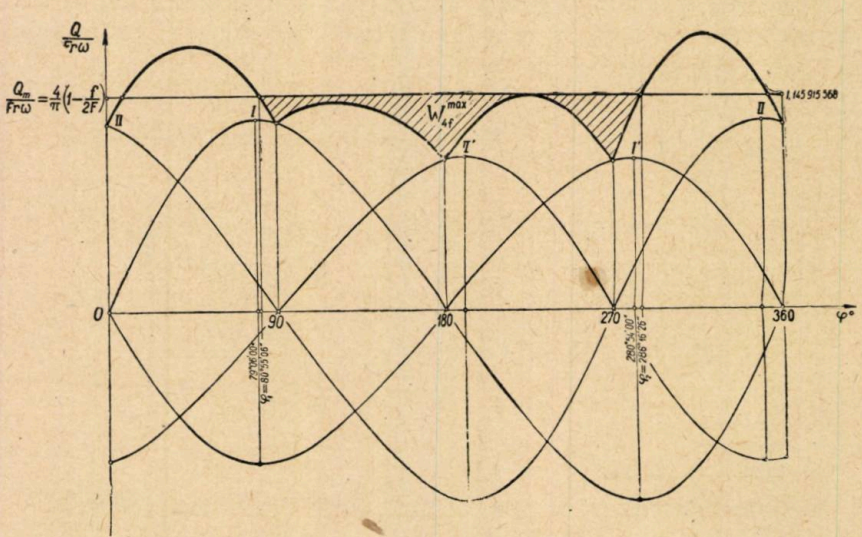


Fig. 8.

în care valoarea limitei inferioare φ_1 a primei integrale și a limitei superioare φ_2 a ultimei integrale sînt soluțiile ecuațiilor.

$$\sin\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}} + \cos\varphi - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}} = \frac{4m}{\pi}, \tag{46}$$

respectiv

$$\left(1 - \frac{f}{F}\right)\left(\sin\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}}\right) - \cos\varphi + \\ + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}} = -\frac{4m}{\pi}. \tag{47}$$

Rezolvînd aceste două ecuații în cazul nostru concret (2), (23), prin metoda grafo-numerică (2, b, β), obținem:

$$\varphi_1 = 80°55'06'', \text{ cu precizia } P(\varphi_1) = 1{,}7 \times 10^{-6}; \tag{48}$$

respectiv

$$\varphi_2 = 286°16'26'', \text{ cu precizia } P(\varphi_2) = 1{,}2 \times 10^{-6} \tag{49}$$

și calculînd expresia (45) prin integrare între limitele (48) și (49) rezultă:

$$W_{4f}^{\max} = Fr\left|\frac{4m\varphi}{\pi} + \cos\varphi + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} - \sin\varphi + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}\right|_{80°55'06''}^{90°} + Fr\left|\frac{4m\varphi}{\pi} + \cos\varphi + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{f}{F}\right)\left(\sin\varphi - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}\right)\right|_{90°}^{180°} + Fr\left|\frac{4m\varphi}{\pi} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{f}{F}\right)\left(-\cos - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi} + \sin\varphi - \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}\right)\right|_{180°}^{270°} + \\ + Fr\left|\frac{4m\varphi}{\pi} - \left(1 - \frac{f}{F}\right)\left(\cos\varphi + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sin^2\varphi}\right) - \sin\varphi + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \cos^2\varphi}\right|_{270°}^{286°16'26''} = 0{,}440 \cdot 004 \cdot 3\, Fr = 0{,}220 \cdot 002 \cdot 15\, Fr. \tag{50}$$

Comparînd acest rezultat cu cel obținut în ipoteza (1)*, avem

$$\frac{W_{4f}^{max}}{W_{4f\infty}^{max}} = 1{,}307 \cdot 861 \cdot 22 \tag{51}$$

Concluzii

Calculul exact al variației debitului pompelor cu piston cu mecanism de bielă și manivelă și al volumului maxim excedentar, ce dimensionează camera lor pneumatică, pune în evidență în cadrul studiului întreprins în această lucrare, importanța ce trebuie acordată lungimii finite a bielei la proiectarea acestor mașini hidraulice, arătîndu-se totodată și modul de rezolvare a problemei corecte.

Dacă în cazul pompei cu un piston cu simplu și dublu efect sau cu două pistoane cu simplu efect (cazurile 2, 3 și 4, formulele (14), (21) și (30)) în condițiile concrete (2) și (23), stabilite în vederea comparației cu cazul clasic (1), diferențele nu depășesc cîteva procente, atunci pentru pompele cu trei pistoane cu simplu efect și cu două pistoane cu dublu efect (cazurile 5 și 6, formulele (38), (44) și (51)) volumele maxime excedentare depășesc de cîteva ori valorile obținute în cazul clasic.

Acest lucru, ce are drept cauză considerarea lungimii finite a bielei, se explică atît prin creșterea maximului vitezei pistonului, cît și prin nesimetria curbei de variație a debitului cu unghiul de rotație al manivelei (fig. 2), ambele fenomene avînd o influență ce crește cu numărul de efecte de piston la o rotație a arborelui cotit.

Astfel, se justifică unele soluții practice adoptate în mod curent în construcția pompelor cu piston, precum utilizarea hidroforului la pompele triplex în special la aspirație, unde pericolul cavitației în cazul conductelor lungi ar împiedica creșterea turației mașinii, și utilizarea a două sau chiar patru hidrofoare la pompele duplex cu pistoane cu dublu efect decalate la 90°.

Remarcăm cu această ocazie, că teoria exactă a pompelor cu piston, dezvoltată în lucrarea de față, ne-a folosit totodată la un interesant studiu, actualmente în curs de publicare, referitor la teoria supapelor automate ale pompei cu piston.

Catedra de Mașini hidraulice

---

* Pentru cazul clasic, calculînd în ipoteza (23), obținem cu

$Q_I = Fr\omega \sin\varphi$; $Q_{II} = Fr\omega\cos\varphi$; $Q_{I'} = -(F-f)r\omega\sin\varphi$ și $Q_{II'} = -(F-f)r\omega\cos\varphi$;

$\sin\varphi_{1\infty} = 0{,}419 \cdot 835 \cdot 35$, $\varphi_{1\infty} = 155°10'33''$, $\sin\varphi_{2\infty} = -0{,}907 \cdot 600 \cdot 26$, $\varphi_{2\infty} = 294°49'27''$,

iar $W_{4f\infty}^{max} = 0{,}168 \cdot 215 \cdot 21$ Fs.

BIBLIOGRAFIE

[1] *H. Berg* — Die Kolbenpumpen. Springer-Verlag ; Berlin, 1921.

[2] * * * — Ențiclopediia mașinostroeniia. Tom 12. Maşghiz, Moskva, 1949, p. 372.

[3] *F. J. Weber* — Arbeitsmaschinen. Band I. Kolbenpumpen und Kolbenverdichter. VEB Verlag Technik, Berlin, 1961.

[4] *D. Pavel* — Mașini hidraulice. Vol. II. Ed. Energ. de Stat, București, 1955, p. 243.

[5] *C. Andreian* — Algoritmul cubic. Comunicare prezentată la Sesiunea generală a Academiei R.P.R. din iulie 1950.

[6] *C. Andreian - Cazacu* — Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor de gradul trei. Lucrările Colocviului de Analiză numerică. Cluj, decembrie 1960.

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ШАТУНА НА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ПОРШНЕВЫХ НАСОСОВ

(Краткое содержание)

В этой работе рассматривается точная теория поршневых насосов, предусмотренных с кривошипно-шатунным механизмом, причём оценивается влиание конечной длины шатуна при расчёте воздушного колпака насосов с одним и двумя поршнями простого и двойного действия, с учётом толщины поршневого щтока, а также с тремя поршнями.

Одновременно показываются присущие методы решения соответствующей математической задачи (2, b, α и β), а численные расчёты, выполненные в предположениях (2) и (23), сравниваются с полученными в классическом случае (1).

Все полученные с избытком отклонения, относящиеся к значению максимального избыточного объёма, необходимого для проектирования воздушного колпака, изменяются в том или другом случае в пределах от 3,6‰ до 339% (14), (21), (30), (38), (44), (51).

В новой находящейся в печати работе, показывается влияние конечной длины шатуна на кривую поднятия автоматических клапанов поршневых насосов.

INFLUENCE OF THE CONNECTING-ROD FINITE LENGTH ON THE PISTON PUMPS DELIVERY

(Summary)

This paper presents the exact theory of piston pumps with crank drive, the influence of the finite length of the connecting-rod on the calculation of the air-chamber of pumps with one and two simple and double acting pistons and the stem thickness being considered. The three cylinder case is also examined.

Appropiate methods for solving the afferent mathematical problem are given. The numerical calculations performed under the assumptions (2) and (23) are compared with those in the calssical case (1). All excess differences obtained for the maximum exceeding volume, required for the design of air-chambers, vary from case to case within 3,6‰ and 339% (14), (21), (30), (38), (44), (51).

A new article, which is to the published, will examine the influence of connecting-rod finite length on the curve showing the rising of the self-acting valves of piston pumps.

INFLUENCE DE LA LONGUEUR FINIE DE LA BIELLE SUR LE DÉBIT DES POMPES À PISTON

(Résumé)

Dans ce travail on présente la théorie exacte des pompes à piston prévues de mécanisme bielle-manivelle, en appréciant l'influence de la longueur finie de la bielle sur le calcul de la cloche à air (chambre pneumatique) des pompes à un et à deux pistons à simple et double effet, tout en considérant l'épaisseur de la tige du piston, ainsi qu'à trois pistons.

On montre de même les méthodes appropriées à résoudre le problème mathématique correspondant (2, b, α et β) et on compare les calculs. numériques effectués pour les valeurs (2) et (23) à ceux du cas classique (1), les différences relatives à la valeur du volume maximum excédentaire qui donne les dimensions utiles de la cloche à air, obtenues par excès, variant d'un cas à autre entre 3,6‰ et 339% (14), (21), (30), (38), (44), (51).

Dans une nouvelle étude, en cours de publication, on montre l'influence de la longueur finie de la bielle sur la courbe de relèvement des soupapes automatiques d'une pompe à piston.

EINFLUSS DER ENDLICHEN PLEUELSTANGENLÄNGE AUF DIE FÖRDERLEISTUNG DER KOLBENPUMPEN

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird die exakte Theorie der Kolbenpumpen mit Kurbelgetriebe dargestellt, und der Einfluss der endlichen Pleuelstangenlänge auf die Berechnung des Windkessels der Kolbenpumpen mit einem und zwei einfach-und doppeltwirkenden Kolben unter Berücksichtigung der Kolbenstangendicke, sowie mit drei Kolben betrachtet.

Gleichzeitig werden die geeigneten Methoden zur Lösung des entsprechenden mathematischen Problems (2, b, α und β) gezeigt, und die mit den Voraussetzungen (2) und (23) ausgeführten numerischen Rechnungen mit denen des klassischen Falles (1) verglichen.

Die Abweichungen des Höchstwertes des für den Entwurf des Windkessels erforderlichen überschüssigen Volumens sind alle positiv und schwanken von Fall zu Fall zwischen 3,6‰ und 339% (14), (21), (30), (38), (44), (51).

In einem weiteren, augenblicklich im Druck befindlichen Studium wird der Einfluss der endlichen Pleuelstangenlänge auf die Hebungskurve selbsttätiger Ventile einer Kolbenpumpe gezeigt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

ENERGETICA

INFLUENȚA GRADULUI DE DEZACORDARE A BOBINEI DE STINGERE A ARCULUI ELECTRIC ASUPRA TENSIUNII DE REVENIRE PE FAZA PUSĂ LA PĂMÎNT ÎN CAZUL UNEI PUNERI LA PĂMÎNT MONOFAZATE

LAZĂR HASCAL

1. Scheme echivalente

În mod curent rețelele cu neutrul legat la pămînt prin intermediul bobinei de stingere a arcului electric funcționează cu aceasta, într-o oarecare măsură, dezacordată.

Dezacordarea bobinei poate apare fie ca rezultat al schimbării condițiilor de exploatare (conectarea sau deconectarea unor linii) fie datorită faptului că variația reactanței bobinei se face în trepte. De asemenea, în unele cazuri, se dezacordează în mod intenționat bobina în scopul micșorării deplasării neutrului în rețelele neechilibrate.

Dezacordarea se apreciază prin gradul de dezacordare a bobinei ε care are expresia

$$\varepsilon = \frac{I_L - I_c}{I_c} = \frac{L\omega - \frac{1}{C_\Sigma \omega}}{\frac{1}{C_\Sigma \omega}}$$

unde (fig. 1):

L inductanța bobinei de stingere;
C_Σ suma capacității liniilor în raport cu pămîntul;
ε gradul de dezacordare al bobinei;
ω pulsația sursei de curent;
I_c curentul capacitiv de punere la pămînt;
I_L curentul inductiv datorit prezenței bobinei de stingere.

Funcționarea cu bobina dezacordată, fiind în contrazicere cu principiul pe baza căreia e utilizată această bobină, se reflectă negativ asupra calităților de protecție a acesteia.

În principal, funcționarea cu bobina dezacordată duce la creșterea curentului remanent de punere la pământ, la creșterea vitezei de revenire a tensiunii pe faza avariată după înlăturarea punerii la pământ și la creșterea valorii maxime a acesteia din urmă.

În cele ce urmează ne vom opri asupra influenței pe care o are gradul de dezacordare a bobinei asupra vitezei de revenire și asupra valorii

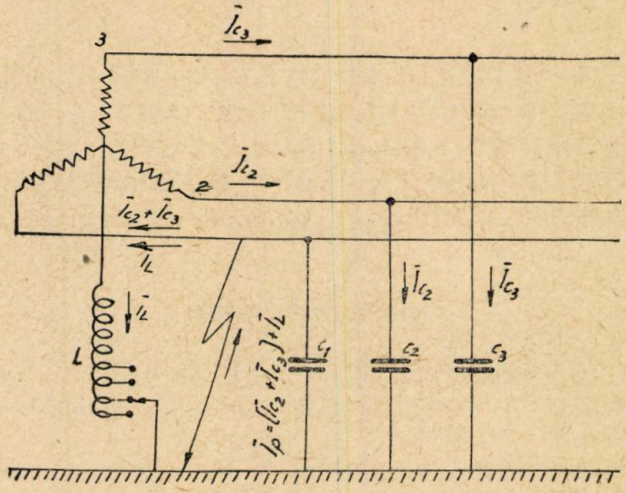


Fig. 1

maxime a tensiunii pe faza avariată, după înlăturarea punerii la pământ (prima stingere a arcului).

Să presupunem o rețea electrică cu neutrul pus la pământ prin intermediul unei bobine de stingere (fig. 1).

În cazul punerii nete la pământ a unei faze (de ex. faza 1), tensiunea fazei avariate în raport cu pământul va fi egală cu zero, iar tensiunile celorlalte două faze vor crește cu $\sqrt{3}$ ori mărimea normală pe fază (fig. 2).

Tensiunile între faze păstrează aceleași valori atît înainte cît și după punerea la pământ.

Prin locul de defect va trece curentul de punere la pământ I_p reprezentînd suma vectorială a curenților $\bar{I}_c$, $\bar{I}_L$ și $\bar{I}_R$ care va depinde de gradul de dezacordare al bobinei *.

Curentul I_R reprezintă componenta activă a curentului de punere la pământ I_p care apare ca urmare a pierderilor active pe drumul parcurs de I_p.

Prin înlăturarea punerii la pământ curentul I_p devine egal cu zero, iar tensiunile pe cele trei faze tind să revină la valoarea lor inițială.

* De regulă bobinele de stingere lucrează cu fierul nesaturat și de aceia nu luăm în considerație armonicele superioare ae curentului.

Regimul care apare în rețeaua considerată prin punerea la pămînt a unei faze poate fi echivalat cu acel regim care ar apare în rețea dacă la neutrul ei ar fi conectată o sursă monofazată, de aceiași frecvență cu

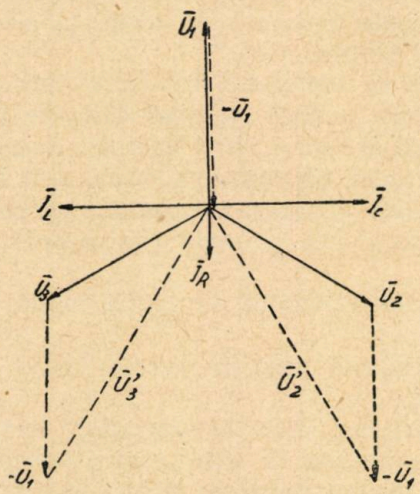


Fig. 2

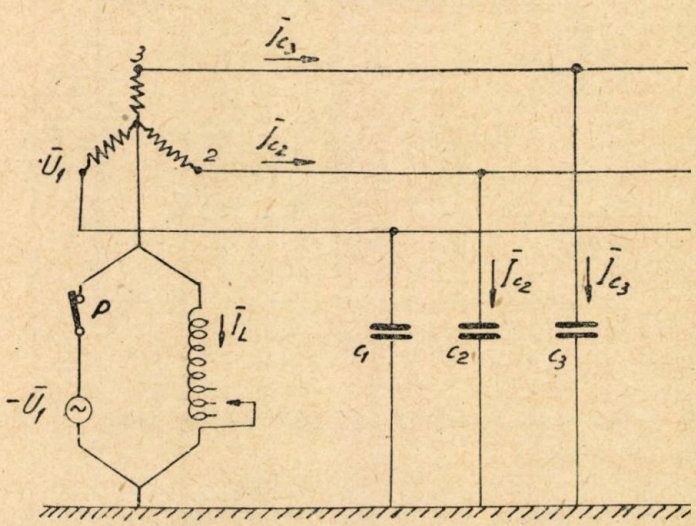


Fig. 3

frecvența rețelei, avînd tensiunea egală și în opoziție de fază cu tensiunea fazei avariate (fig. 3).

La fel ca și la o punere reală la pămînt a unei faze, conectarea sursei monofazate suplimentare la neutrul rețelei atrage după sine anu-

larea tensiunii în raport cu pămîntul a fazei avariate, la creşterea tensiunilor în raport cu pămîntul pînă la 1,73 U_f pe celelalte două faze iar tensiunile între faze rămîn neschimbate.

De asemenea curenţii prin capacităţi, bobină şi întrerupătorul P (care în schema echivalentă reprezintă locul de punere la pămînt) sînt aceiaşi ca şi în cazul schemei reale *.

Rezultă că putem să reprezentăm regimul reţelei cu o fază pusă la pămînt ca o suprapunere a două regimuri distincte şi anume:

— regimul normal al reţelei (cînd lipseşte punerea la pămînt);

— regimul cînd t.e.m. ale sursei trifazate sînt egale cu zero, iar la neutrul reţelei se aplică o sursă monofazată cu tensiunea egală şi în opoziţie de fază cu tensiunea normală (în raport cu pămîntul) a fazei avariate.

Schema echivalentă a acestui din urmă regim este reprezentată în figura 4.

În schemă există cîteva surse de pierderi active care trebuie luate în consideraţie şi anume:

— curenţii activi care trec la suprafaţa izolatorilor care susţin conductorii şi care se reflectă în schemă prin rezistenţa echivalentă R_1;

— pierderile în miezul magnetic al bobinei şi în cuprul bobinei; datorită acestor pierderi curentul care trere prin bobină va conţine şi o

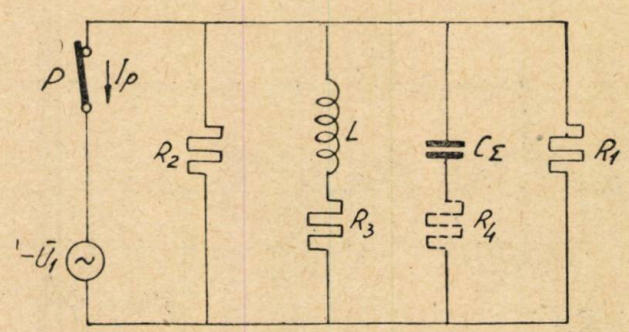


Fig. 4

componentă activă care poate fi atribuit rezistenţelor R_2 (în paralel) respectiv R_3 (în serie);

— pierderile în dielectric, în care se includ şi pierderile corona, sînt simbolizate prin rezistenţa R_4; la reţelele pînă la 35 kV (inclusiv) aceste

* Ţinînd cont de faptul că compensarea curentului capacitiv cu ajutorul bobinei de stingere se face în special în reţele scurte (pînă la 35 kV inclusiv) cu mai multe circuite în paralel, în calcule s-a neglijat impedanţa liniilor şi a transformatoarelor ca fiind mică şi neexercitînd o influenţă esenţială asupra fenomenelor studiate în lucrare; se aminteşte că în calcule similare din literatură se procedează la fel.

pierderi sînt așa de mici încît pot fi neglijate și de aceia rezistența R_4 a fost trecută punctat în schemă.

Schema echivalentă din figura 4 poate fi transformată astfel încît să ajungem la schema din figura 5 unde R reprezintă rezistența echivalentă de pierderi.

Deoarece în schema din figura 4 rezistența R_3 în serie cu inductanța L este foarte mică și reprezintă circa 0,015 din reactanța $L\omega$ a bobinei (con-

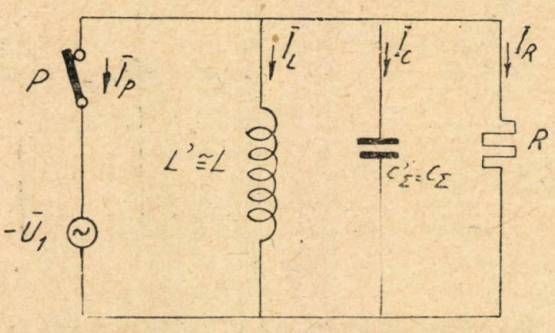


Fig. 5

siderată la frecvența rețelei) inductanța L' poate fi considerată egală cu inductanța L din schema precedentă.

Din aceleași motive $C'_\Sigma \cong C$.

Raportul z (în procente) între valoarea absolută a componentei active a curentului de punere la pămînt I_R și a componentei capacitive a aceluiași curent I_c

$$z = \frac{I_R}{I_c} 100 = \frac{1}{RC_\Sigma \omega} \cdot 100 \qquad (2)$$

se numește *amortizarea* rețelei

În rețelele scurte cu neutrul pus la pămînt prin bobina de stingere, valoarea componentei active de punere la pămînt reprezintă 5 pînă la 15% din valoarea curentului capacitiv (depinde de tipul rețelei, a bobinei de stingere, de starea izolatorilor, starea timpului etc.). Prin urmare și valoarea lui va varia între 5 și 15%.

În cazul cînd punerea la pămînt se va face printr-o rezistență de trecere R_p schema din figura 5 se modifică și ia forma schemei din figura 6.

Deoarece bobina este acordată aproape la rezonanță cu capacitatea totală C_Σ pentru frecvența rețelei, adică

$$L\omega \cong \frac{1}{C_\Sigma \omega}$$

schema echivalentă pentru regim staționar reprezentată în figura 6, poate fi utilizată și pentru calculul regimului tranzitoriu în cazul întreruperii bruște a alimentării (deschiderea bruscă a întreruptorului P). Aceasta se explică prin aceia că, în acest caz, frecvența proprie de oscilație a schemei LRC e aproximativ egală cu frecvența rețelei.

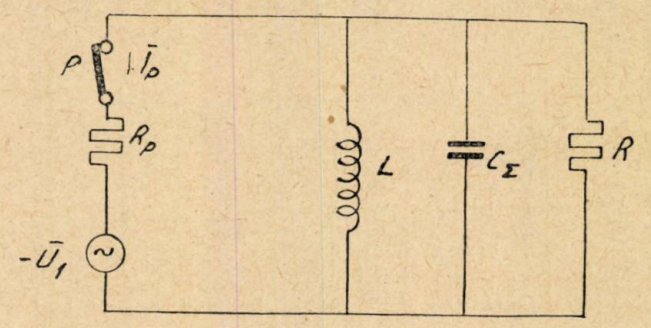


Fig. 6

Din schema din figura 6 reiese că în cazul punerii la pământ a fazei 1 curentul I_p de punere la pământ va fi egal cu:

$$\bar{I}_p = \frac{-\bar{U}_1}{R_p + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + j\left(C_\Sigma \omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}} \tag{3}$$

Ținînd cont de relațiile 1 și 2 se poate scrie că:

$$\bar{I}_p = \frac{-\bar{U}_1}{R_p + \dfrac{R}{1 - j\dfrac{\varepsilon\,^0/_0}{z}}} \tag{4}$$

sau încă:

$$\bar{I}_p = -\bar{U}_1 \frac{\left(1 - j\dfrac{\varepsilon\,^0/_0}{z}\right)\left(R_p + R + J\dfrac{\varepsilon\,^0/_0}{z} R_p\right)}{(R_p + R)^2 + \left(\dfrac{\varepsilon\,^0/_0}{z}\right)^2 R_p^2} \tag{5}$$

$$= -\bar{U}_1 \frac{R_p + R + \left(\dfrac{\varepsilon\,^0/_0}{z}\right)^2 R_p + J\dfrac{\varepsilon\,^0/_0}{z} R}{(R_p + R)^2 + \left(\dfrac{\varepsilon\,^0/_0}{z}\right)^2 R_p^2}$$

Unghiul de defazaj între curentul $\overline{I}_p$ și tensiunea $(-\overline{U}_1)$ va fi obținut din relația:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\frac{\varepsilon\,\%}{z}R}{R_p + R + \left(\frac{\varepsilon\,\%}{z}\right)^2 R_p^2} \tag{6}$$

$$\varphi = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{\varepsilon\,\%}{z}R}{R_p + R + \left(\frac{\varepsilon\,\%}{z}\right)^2 R_p^2} \tag{7}$$

2. Calculul tensiunii de revenire

Așa cum s-a mai arătat, în cazul înlăturării punerii la pământ tensiunile pe cele trei faze trec de la valorile proprii regimului cu o fază pusă la pământ la valorile lor normale.

Trecerea nu poate să se facă brusc — datorită inductanțelor și capacităților care intră în componența rețelei — ci are loc un proces tranzitoriu.

Variația tensiunilor pe cele trei faze, în timpul procesului tranzitoriu, se poate determina prin suprapunerea tensiunii tranzitorii $U_c(t)$ — care se obține prin deconectarea instantanee a sursei suplimentare monofazate — peste tensiunile normale a fazelor respective.

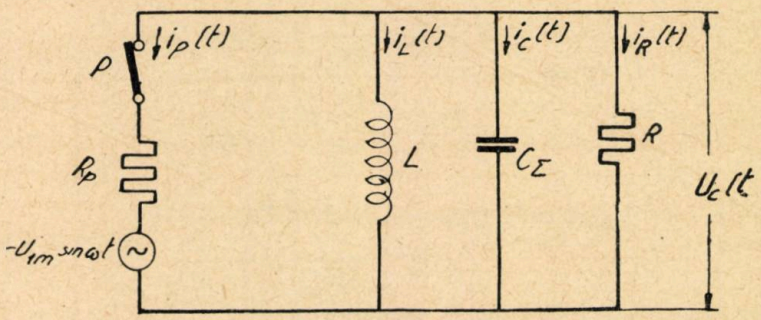


Fig. 7.

În cele ce urmează ne propunem să calculăm tensiunea de revenire $U_{rev}(t)$ pe faza avariată (de exemplu faza 1) atunci cînd este înlăturată punerea la pământ.

În conformitate cu cele arătate mai sus vom calcula mai întîi tensiunea tranzitorie $U_c(t)$.

Presupunem că tensiunea pe faza 1 este $U_{1m}\sin\omega t$; atunci tensiunea sursei monofazate va fi egală cu $-U_{1m}\sin\omega t$.

Pentru schema din figura 7 avem:

$$i_c(t) + i_L(t) + i_R(t) = i_p(t) \tag{8}$$

sau

$$C_\Sigma \frac{d^2 U_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d U_c(t)}{dt} + \frac{1}{L} U_c(t) = i_p(t) \tag{9}$$

unde

$$U_c(t) = - U_{1m} \sin \omega t - i_p(t) R_p$$

$$= - U_{1m} \left[\sin \omega t - \frac{R_p}{Z} \sin (\omega t - \varphi) \right] \tag{10}$$

$$U_c(t) = \frac{d U_c(t)}{dt} = -\omega U_{1m} \left[\cos \omega t - \frac{R_p}{Z} \cos (\omega t - \varphi) \right] \tag{10'}$$

$$Z = R_p + \frac{1}{\frac{1}{R} + J \left(\omega C_\Sigma - \frac{1}{L\omega} \right)} \tag{11}$$

Expresia tensiunii tranzitorii $U_c(t)$ după înlăturarea sursei (deschiderea întrerupătorului P) poate fi obținută din ecuația diferențială 9 fără membrul al doilea.

$$C_\Sigma \frac{d^2 U_c(t)}{dt} + \frac{1}{R} \frac{d U_c(t)}{dt} + \frac{1}{L} U_c(t) = 0 \tag{12}$$

Sub formă operațională ec. 12 poate fi scrisă astfel:

$$U_c(p) = \frac{p\, U_c(t_0) + \frac{1}{RC_\Sigma} U_c(t_0) + U_c'(t_0)}{p^2 + \frac{1}{RC_\Sigma} p + \frac{1}{LC_\Sigma}} \tag{13}$$

sau încă:

$$U_c(p) = U_c(t_0) \frac{p + a_0}{p^2 + \frac{1}{RC_\Sigma} p + \frac{1}{LC_\Sigma}} \tag{14}$$

unde $t_0 \rightarrow$ momentul întreruperii alimentării

$$a_0 = \frac{U_c'(t_0)}{U_c(t_0)} + \frac{1}{RC_\Sigma} \tag{15}$$

În cazul nostru ecuația caracteristică

$$p^2 + \frac{1}{RC_\Sigma} p + \frac{1}{LC_\Sigma} = 0 \tag{16}$$

are rădăcini complexe.

Într-adevăr rădăcinile ecuației (16) sînt

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC_\Sigma} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC_\Sigma}\right)^2 - \frac{1}{LC_\Sigma}} \tag{17}$$

Din relațiile (1) și (2) reese că:

$$\frac{1}{LC_\Sigma} = \omega^2(1+\varepsilon) \tag{18}$$

respectiv:

$$\frac{1}{2RC_\Sigma} = \frac{z\omega}{2\cdot 100}$$

In acest caz

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC_\Sigma} \pm \omega \sqrt{\left(\frac{z}{2\cdot 100}\right)^2 - (1+\varepsilon)}$$

In practica exploatării:
$\varepsilon \to$ e cuprins între val. 0 și 0,25
$z \to$ e cuprins între val. 5 și 15
Prin urmare

$$\left(\frac{z}{2\cdot 100}\right)^2 < 1+\varepsilon$$

iar

$$p_{1,2} = -\alpha \pm i\beta$$

unde:

$$\alpha = \frac{1}{2RC_\Sigma} = \frac{z\omega}{2\cdot 100} = 1{,}57\, z \ (f = 50 \text{ Hz}) \tag{20}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC_\Sigma} - \left(\frac{1}{2RC_\Sigma}\right)^2} = \omega \sqrt{(1+\varepsilon) - \left(\frac{z}{2\cdot 100}\right)^2} \tag{21}$$

$$\beta \cong \omega\sqrt{1+\varepsilon} \quad \text{deoarece} \quad (1+\varepsilon) \gg \left(\frac{z}{2\cdot 100}\right)^2 \tag{21'}$$

Relația (14) mai poate deci fi scrisă sub forma

$$U_c(p) = U_c(t_0)\frac{p+a_0}{(p+\alpha)^2+\beta^2} \tag{22}$$

Originalul funcției (22) va fi:

$$U_c(t) = \frac{U_c(t_0)}{\beta}\left[(a_0-\alpha)^2 - \beta^2\right]^{1/2} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi) \tag{23}$$

unde

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{a_0-\alpha} \tag{24}$$

Presupunem că punerea la pămînt este înlăturată (ruperea arcului are loc) în momentul t_0 în care curentul de punere la pămînt $i_p(t)$ trece prin zero adică :

$$i_p(t_0) = -\frac{U_{1m}}{Z}\sin(\omega t_0 - \varphi) = 0 \tag{25}$$

de unde obținem pe

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega} \tag{26}$$

Introducînd valoarea lui t_0 în relațiile (10) și (10′) obținem valorile inițiale ale tensiunii tranzitorii și anume :

$$U_c(t_0) = -U_{1m}\sin\varphi \tag{27}$$

$$U_c'(t_0) = -\omega U_{1m}\left[\cos\varphi - \frac{Rp}{Z}\right] \tag{28}$$

Din relația (15) obținem că :

$$a_0 = \frac{\omega\left(\cos\varphi - \frac{Rp}{Z}\right)}{\sin\varphi} + \frac{1}{RC_\Sigma} \tag{29}$$

Expresia generală pentru tensiunea de revenire pe faza avariată (în cazul nostru faza 1) se poate scrie sub forma :

$$U_{rev}(t) = U_{1m}\sin(t_0 + t) + U_c(t)$$

$$= U_{1m}\left\{\sin(t_0 + t) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\varphi}{\beta}\left[(a_0 - \alpha)^2 + \beta^2\right] e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \psi)\right\} \tag{30}$$

unde t măsoară timpul din momentul înlăturării punerii la pămînt.

2.1. *Tensiunea de revenire pentru cazul cînd rezistența de punere la pămînt R_p este egală cu zero* ($R_p = 0$)

În acest caz relațiile 6, 27, 28 și 29 devin :

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\varepsilon\,\%}{z} \tag{31}$$

$$U_c(t_0) = -U_{1m}\sin\varphi \tag{32}$$

$$U_c'(t_0) = -\omega U_{1m}\cos\varphi \tag{33}$$

$$a_0 = \omega\operatorname{ctg}\varphi + \frac{1}{RC_\Sigma} \tag{34}$$

Ținînd cont de relațiile (26), (30), (32) și (34) și operînd și cîteva transformări obținem expresia tensiunii de revenire pentru cazul considerat și anume:

$$U_{rev}(t) = U_{1m}\left[\sin(\omega t+\varphi) - \right.$$

$$-\sqrt{\frac{\left(\cos\varphi+\frac{1}{2RC_\Sigma\,\omega}\sin\varphi\right)^2+(1+\varepsilon)\sin^2\varphi}{1+\varepsilon}}\,e^{-1{,}57\,zt}\times$$

$$\left.\times\sin\sqrt{1+\varepsilon}\,\omega t - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1+\varepsilon}\,\omega}{\omega\operatorname{ctg}\varphi+\frac{1}{2RC_\Sigma}}\right] \tag{35}$$

sau

$$U_{rev}(t) = U_{1m}\left[\sin(\omega t+\varphi) - Be^{-1{,}57\,zt}\cdot\sin(\omega' t+\varphi')\right] \tag{36}$$

unde:

$$\omega' = \sqrt{1+\varepsilon}\,\omega \tag{37}$$

$$B = \sqrt{\frac{\left(\cos\varphi+\frac{1}{2RC_\Sigma}\sin\varphi\right)^2+(1+\varepsilon)\sin^2\varphi}{1+\varepsilon}} \tag{37'}$$

$$\varphi' = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1+\varepsilon}\,\omega}{\omega\operatorname{ctg}\varphi+\frac{1}{2RC_\Sigma}} \tag{38}$$

2.1.1. *Tensiunea de revenire pentru cazul cînd bobina e acordată la rezonanță.* ($\varepsilon=0$).

În acest caz din relațiile (6) și (7) se obține că:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\varepsilon\,\%}{z} = 0 \tag{39}$$

$$\varphi = 0 \tag{39'}$$

Atunci din relațiile (37), (37') și (38)

$$\omega' = \omega \tag{40}$$

$$B = 1 \tag{40'}$$

$$\varphi = -\operatorname{arc\,tg} 0 = 0 \tag{40''}$$

Introducînd aceste valori în relația (36) obținem tensiunea de revenire :

$$U_{rev}(t) = U_{.m}(1 - e^{-1,57\,zt}) \sin \omega t \tag{41}$$

Caracterul revenirii tensiunii pe faza avariată e arătată în fig. 8.

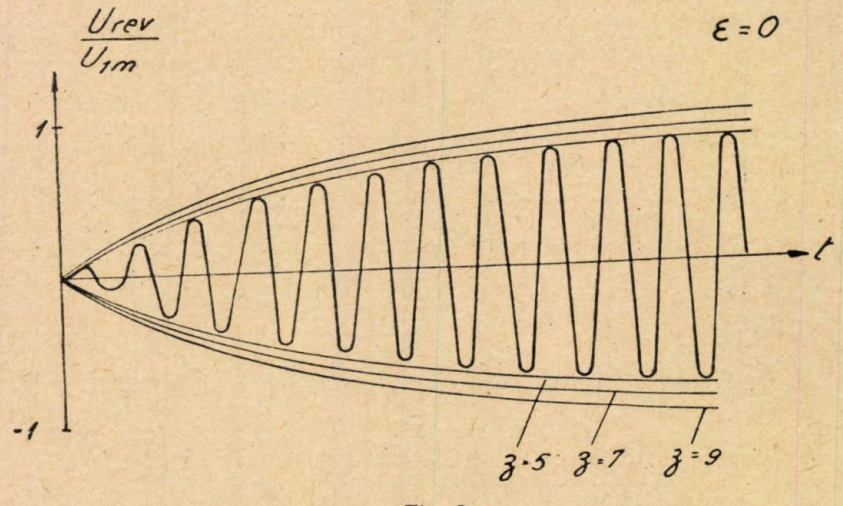


Fig. 8

Prin urmare după ruperea arcului tensiunea pe faza avariată se va restabili treptat și nu va întrece tensiunea pe faza avariată în regim normal.

O asemenea restabilire a tensiunii are drept efect stingerea în cele mai bune condițiuni a arcului electric.

Din relația (41) mai reiese că tensiunea se va restabili cu atît mai lent cu cît amortizarea rețelei va fi mai mică (fig. 8).

2.1.2. *Tensiunea de revenire pentru cazul cînd bobina e dezacordată* ($\varepsilon \neq 0$)

Pentru a scoate în evidență care este influența gradului de dezacordare a bobinei asupra tensiunii de revenire vom considera cazul unei rețele ideale fără pierderi. În acest caz $z = 0$, $R = \infty$ iar unghiul φ de decalaj este egal cu $\frac{\pi}{2}$.

În acest caz din relația (35) obținem

$$U_{rev}(t) = U_{1m}[\cos \omega t - \cos \omega' t] \tag{42}$$

unde

$$\omega' = \sqrt{1 + \varepsilon}\,\omega \tag{43}$$

Relația (42) mai poate fi scrisă și sub forma

$$U_{rev}(t) = 2\,U_{1m} \sin \frac{\omega - \omega'}{2}\, t \sin \frac{\omega + \omega'}{2}\, t \qquad (44)$$

unde

$$\omega \neq \omega'$$

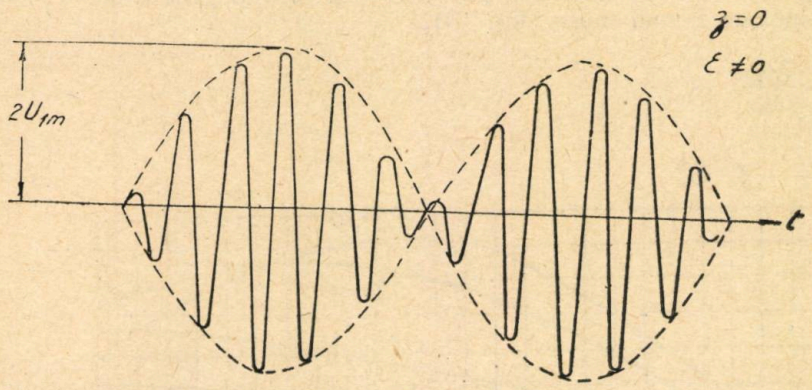


Fig. 9

Procesul de restabilire al tensiunii are caracter de bătăi iar maximul tensiunii de revenire va fi egal cu de două ori tensiunea maximă normală pe faza avariată U_{1m}.

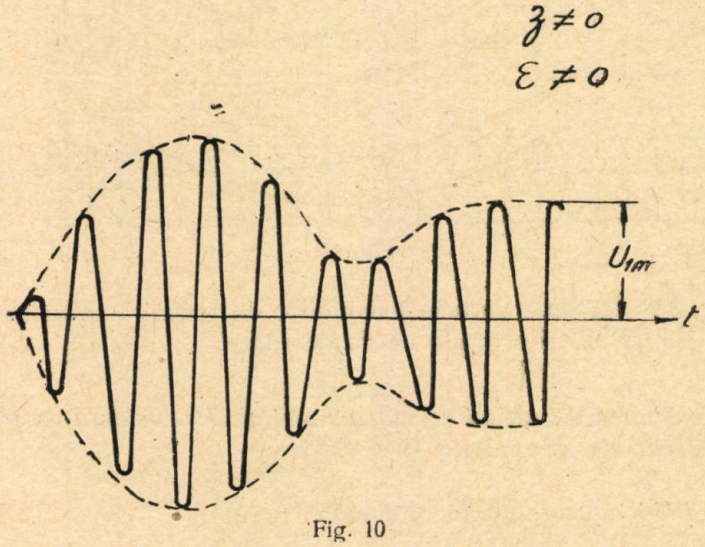


Fig. 10

Viteza de revenire a tensiunii va fi cu atît mai mare și valoarea maximă a tensiunii de revenire va fi atinsă cu atît mai repede cu cît gradul de dezacordare al bobinei ε va fi mai mare.

În rețelele reale caracterul de bătăi se păstrează deoarece se păstrează și deosebirile între pulsațiil ecorespunzătoare celor doi termeni din relația (35) adică :

$$\omega \neq \omega' = \sqrt{1 + \varepsilon}\,\omega \tag{45}$$

iar acest caracter va fi cu atît mai accentuat cu cît gradul de dezacordare al bobinei va fi mai mare (fig. 10).

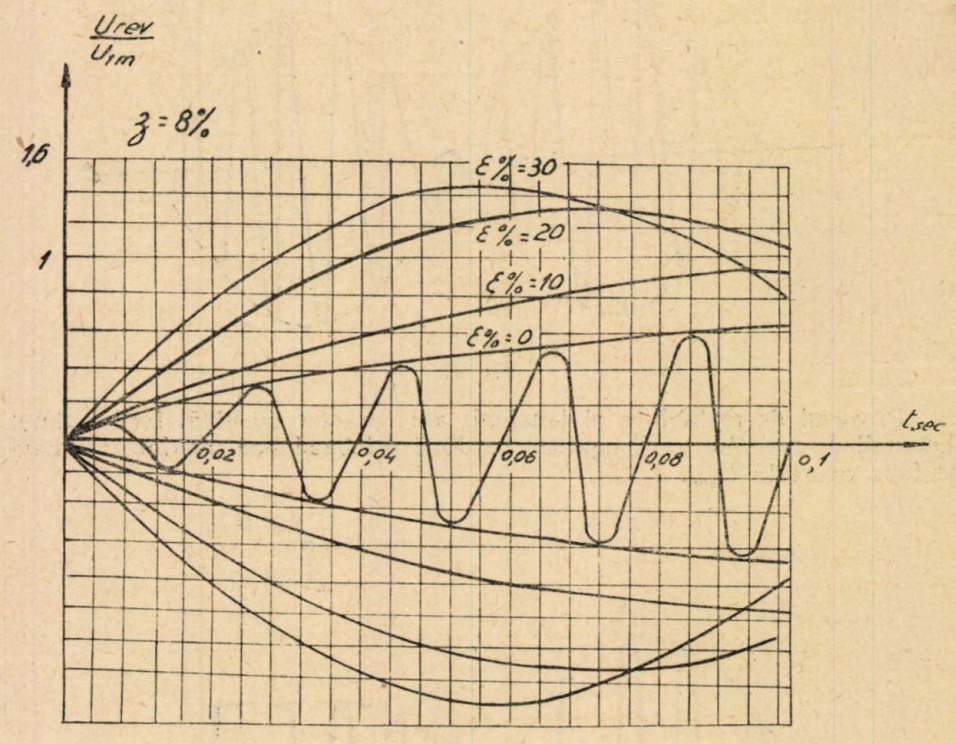


Fig. 11

În fig. 11 sînt date curbele tensiunilor de revenire pentru o rețea cu $Z=8\%$ și pentru diferite grade de dezacordare.

2.2. *Tensiunea de revenire pentru cazul cînd rezistența de trecere este diferită de zero* ($R_p \neq 0$)

2.2.1. *Bobina acordată la rezonanță* ($\varepsilon=0$)

În acest caz din relațiile (6), (29), (20) și (11) obținem respectiv :

$$\operatorname{tg}\varphi = 0 \qquad (\varphi = 0)$$

$$\beta = \omega$$

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{a_0 - a} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \dfrac{R_p}{Z} + \dfrac{1}{2RC_\Sigma}\sin\varphi} = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0$$

$$Z = R_p + R$$

Dacă în expresia generală a tensiunii de revenire (30) introducem sub radical — în cel de al doilea termen din paranteză — raportul $\dfrac{\sin\varphi}{\beta}$ și înlocuim pe a_0 cu echivalentul lui din (29) obținem că:

$$U_{rev}(t) = U_{1m}\left[\sin(\omega t + \varphi) - e^{-1{,}57\,zt}\sqrt{\frac{\left(\omega\cos\varphi - \omega\dfrac{R_p}{Z} + \dfrac{1}{2RC_\Sigma}\sin\varphi\right)^2 + \beta^2\sin^2\varphi}{\beta}}\sin(\beta t + \psi)\right] \quad (46)$$

Introducînd în această relație valorile obținute mai sus obținem expresia tensiunii de revenire pentru cazul considerat și anume:

$$U_{rev}(t) = U_{1m}\left(1 - \frac{R}{R_p}e^{-1{,}57\,zt}\right)\sin\omega t \quad (47)$$

Caracterul variației tensiunii de revenire în acest caz este arătat în fig. 12.

La fel ca și în cazul punerii nete la pămînt tensiunea de revenire nu va întrece, în mărime, tensiunea fazei avariate, iar timpul necesar pentru restabilirea tensiunii va fi cu atît mai lung cu cît pierderile vor fi mai mici (z mai mic).

Din relația (47) mai reiese că tensiunea în momentul ruperii arcului va fi diferită de zero și va avea valoarea

$$U_{rev}(0) = \frac{R_p}{R + R_p}U_{1m} \quad (48)$$

Trebuie însă arătat faptul că în cazul în care rezistența de trecere va fi mică (zeci sau chiar sute de ohmi) atunci valoarea inițială a tensiunii de revenire a fi foarte apropiată de zero* iar procesul de restabi-

* Un mic exemplu va fi edificator în acest sens.

Presupunem că avem o linie de 35 kV care are curentul capacitiv de punere la pămînt egal cu 50A iar amortizarea liniei e considerată egală cu 7% ($z = 7\%$). Presupunem deasemeni $R_T = 100\,\Omega$.

In acest caz rezistența echivalentă de pierderi va fi egală cu

$$R = \frac{U_f \cdot 100}{z\,I_c} = 5770\,\Omega$$

$$U_{rev}(0) = \frac{R_p}{R + R_p} = \frac{100}{5770 + 100} \cong 0{,}016\,U_{1m}$$

lire a tensiunii va fi foarte apropiat de acela care are loc în cazul cînd rezistența de trecere este egală cu zero (fig. 8).

Aceasta se explică prin aceia că, curentul remanent de punere la pămînt fiind mic, căderea de tensiune pe această rezistență (R_p) e mică și nu influențează în măsură sensibilă valoarea inițială a tensiunii tranzistorii $U_c(0)$ care se opune restabilirii rapide a tensiunii pe faza avariată.

În cazul în care valoarea rezistenței de trecere e comparabilă cu valoarea rezistenței echivalente R, în momentul ruperii arcului va apare brusc, pe faza avariată, o tensiune $U_{rev}(0)$ care va fi cu atît mai mare cu cît R_p va fi mai mare (fig. 12).

2.2.2. *Bobina de stingere dezacordată* ($\varepsilon \neq 0$)

În acest caz tensiunea de revenire se obține din relația (30)

$$U_{rev}(t) = U_{1m}\left[\sin(\omega t + \varphi) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\varphi}{\beta}\sqrt{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}\; e^{-\alpha t}\cdot\sin(\beta t + \psi)\right]$$

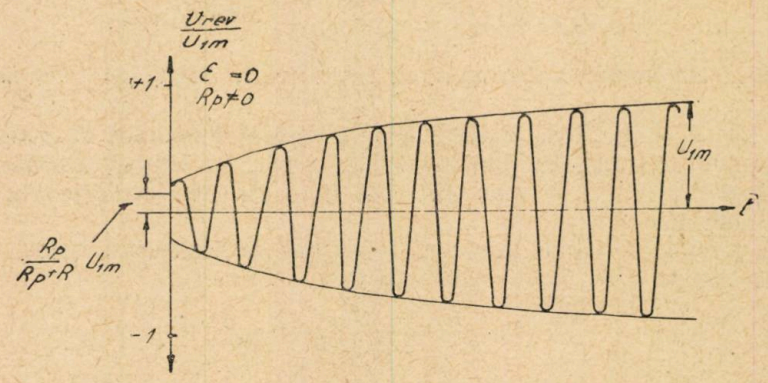


Fig. 12.

Tensiunea inițială, care apare brusc în momentul întreruperii arcului va avea valoarea

$$U_{rev}(0) = U_{1m}\sin\varphi\left[1 - \sqrt{\frac{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}{\beta^2}}\;\sin\psi\right] \qquad (49)$$

Din aceleași motive care le-am arătat mai sus caracterul variației tensiunii de revenire în acest caz va fi similar cu acela cînd rezistența $R_p = 0$ dacă R_p are valori relative mici (zeci sau sute de ohmi)

În cazul cînd valoarea rezistenței de trecere R_p e comparabilă cu valoarea rezistenței echivalente de pierderi R, apare o tensiune bruscă la ruperea arcului care e cu atît mai mare cu cît R_p e mai mare. Valoarea acestei tensiuni poate fi calculată cu relația (49).

Deoarece și în acest caz

$$\omega \neq \beta = \sqrt{1 + \varepsilon}\ \omega$$

caracterul de bătăi al tensiunii de revenire se păstrează și va fi cu atît mai accentuat cu cît gradul de dezacordare al bobinei va fi mai mare.

Catedra de mașini electrice

BIBLIOGRAFIE

[1] *I. R. Willheim* și *M. Water* — Zazemlenie neitrali v văsocovoltnăk sistemah Gosenergoizdat — 1959.

[2] *F. A. Lihacev* — Vîbor, ustanovka i expluatația dugogaseascih aparatov. Gosenergoizdat 1955.

[3] *H. Lazăr* — Zazemlenie neitrali cerez nastroenoe inductivnoe soprotivlenie Disertație, 1954.

[4] *L. B. Neiman și P. L. Kalantarov* — Bazele teoretice ale electrotehnicei, vol. III, Ed. Tehnică, 1956.

[5] *Manduit* — Instalations electrique a haute et basse tension, vol. I Dunod, 1949.

ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ РАССТРОЙКИ ДУГОГАСЯЩЕЙ КАТУШКИ НА ВООСТАНОВЛИВАЮЩИЕСЯ НАПРЯЖЕНИЕ ПОВРЕЖДЕННОЙ ФАЗЫ В СЛУЧАЕ ОДНОФАЗНОГО ЗАЗЕМЛЕНИЯ

(Краткое содержание)

В статье установливается выражрние для восстановливающиеся налряжения повреженной фазы в слусае заземления одной фазы в сети с заземленной нейтралью через заземляющую катушку.

Также показанно влияние степени расстройки катушки и сопротивления заземления в место повреждения на восстановливающиеся напряждние после устраоения замыкания на землю.

INFLUENCE OF THE DETUNING DEGREE OF THE ARC SUPPRESSION COIL OVER THE RECOVERY VOLTAGE ON THE EARTHED PHASE FOR A SINGLE PHASE EARTH FAULT

(Summary)

The expression of the recovery voltage is established in the paper for a line-to-ground fault in a network with the neutral grounded by means of an arc suppression coil.

It shows the influence of the detuning degree of the coil and of the grounding resistance over the recovery voltage.

L'INFLUENCE DU DEGRÉ DE DESACCORDAGE DE LA BOBINE D'EXTINCTION DE L'ARC ÉLECTRIQUE SUR LA TENSION DE RETOUR DANS LA PHASE MISE À LA TERRE DANS LE CAS D'UNE MISE À LA TERRE MONOPHASÉE

(Résumé)

L'article établit l'expression de la tension de retour dans la phase avariée dans le cas de mise à la terre par une bobine d'extinction de l'arc électrique.

De même, on décrit l'influence du degré de desaccordage de la bobine et de la resistance de la mise à la terre à l'endroit du défaut sur la tension de retour.

DER EINFLUSS DES VERSTIMMUNGGRADES DER LICHTBOGEN-LÖSCHSPULE AUF DIE RÜCKKEHRSPANNUNG DER GEERDETEN PHASE, IM FALLE EINES EINPHASIGEN

(Zusammenfassung)

Im Aufsatz wird der Ausdruck der Rückkehrspannung der beschädigten Phase im Falle der Erdung einer Phase in einem mittels Lichtbogen löschspuler geerdeten Netze festgesetzt.

Gleichfalls, wird der Einfluss des Vestimmunggrades der Spule und des Erdungwiderstandes an der Fehher-Stelle auf die Rückkehrspannung gezeigt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 2

ELECTRONICĂ

MĂSURAREA CONDUCTIVITĂȚII ȘI PERMITIVITĂȚII ÎN MICROUNDE *

G. RULEA

1. Introducere

Sarcinile artificiale și atenuatorii cu dielectric cu pierderi, folosiți în ghidurile de undă, impun cunoașterea valorii conductivității și permitivității dielectricilor, în domeniul microundelor.

Pe baza analogiei ce există între ghidurile uniforme și liniile de transmisiune [6], se pot extinde metodele de măsură a impedanței de sarcină, aplicate la linii, și în cazul ghidurilor uniforme. De asemenea se poate utiliza diagrama cercului nu numai la linii, ci și la ghiduri.

Măsurînd factorul de undă staționară σ și distanța x_{max} de la sarcină pînă la primul maxim de tensiune, se poate determina impedanța de sarcină Z_s adică rezistența R_s și reactanța X_s.

Din relația:

$$|\varrho|\underline{\varphi} = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\underline{\varphi} = \frac{R_s + jX_s - R_0}{R_s + jX_s + R_0} \qquad (1)$$

în care $|\varrho|$ reprezintă modulul coeficientului de reflexie, iar R_0 impedanța caracteristică a liniei sau impedanța de undă a modului stabilit în ghid, se pot deduce, prin transformări simple, rezistența R_s și reactanța X_s în funcție de factorul de undă staționară σ și de defazajul φ a cărui expresie este:

$$\varphi = 2\beta x_{max}$$

în care β este constanta de fază a undei care se propagă pe linie sau în ghid.

---

* Lucrare prezentată la sesiunea științifică a Cadrelor didactice din I.P.B. — 7—8 aprilie 1962.

În cazul analizat β este constanta de fază a modului existent în ghid. Valoarea rezistenței R_s și a reactanței X_s deduse din relația (1), se exprimă prin formulele (vezi anexa I):

$$R_s = R_0 \frac{2\sigma}{\sigma^2-1} \frac{1}{\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2-1} - \cos\alpha} \tag{2}$$

$$X_s = R_0 \frac{1}{\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2-1} - \cos\alpha} \sin\alpha \tag{3}$$

Aceste relații au aplicație relativ redusă, avînd în vedere că se poate utiliza diagrama cercului, care dă mai rapid valorile $\frac{R_s}{R_0}$ și $\frac{X_s}{R_0}$, cînd σ și x_{max} sînt cunoscuți. În cazul circuitelor cu constante concentrate, determinarea rezistenței și a reactanței impedanței de sarcină înseamnă rezolvarea problemei. În cazul determinării constantelor electrice ale unui material, așa cum se pune problema în microunde, determinarea rezistenței și a reactanței reprezintă o primă etapă a rezolvării problemei, etapa următoare fiind deducerea mărimilor conductivitate σ_2 și permitivitate ε_2. (Avîndu-se în vedere un dielectric cu pierderi $\mu_2=\mu_1=\mu_0$. Indicele 1 se referă la aer, iar indicele 2 la dielectricul cu pierderi studiat).

Pentru a determina acești parametri, se ține seama că materialul dielectric cu pierderi formează un ghid dielectric cu pierderi. Astfel, ghidul de măsură, cu dielectric aer, deci cu $\sigma_1=0$, $\varepsilon_1=\varepsilon_0$ și $\mu_1=\mu_0$ se continuă cu un ghid dielectric cu pierderi cu parametri electrici σ_2, $\mu_2=\mu_1=\mu_0$ și ε_2.

Determinarea parametrilor mediului dielectric cu pierderi se poate face în mai multe moduri. Dacă se consideră mediul dielectric de lungime suficient de mare (teoretic infinită), unda reflectată de la ieșirea din materialul dielectic cu pierderi este neglijabilă.

În acest caz, într-o primă metodă, ghidul dielectric cu pierderi de lungime infinită prezintă la intrare ca sarcină pentru ghidul de măsură, impedanța de undă.

O a doua metodă folosește, în același caz, al mediului dielectric infinit, studiul reflexiei undelor plane la suprafața de separație a celor două medii.

În cazul mediului finit, impedanța prezentată de ghidul dielectric cu pierderi este funcție de lungime și se calculează cu formule analoage cu cele de la liniile de transmisiune.

În toate cazurile se lucrează cu modul H_{10}.

2. Ghidul dielectric cu pierderi, de lungime infinită

2.1. *Metoda impedanței de undă.*

Impedanța de undă a modului H_{10} în ghidul dreptunghiular cu dielectric cu pierderi de lungime infinită este, în același timp, impedanța de sarcină a ghidului de măsură, adică:

$$R_s + j X_s = Z'_{10} = \frac{j \omega \mu_2}{\gamma'_{10}} \tag{4}$$

în care

$$\gamma'_{10} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + j \omega \mu_2 (\sigma_2 + \omega \varepsilon_2)}$$

Rezistența R_s și reactanța X_s pot fi deduse din factorul de undă staționară σ și din defazajul $\varphi = 2\beta_u x_{max}$. Deoarece γ_{10} este exprimat în funcție de σ_2 și ε_2, rezultă că se pot obține relațiile $\sigma_2 = f_1(\sigma, \varphi)$ și $\varepsilon_2 = f_2(\sigma, \varphi)$.

Observînd că

$$Z'_{10} = R_0 \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho}$$

și că

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega_{cr_1}^2 \varepsilon_1 \mu_1 = \omega^2 \sin^2 \theta_1 \varepsilon_1 \mu_1 = \beta_1^2 \sin^2 \theta_1$$

rezultă:

$$R_0 \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} = \frac{\omega \mu_2}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_1 - j \omega \sigma_2 \mu_2}} \tag{5}$$

Din această ecuație se pot obține (vezi Anexa II) expresiile ce dau permitivitatea ε_2 și conductivitatea σ_2:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left[1 + \frac{\left(\frac{2\sigma}{\sigma^2 - 1}\right)^2 - \sin^2 \varphi}{\left(\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1} + \cos \varphi\right)^2} \operatorname{ctg}^2 \theta_1 \right] \sin^2 \theta_1 \tag{6}$$

$$\sigma_2 = \omega \varepsilon_1 \frac{\frac{4\sigma}{\sigma^2 - 1} \sin \varphi}{\left(\frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2 - 1} + \cos \varphi\right)^2} \cos^2 \theta_1 \tag{7}$$

2.2. *Metoda reflexiei undelor plane.*

Conductivitatea σ_2 și permitivitatea ε_2 se pot determina pornind de la studiul reflecției undei plane la suprafața de separație între aer și un dielectric cu pierderi. Se știe că unda H_{10} în ghidul dreptunghiular poate fi considerată ca rezultatul suprapunerii a două unde plane ale căror direcții de propagare fac unghiul θ_1 cu pereții laterali ai ghidului. Coeficientul de reflexie al undei plane, a cărei direcție de propagare face cu normala la planul de separație al mediilor unghiul θ_1 și al cărei cîmp electric este normal pe planul de incidență, are expresia (vezi [8]) :

$$\varrho = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\beta_1 \mu_2 \cos\theta_1 - \mu_1 \sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_1 - j\omega\sigma_2\mu_2}}{\beta_1 \mu_2 \cos\theta_1 + \mu_1 \sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_1 - j\sigma_2\omega\mu_2}} \tag{8}$$

Dacă notăm

$$B = \beta_1 \cos\theta_1$$

și

$$A = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \beta_1^2 \sin^2\theta_1 - j\sigma_2\omega\mu_2}$$

se obține

$$\frac{B}{A R_0} = \frac{1}{R_0} \frac{1-\varrho}{1+\varrho} \tag{9}$$

Se constată că relația 9 este identică cu relația 5, ceea ce duce la concluzia că propagarea în dielectricul cu pierderi în ghid (modul H_{10}) se poate reduce la cazul propagării în dielectricul infinit, considerînd constanta de propagare și impedanta de undă a modului H_{10}. Trebuie precizat că în ghid coeficientul de reflexie ρ_1 pentru o undă plană este egal din cauza simetriei cu cel al undei plane a doua ρ_2, și coeficientul de reflecție total este și el egal cu cel al undei plane definit mai sus. În adevăr :

$$\varrho_1 = \frac{E_{r1}}{E_{i2}} \; ; \quad \varrho_2 = \frac{E_{r2}}{E_{i2}} \; ;$$

Din cauza simetriei $Er_1 = Er_2$ și $Ei_1 = Ei_2$, deci $\varrho_1 = \varrho_2$.

Coeficientul de reflexie global este :

$$\varrho = \frac{Er_t}{Ei_t}$$

Or

$$E_{it} = Ei_1 + Ei_2 = 2\,Ei_1$$

și

$$E_{rt} = E_{r1} + E_{r2} = 2\,E_r$$

și deci

$$\varrho = \varrho_1 = \varrho_2 \tag{10}$$

Relația (10) îndreptățește utilizarea coeficientului ρ așa cum el este determinat în linia de măsură. Trebuie observat că e necesar ca în ghid x_{max} să fie luat pe axa ghidului și nu pe direcția θ_1. Formulele stabilite sînt comod de utilizat, deoarece din cauza caracteristicii parabolice a detectorului experimental se determină σ' și nu σ.

În unele cazuri, este util să se determine care este rezistența și reactanța prezentate de un material dielectric cu pierderi de conductivitate σ_2 și permitivitate ε_2 cunoscute.

Din relațiile (1) și (8) se poate deduce rezistența și reactanța unui material dielectric cu pierderi.

$$R_s = R_0 \cos\theta_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{1+\frac{\sigma_2^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}}} \left(\sqrt{1-\frac{\sigma_2}{2\omega\varepsilon_2}} + \sqrt{1+\frac{\sigma_2}{2\omega\varepsilon_2}} \right)$$

$$X_s = -R_0 \cos\theta_1 \frac{\sigma_2}{2\omega\varepsilon_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{1+\frac{\sigma_2^2}{\omega^2 \varepsilon_2^2}}} \left(\sqrt{1-\frac{\sigma_2}{2\omega\varepsilon_2}} + \sqrt{1+\frac{\sigma_2}{2\omega\varepsilon_2}} \right)$$

sau dacă

$$\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2} \ll 1$$

$$R_s = \frac{2n\cos\theta_1 R_0}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2^2}{\varepsilon_2\omega}\right)^2}$$

$$X_s = -\frac{n\cos\theta_1 R_0}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^2} \cdot \frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}$$

unde

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Unghiul θ_1 se determină în funcție de raportul între frecvența critică a modului și frecvența de lucru.

În literatură [5] se dă formula aproximativă:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{(1+r_i)^2 - 4r_i \sin^2\theta_1}{(1-r_i)^2} \tag{11}$$

în care

$$r_i = -|\varrho|^2 .$$

Formula aproximativă 11, se deduce simplu din relația exactă (6) (vezi anexa III). Aproximațiile nu sînt necesare, deoarece metoda de determinare a constantelor electrice este simplă.

Metodele de mai sus au dezavantajul că experimental se pot verifica în cazul unor materiale cu pierderi mari, deoarece în cazul pierderilor mici lungimea probei de material devine foarte mare.

3. Ghidul dielectric cu pierderi, de lungime finită. Metoda probei subțiri

În acest caz, lungimea probei de material va interveni în relațiile de determinare a parametrilor electrici. Pentru porțiunea de ghid cu dielectric este necesar să se utilizeze relația ce dă impedanța de intrare a ghidului cu dielectric cu pierderi pentru modul H_{10}. Cum aceasta depinde de impedanța de sarcină a ghidului cu dielectric cu pierderi, este indicat să se lucreze pentru simplitate în scurt-circuit, eliminîndu-se totodată posibilitatea apariției fenomenului de radiație a cîmpului electromagnetic. (Se poate lucra și în gol, lăsînd între material și scurt-circuit o distanță de $\lambda/4$ considerată în ghidul cu aer).

Impedanța de intrare a ghidului cu dielectric, cu pierderi, în scurt-circuit, va fi:

$$Z_i = Z'_{10} \operatorname{th} \gamma'_{10} l$$

Aceasta este impedanța de sarcină a ghidului de măsură cu aer, și deci

$$Z_i = Z_s = Z'_{10} \operatorname{th} \gamma'_{10} l = R_0 \frac{1+\varrho}{1-\varrho} \tag{12}$$

Din relația (12), luînd placa de material de lungime b (pe axa ghidului) mai mică de $\frac{\lambda_{10}}{10}$, se poate deduce că: (vezi anexa IV)

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{a}{l\omega}\right)^2 \frac{1}{\mu_1} + \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1 \tag{13}$$

în care $a = \beta l$ se deduce din curba

$$\frac{\operatorname{tg} \beta l}{\beta l} = y$$

iar

$$y = \frac{A(\sigma^2 + f^2) - f(\sigma^2 - 1)}{(\sigma^2 - 1) + \frac{1}{A}(1 + \sigma^2 f^2)}$$

în care σ e factorul de undă staționară. $A = \frac{R_0}{\omega \mu_2 l}$ iar $f = tg\varphi$, φ fiind defazajul pentru primul maxim de tensiune considerat de la sarcină.

Este interesant că se obține o relație în σ^2 care este proporțională cu indicația dată de detectorul parabolic.

Conductivitatea are expresia:

$$\sigma_2 = 2\left(\frac{a}{1}\right)^2 \frac{1}{\omega\mu_1} \frac{\sigma(1+f^2)}{(\sigma^2-1)f + \frac{1}{A}(1+\sigma^2 f^2)} \tag{15}$$

În cazul dielectricilor cu pierderi mari, utilizați în sarcinile disipative ale wattmetrelor, cuplajelor directive și atenuatorilor, este preferabil să se utilizeze metoda impedanței de undă. Pentru a obține rezultate corecte este necesar să se verifice dacă unda reflectată la capătul liniei dielectrice e neglijabilă. Acest lucru se poate de exemplu verifica, măsurînd σ și x_{max} cu linia dielectrică în scurt-circuit și în gol. Dacă diferențele sînt neglijabile metoda e aplicabilă. În cazul metodei probei subțiri este necesară o sensibilitate și o precizie bună a aparaturii, deoarece proba fiind de lungime mică influența ei asupra cîmpului electromagnetic nu este suficient de ușor de pus în evidență. Cu aceste condiții metodele pot fi aplicate fără dificultăți.

Anexa I

Din relația:

$$\varrho = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \qquad \text{I}$$

se deduce:

$$\frac{Z_s}{Z_0} = \frac{1+\varrho}{1-\varrho} \qquad \text{II}$$

și apoi:

$$\frac{Z_s}{Z_0} = \frac{(1+\varrho)(1-\varrho^*)}{(1-\varrho)(1-\varrho^*)} = \frac{1-\varrho\varrho^*+\varrho-\varrho^*}{1-(\varrho+\varrho^*)+\varrho\varrho^*} \qquad \text{III}$$

în care ϱ și ϱ^* reprezintă coeficientul de reflexie și conjugatul său Relația III devine:

$$\frac{Z_s}{Z_0} = \frac{1-|\varrho|^2+2j|\varrho|\sin\varphi}{1-2|\varrho|\cos\varphi+|\varrho|^2} \qquad \text{IV}$$

Întrucît

$$|\varrho| = \frac{\sigma-1}{\sigma+1}$$

iar

$$1-|\varrho|^2 = \left(1-\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)\left(1+\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right) = \frac{2}{\sigma+1}\cdot\frac{2\sigma}{\sigma+1} = \frac{4\sigma}{(\sigma+1)^2} \qquad \text{V}$$

și

$$1+|\varrho|^2 = 1+\left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^2 = 2\frac{(\sigma^2+1)}{(\sigma+1)^2} \qquad \text{VI}$$

înlocuind V și VI în ecuația IV rezultă relațiile (2) și (3) (cu $Z_0 = R_0$)

Dacă sarcina e pur reactivă $\sigma = \infty$ și deci valoarea ei este dată de:

$$X_s = R_0 \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

Pentru

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ adică } \beta x_{max} = \frac{\pi}{4}$$

$$X_s = R_0$$

Dacă $\varphi = 0$, se obține ridicînd nedeterminarea

$$X_s = R_0 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \infty$$

ceea ce corespunde cazului liniei în gol.

Anexa II

Din relația:

$$Z_s = R_s + jX_s = R_0 \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} = Z'_{in} = \frac{\omega \mu_2}{\sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_1 - j \sigma_2 \omega \mu_2}}$$

se deduce:

$$\sqrt{\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_1 - j \sigma_2 \omega \mu_2} = \frac{\omega \mu_2}{R_0} \frac{1 - \varrho}{1 + \varrho}$$

Ridicînd la patrat și exprimînd coeficientul de reflexie sub forma

$$\varrho = |\varrho| (\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

se obține:

$$\omega^2 \mu_2 \varepsilon_3 - \beta_1^2 \sin^2 \theta_1 - j \sigma_2 \omega \mu_2 = \frac{\omega^2 \mu_2^2}{R_0^2} \left[\frac{1 - |\varrho| \cos \varphi - j |\varrho| \sin \varphi}{1 + |\varrho| \cos \varphi + j |\varrho| \sin \varphi} \right]^2 = A$$

Înmulțind cu conjugata și ridicînd la patrat, rezultă:

$$A = \frac{\omega^2 \mu_2^2}{R_0^2} \left\{ \frac{[(1 - |\varrho|^2)^2 - 4 |\varrho|^2 \sin^2 \varphi] - j\, 4 |\varrho| (1 - |\varrho|^2) \sin \varphi}{(1 + 2 |\varrho| \cos \varphi + |\varrho|^2)^2} \right\} \quad \text{I}$$

Se exprimă $|\varrho|$ în funcție de σ

$$|\varrho| = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \quad \text{II}$$

și apoi

$$|\varrho|^2 = \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right)^2 \quad \text{III}$$

și

$$1 - |\varrho|^2 = \frac{4 \sigma}{(\sigma + 1)^2} \quad \text{IV}$$

Se înlocuiește relațiile II, III, IV în I și se obține:

$$A = \frac{\omega^2 \mu_2^2}{R_0^2} \left[\frac{\frac{16\sigma^2}{(\sigma+1)} - 4\left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^2 \sin^2\varphi - j\,4\,\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\,\frac{4\sigma}{(\sigma+1)^2}\sin\varphi}{4 - \frac{(\sigma^2+1)^2}{(\sigma+1)^4}\left[1 + \frac{\sigma^2-1}{\sigma^2+1}\cos\varphi\right]^2} \right]$$

Egalîndu-se părțile reale și imaginare și observînd că

$$\frac{\omega^2 \mu_2^2}{R_0^2} = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 \cos^2\theta_1 \text{ (căci } R_0^2 = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\,\frac{1}{\cos^1\theta_1}\text{. iar } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0)$$

rezultă:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left[1 + \frac{\left(\frac{2\sigma}{(\sigma^2-1)}\right)^2 - \sin^2\varphi}{\left(\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2-1} + \cos\varphi\right)^2} \operatorname{ctg}^2\theta_1 \right] \sin^2\theta_1$$

și

$$\sigma_2 = \omega\varepsilon_1 \frac{\frac{4\sigma}{\sigma^2-1}\sin\varphi}{\left[\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2-1} + \cos\varphi\right]^2} \cos^2\theta_1$$

Anexa III

Dacă în

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left[\sin^2\theta_1 + \frac{(1-|\varrho|^2)^2 - 4|\varrho|^2 \sin^2\varphi}{(1+|\varrho|^2)^2} \cos^2\theta_1 \right]$$

se ține seama că $|\varrho|^2 = -r_i$, că se poate considera pentru dielectricul cu pierderi $\varphi \simeq 90°$, adică $\sin\varphi \simeq 1$, și se exprimă $\cos^2\theta_1 = 1 - \sin^2\theta_1$ rezultă:

$$k \cong \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cong \frac{\sin^2\theta_1 (1-r_i)^2 + [(1+r_i)^2 + 4r_i](1-\sin^2\theta_1)}{(1-r_i)^2}.$$

Prin operații simple se ajunge la

$$k \simeq \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{(1+r_i)^2 + 4r_i - 8r_i \sin^2\theta_1}{(1-r_i)^2}$$

și cu aproximarea că

$$4r_i - 8r_i \sin^2\theta_1 \cong -4r_i \sin^2\theta_1$$

se ajunge la:

$$k \cong \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{(1+r_i)^2 - 4r_i \sin^2\theta_1}{(1-r_i)^2}$$

Anexa IV

Ecuația :

$$Z'_{10} \operatorname{th} \gamma'_{10} l = R_0 \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$$

se poate pune sub forma :

$$\frac{j\omega\mu_2}{\alpha+j\beta} \cdot \operatorname{th}(\alpha+ja)\, l = R_0 \frac{\sigma+j\operatorname{tg}\varphi}{1+j\sigma\operatorname{tg}\varphi} \qquad \text{I}$$

în care

α — constanta de atenuare în dielectricul cu pierderi,
β — constanta de fază în dielectricul cu pierderi,
σ — factorul de undă staționară în linia de măsură,
φ — defazajul pînă la maximul de tensiune.

Notînd cu

$$f = \operatorname{tg}\varphi$$

și dezvoltînd termenul $\operatorname{th}(\alpha+j\beta)\, l$ rezultă :

$$\frac{j\omega\mu_2 l}{\alpha l+j\beta l} \quad \frac{\operatorname{th}\alpha l+j\operatorname{tg}\beta l}{1+j\operatorname{th}\alpha l\operatorname{tg}\beta l} = R_0 \frac{\sigma+j\operatorname{tg}\varphi}{1+j\sigma\operatorname{tg}\varphi} \qquad \text{II}$$

iar $\operatorname{th}\alpha l \cong \alpha l$.

Pentru $l \leqslant \frac{\lambda_{10}}{10}$

$$\alpha l \operatorname{tg}\beta l \leqslant 1$$

și relația II se poate exprima prin :

$$\frac{j\omega\mu_2 l}{\frac{\alpha}{\beta}+j} \left(\frac{\alpha}{\beta}+j\frac{\operatorname{tg}\beta l}{\beta l}\right) = R_0 \frac{\sigma+jf}{1+j\sigma f} \qquad \text{III}$$

Notăm $\frac{\alpha}{\beta} = x$ și $\frac{\operatorname{tg}\beta l}{\beta l} - y$ și deci III devine :

$$\frac{j\omega\mu_2 l}{x+j}(x+jy) = R_0 \frac{\sigma+jf}{1+j\sigma f} \qquad \text{IV}$$

Separînd partea reală și imaginară a ecuației :

$$j\omega\mu_2 l(x+jy)(1+j\sigma f) = R_0(\sigma+jf)(x+j)$$

și notînd

$$\frac{R_0}{\omega\mu_2 l} = A$$

se obțin ecuațiile:

$$(1 - Af)\,x - \sigma f\,y = \sigma A \tag{1}$$

$$\sigma\,(A + f)\,x + y = f A \tag{2}$$

Din care se deduc valorile x și y

$$x = \frac{\sigma\,(1 + f^2)}{(\sigma^2 - 1)\,f + \dfrac{1}{A}\,(1 + \sigma^2 f^2)} \tag{IV}$$

$$y = -\frac{A\,(\sigma^2 + f^2) + f(\sigma^2 - 1)}{(\sigma^2 - 1)\,f + \dfrac{1}{A}\,(1 + \sigma^2 f^2)} \tag{VI}$$

Din curba $y = \dfrac{\operatorname{tg} \beta l}{\beta l}$ se deduce valoarea mărimii βl.

$$\text{Fie} \quad \beta l = a \tag{VII}$$

Atunci

$$\alpha = \frac{a}{l}\,\frac{\sigma\,(1 + f^2)}{(\sigma^2 - 1)\,f + \dfrac{1}{A}\,(1 + \sigma^2 f^2)} \tag{VIII}$$

Dar relația VII se exprimă sub forma:

$$\omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}\,\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2 \theta_1} = \frac{a}{b} \tag{IX}$$

adică:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left(\frac{a}{b\,\omega}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_1 \mu_1} + \sin^2 \theta_1 \tag{X}$$

sau

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^2 + \sin^2 \theta_1 \tag{X a}$$

Din X rezultă:

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{a}{l\,\omega}\right)^2_{\mu_1} + \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1 \tag{XI}$$

Dar din

$$\gamma_{10}^{\prime 2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + j\,\omega \mu_2\,(\sigma_2 + j\,\omega \varepsilon_2) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 + j\,\omega \sigma_2 \mu_2$$

$$= (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2$$

rezultă:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2 \text{ sau } -\beta^2 \cong \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2$$

și

$$2\alpha\beta = \omega\sigma_2\mu_2$$

Deci

$$\gamma_{10} = \alpha + j\beta \cong \sqrt{-\beta^2 + j\omega\mu_2\sigma_2} = j\beta\sqrt{1 - \frac{j\omega\mu_2\sigma_2}{\beta^2}}$$

$$= \frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2\beta} + j\beta \; ; \; \alpha = \frac{1}{2}\sigma_2\frac{\omega\mu_2}{\beta} = \frac{1}{2}\sigma_2\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\frac{1}{\cos\theta_1}$$

rezultă :

$$\alpha = \frac{1}{2}\sigma_2 R_a \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_1}} \qquad \text{XII}$$

de unde se deduce :

$$\sigma_2 = 2\left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{1}{\omega\mu_1} \frac{\sigma(1+f^2)}{(\sigma^2-1)f + \frac{1}{A}(1+\sigma^2 f^2)}$$

Catedra de Radio-Comunicații

BIBLIOGRAFIE

[1] *C. R. Englung* — Dielectric Constant and Power Factors at Centimeter Wave Lengths. The Bell System Tehnical Journal, vol. 23, 1944, Januarie, pag. 114—129.

[2] *Ed. L. Ginzton* — Microwave Measurements, Iz inostr. literat., Moscva, 1960, pag. 338—340.

[3] *A. R. Hippel* — Dielectrics and Waves, Izd. inostr. lit., Moscva, 1960, pag. 114—119.

[4] *I. V. Lebedev* — Tehnica i priborî cverhvîsokih ciastot. Gosenergoizdat, Moscva, 1961, pag. 240—242.

[5] *G. G. Montgomery* — Technique of Microwave Measurements, New York, Mc Graw Hill, 1947, pag. 606.

[6] *Gh. Rulea* — Încadrarea studiului ghidurilor uniforme în teoria generală a rețelelor cu constante concentrate. Bul. Inst. Politehnic, București, 1961, Tom XXIII, F. 4, pag. 191.

[7] *A. D. Șirman* — Radiovolnovodî i obemnîe rezonatorî. Sviazizdat. Moscva, 1959, pag. 108.

[8] *Stratton* — Electromagnetic Theory, Mc Graw Hill, New York, 1941, pag. 454.

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

(Краткое содержание)

Излагается некоторые соображения связи с методами измерения проницаемости и проводимости в области микроволн, в двух случасях: среда с малами потериями и среда с большими потерями.

Указывается, что, для среды с большыми потерями можно рассматривать распространение элсктрамагнитного поля в прсямоуголонм вольноводе (волна H_{10}), как случай отражения на поверхности двух безконечных сред.

Для среды с малами потерями испопьуется эквивалентная цепи очин короткой линии передачи.

MEASUREMENT METHODS OF PERMITTIVITY AND PERMEABILITY IN MICROWAVES

(Summary)

The present paper provides some considerations on the permittivity and conductivity measurement methods in the microwave field in two cases : medium with litle loss and medium with great loss.

It is shown that for media with great loss it is possible to consider the electromagnetic propagation in the rectangular waveguide (wave H_{10}) as a case of surface reflexion of two infinite media.

For the little loss media is used on equivalent circuit of a very phort transmission line.

MÉTHODES DE MESURE DE LA PERMITIVITÉ ET PERMEABILITÉ EN MICROONDES

(Résumé)

On expose quelques considerations sur les méthodes de mesure de la permitivité et de la conductivité, dans le domaine des microondes, en deux cas : milieux avec febles et fortes pertes.

On montre que, pour les milieux avec fortes pertes, il est possible de considerer la propagation du champ electromagnetique dans le guide d'onde réctangulaire (onde H_{10}), comme un cas de refléxion a la surface des deux milieux infinis.

Pour les milieux avec faibles pertes, on utilise le circuit equivalent d'une ligne de transmission tres courte.

MESSUNGSMETHODEN DER PERMITIVITÄT UND PERMEABILITÄT IN MICROWELLEN

(Zusammenfassung)

Es werden einige Betrachtungen über die Vermessungsmethoden der Permitivität und Leitungsfähigkeit aul dem Gebiete der Mikrowellen, in zwei Fallen, erläutert :

Es wird gezeigt, dass für die Medien mit grossen Verlusten es möglich ist die Ausbreitung des elektromagnetische Feldes in der rechtwinkligen Hohlleiter (H_{10}—Welle) als einen Fall de Reflexion an der Oberfläche zweier unendlicher Medien zu betrachten. Für medien mit kleinen Verlusten verwendet man den gleichwertigen Stromkreis einer sehr kurzen Leitung.

Intreprinderea Poligrafică nr. 6, str. Alex. Odobescu nr. 12, Bucureşti — c. 839

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

11

REFERAT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 3

MAI — IUNIE

1963

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu patru fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в четырех годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутскик сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication trimestrielle, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 3

MAI — IUNIE
1963

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academie R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Conf. *Gh. Hagymaș*, cand. St. Th.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Conf. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R. P. R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICA

A. TĂNĂSESCU — Principles and schemes for several new types of Perspectographs 13

FIZICA

D. MOISIL — Etudie spectroscopique sur l'oxidation des couches minces de cuivre 19

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. TEOREANU — Considerations about the hardening of binding matter 27

ENERGETICA

C. DINCULESCU, A. ARIE, P. BUHUȘ, D. CRISTESCU — Laboratorul de centrale, stații și sisteme electrice din Institutul Politehnic București 33

D. PAVEL — Analyse der hydraulischen Wirkungsgrade neuzeitlicher Kaplan-Propeller und Rohrturbinen . . 53

P. MILITARU — Contribuție la calculul rețelelor trifazate racorduri monofazate 85

ELECTROTEHNICA

V. NEDELCU — Eine neue Methode zur Ableitung allgemeiner Betriebsglechungen von Synchronmaschinen . 113

E. POTOLEA — Une methode pour la determination des reactances syndrones de la machine aux poles saillants. 133

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

А. ТЭНЭСЕСКУ — Принципы и схемы новых типов перспектографа 13

ФИЗИКА

Д. МОИСИЛ — Спектроскопическое исследование в связи и окислением тонких слоев меди 19

ТЕХНОЛОГИЯ КИМИКИ

И. ТЕОРЕАНУ — К вопросу твердения вяжущих веществ 27

ЭНЕРГЕТИКА

К. ДИНКУЛЕСКУ, А. АРИЕ, П. БУХУШ, А. КРИСТЕСКУ — Лаборатория электрических станций, подстанций и систем существующая в Бухарестском Политехническом институте 33

Д. ПАВЕЛ — Анализ гидравлического КПД современных поворотнопластных, пропеллерных и капсульных турбин 53

П. МИЛИТАРУ — К расчетам трехфазных сетей с однофазными ответлениями 85

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

В. НЕДЕЛЬКУ — Новый метод вывода основных управлений синхронны машин 113

Е. ПОТОЛЕА — Метод одновременного определения реактансов явнополюсной синхронной машин . . 133

CONTENTS

MATEMATICS

A. TANASESCU — Principales and schemes for several new types of Perspectographs 13

PHISICS

D. MOISIL — Spectroscopie study of copper thin layers oxidation 19

TEHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. TEOREANU — Considerations about the hardening of binding matter 27

ELECTRIC POWERS

C. DINCULESCU, A. ARIE, P. BUHUȘ, D. CRISTESCU — The laboratory of power plants, stations and electrical systems of the Polytechnical Institute of Bucarest 33

D. PAVEL — Hydraulic efficiency analysis for modern Kaplan Propeller andbulb turbines 53

P. MILITARU — Contribution to the calculation of three-phase networks with single-phase loads 85

ELECTRICITY

V. NEDELCU — A new methode for establishing the synchronous machine equations 113

E. POTOLEA — An original mathod for the simultanous determination of the longitudinal and transversal reactance of the syncronic machine with silent poles . 133

SOMMAIRE

MATEMATIQUE

A. TĂNĂSESCU — Principes et achémés pour quelques nouveaux types des perspectographs schémes . . 13

PHYSIQUE

D. MOISIL — Etude spectroscopique sur l'oxidation des couches minces de cuivre 19

CHIMIE TECHNOLOGIQUES

I. TEOREANU — Considérations sur la durcissemen des liants 27

ENERGETIQUE

C. DINCULESCU, A. ARIE, P. BUHUȘ, D. CRISTESCU — Le laboratoire de Centrales, statios et réseaux électriques de l'Institut Polytechnique de Bucarest . 33

D. PAVEL — L'analyse de rendements hydrauliques des turbines Kaplan, helicoidales et tubulaire-boulbes . 53

P. MILITARU — Contribution au calcul des réseaux triphasés á reccord monophasés 85

ELECTROTEHNIQUE

V. NEDELCU — Une nouvelle methode pour la deduction des equations generales de fonctionnements de la machine synchrone 113

E. POTOLEA — Une methode pour la determination des reactances syndrones de la machine aux poles saillants 133

INHALT

MATHEMATIK

T. TĂNĂSESCU — Prinzipien und Schemen für einige neue Typen der Perspektographie 13

PHISIK

D. MOISIL — Spektroskopische untersuchung der oxydation dünner Kupferschichten 19

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

I. TEOREANU — Fragen über die Erhärling der Bindenuttel 27

ENERGETIK

C. DINCULESCU, A. ARIE, P. BUHUȘ, D. CRISTESCU — Das Laboratorium für elekrische Kraftwerke, Schaltwerke und Netze des Polytechnischen Instituts aus Bukarest 33

D. PAVEL — Analyse der hydraulischen Wirkungsgrade neuzeitlicher Kaplan-Propeller und Rohrturbinen . 53

P. MILITARU — Beitrag zur Berechnung dreiphasiger netze mit einphasigen Anschlüssen 85

ELECTROTECHNIK

V. NEDELCU — Eine neue Methode zur Ableitung allgemeiner Betriebsgleichungen von Synchronmoschinen. 113

E. POTOLEA — Eine originale methode für die gleichzeitige feststellung die der länge nach lanfenden und der länge nach lanfenden und der quer lanfenden reaktanzen der syncronischen maschine mit ausgeprägten pole 133

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 3

MATEMATICA

PRINCIPLES AND SCHEMES FOR SEVERAL NEW TYPES OF PERSPECTOGRAPHS *)

by AURELIAN TĂNĂSESCU

More and more investigators are studying the construction of devices which have the purpose to mechanise the graphical operations in perspective and descriptive geometry.

In this work we are refering to the realisation of some perspectographs-devices which mechanically construct the central perspective of the architectural objects or volumes on the panels of vertical perspectives.

In the first place we give priority to the perspective construction of the points situated on the horizontal plane surface, therefore giving first consideration to the problem of constructing the plane perspective of the considered object or volume.

The essential problem which we intend to resolve is the following:

The principles that stand at the fundamental base of the construction methods of the architectural volumes of the perspective plane surface can be includes in mechanical schemes of perspective devices?

In a former work we have shown that a perspectograph can be constructed taking as base Brunelleschi's principle to construct a perspective to a panel of profile perspective or certain vertical.

Now let us show how we can include in the schemes for new types of perspectographs several fundamental methods to construct the architectural volumes of perspective plane surfaces.

1. *The combination of the principle of the projection of profile at 45° of a point of sight to a principle straight line.* The perspective of point A of the horizontal plane surface is a, and that of the triangle ABE is evidently abc (fig. 1).

Let P to be the principle point, ω the horizontal projection of the point of sight and Ω_1, the projection of the profile at 45° of the point of sight.

The scheme of this perspectograph contains eight mobile elements numered from 1—8. Thus, noting by m the numbers of mobile elements we have $m=8$.

*) Paper presented at the scientifical session of the Polytechnical Institute, Bucarest, (7—8 april 1962).

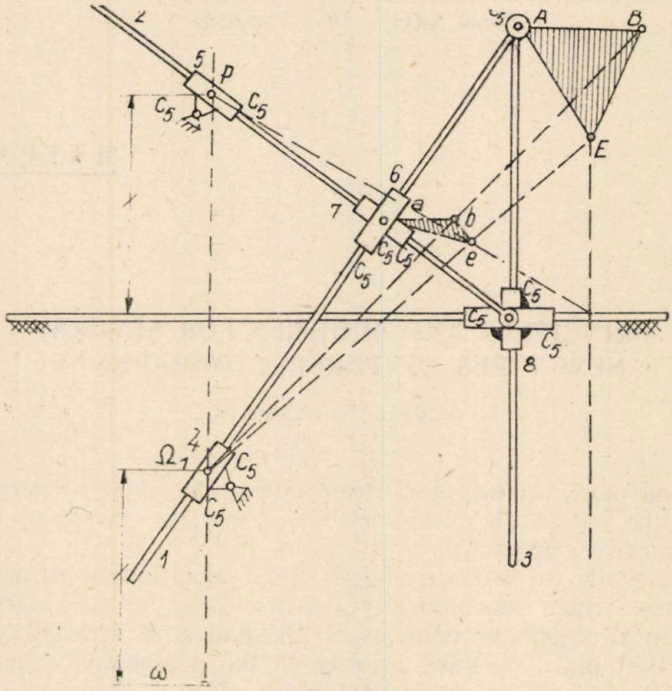


Fig. 1

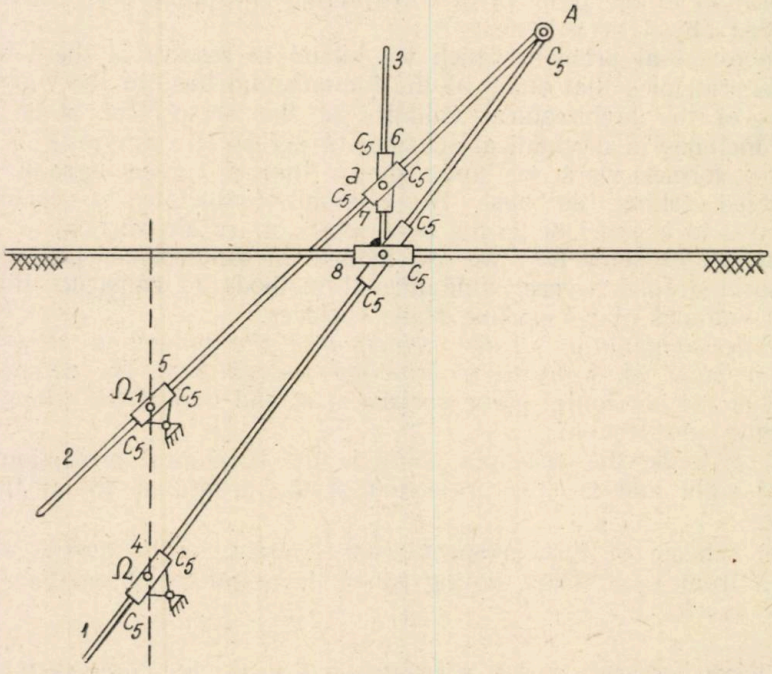


Fig. 2

This scheme also contains 11 couples of class five, which we will note by C_5 which are the rotation and translation couples. Thus we have $C_5=11$.

Considering the degres of mobility M of the mechanism according to the Cabîşev formula, we have

$$M=3m-2C_5=24-22=2.$$

To obtain $M=1$, we observe that point A describes the considered volume plane surface thus we have a relation $y=f(x)$ an equation in

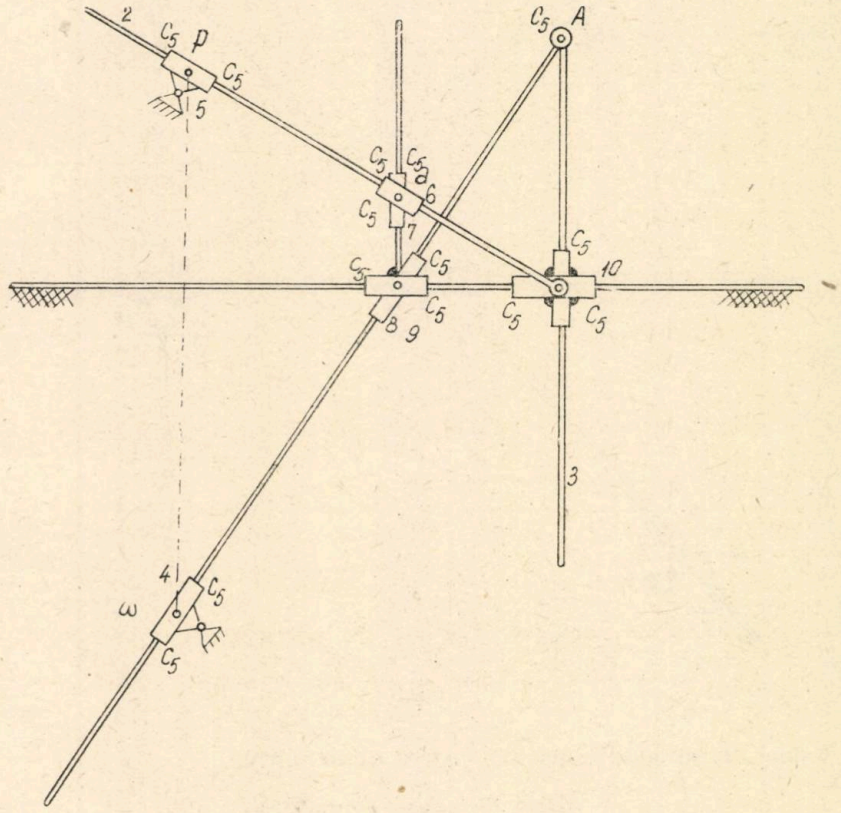


Fig. 3

which we are not interested, but, which reduces by one unit the degree of mobility.

Under these considerations the perspectograph functions as a mechanism utilising inferior couples of class five only.

2. *The principle projection of profile at 45° of the point of sight.* The scheme of the perspectograph based on this principle (*fig. 2*) is equivalent with the one formerly obtained.

We have $m=8, C_5=11$, thus the degree of mobility $M=2$ which becomes $M=1$ on the base of the relation that $y=f(x)$.

3. *The principle of the point of sight and that of the main point.* The scheme of the perspectograph based on the principle (fig. 3) contains 10 mobile elements and 14 couples class five.

Thus $m=10$ and $C_5=14$.

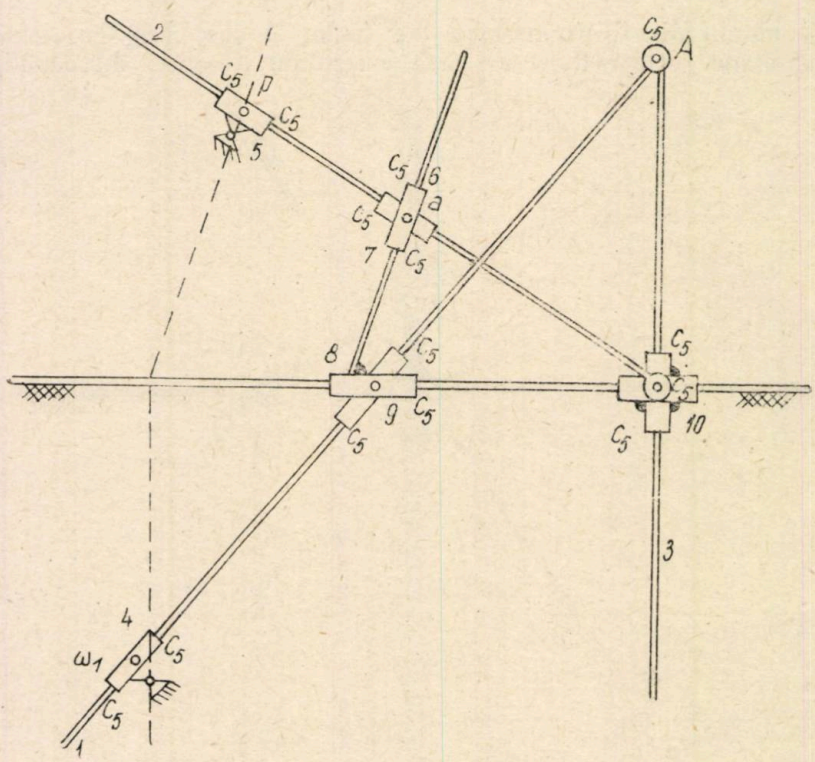


Fig. 4

Under these conditions the degree of mobility.

$$M=3\ m-2C_5=30-28=2.$$

We reduce to $M=1$ the degree of mobility on the basis of the relation $y=f(x)$, which represents the equation described by point A.

4. *The combination of the principle of the neutral auxiliary centre of projection to a main straight line.* The scheme of this perspectograph is equivalent with that of point 3. It also contains 10 mobil elements and 14 couples class five. Thus $m = 10$; $C_5 = 14$.

The degres of mobility is $M = 2$ and will reduce to $M = 1$ on the basis of the same observations referring to the funciton $y=f(x)$.

Of all these four schemes I have effectively constructed the device corresponding to fig. 1.

Considering different fixed positions for P and Ω_1 opposite the vertical ωP, we obtain the perspective in which we can modif the height of the horizon and the position of the point of sight.

As to the placing in height and in perspective of the considered volume we can generally utilise the mobile element numbered by number 3 which we pick out as the grade scale of the heights.

On the basis of this observation, we can adopt different systems of placing in the height and in the perspective the points of the considered volume.

The polytechnical Institute of Bucharest
Descriptive Geometry Chair

ПРИНЦИПЫ И СХЕМЫ НОВЫХ ТИПОВ ПЕРСПЕКТОГРАФА

(Резюме)

В настоящей работе приводятся новые принципы и схемы для сооружения перспектографов — аппаратов выполняющих конструкцию центральных перспектив архитектурных предметов или объемов на вертикальных перспективных картинах.

PRINCIPLES AND SCHEMES FOR SEVERAL NEW TYPES OF PERSPECTOGRAPHS

(Summary)

In this work several new principles and schemes are studied for the realisation of some perspectographs — devices which construct the central perspectives of the architectural objects and volumes on the panels of vertical perspective.

PRINCIPES ET SCHÈMES POUR QUELQUES NOUVEAUX TYPES DES PERSPECTOGRAPHS

(Résumé)

Dans cet ouvrage l'auteur propose quelques nouveaux appareils perspecteurs basées sur quelques nouveaux principes et schèmes.

On peut construire avec ces appareils les perspectives centrales d'un objet sur des tableaux perspectifs verticales.

PRINZIPIEN UND SCHEMEN FÜR EINIGE NEUE TYPEN DER PERSPEKTOGRAPHIE

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden einige neue Prinzipien und Schemen für die Konstruktion von Perspektographen angegeben.

Diese Aparate gestatten die Konstruktion von zentralen Perspektiven verschiedener Gegenstände der Arhitektur auf vertikalen Perspektivtafeln.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 3

FIZICA

ÉTUDE SPECTROSCOPIQUE SUR L'OXIDATION DES COUCHES MINCES DE CUIVRE

DIANA MOISIL

Introduction

L'étude du changement des propriétés optiques des surfaces métalliques, en cours d'oxidation, fournit d'intéressantes informations sur les modifications subies par les métaux durant ce phénomène.

On sait, depuis longtemps, que la plupart des métaux, chauffés à l'air, se couvrent d'une couche d'oxyde, dont la couleur change, au fur et à mesure que l'épaisseur de cette couche grossit. Ces couleurs sont dues à l'interférence de la lumière dans la couche d'oxyde. La succession des couleurs que l'on constate n'est donc pas une propriété particulière à l'oxyde. Les nuances de ces couleurs peuvent d'ailleurs varier d'un métal à l'autre, selon la sélectivité de l'absorption de la lumière dans la couche d'oxyde, et selon la couleur du métal non oxydé sous-jacent.

D'après Evans [1], l'apparition des couleurs d'interférence, de même que leurs succession peut être expliquées de façon suivante : à chaque épaisseur de la couche correspond une longueur d'onde pour laquelle on obtient l'extinction, par l'interférence des ondes réfléchies sur les surfaces air-oxyde et oxyde-métal ; de ce fait il résulte qu'en lumière blanche, l'échantillon prendra la couleur complémentaire à la couleur éteinte.

L'étude de l'oxydation du cuivre massif à l'aide des mesures optiques a été entrepris d'abord par Constable [2]. Récemment, Vratny et Koklas [3] on observé, dans le spectre de réflexion diffuse, l'existence d'un minimum, qui se deplace vers des longueurs d'ondes plus grandes, à mesure que l'oxydation avance.

Dans un travail antérieur [4], nous avons attiré l'attention sur la différence sensible qui existe entre l'émissivité du cuivre massif oxydé et l'émissivité des couches minces de cuivre oxydé. Comme suite il nous a parut intéressant d'étudier les spectres de réflexion des couches minces de cuivre, à divers degrés d'oxydation et de comparer les résultats à ceux obtenus pour le cuivre massif par les auteurs mentionnés.

Nous nous proposons d'étudier, dans le présent travail, le domaine visible du spectre de réflexion des couches minces de cuivre d'épaisseur comprise entre 200 à 1200 Å, oxydées à l'air, à divers températures.

Partie expérimentale.

Les couches minces ont été obtenues, par l'évaporation du métal sous vide, sur des lames de verre maintenues à la température ambiante. On a utilisé, à cet effet, une installation Tesla, permettant d'effectuer la métallisation sous vide, à une pression qui peut aller jusqu'á 10^{-6} mm Hg. Au cours de la vaporisation, la pression fut maintenue entre 2.10^{-5} et 3.10^{-5} mm Hg. L'intensité du courant dans la spirale de tungstène du four électrique était de 18 a 20 A. La projection a été effectuée simultanément sur des lames de verre réctangulaires de $7,5 \times 2,5$ cm. (lames porte-objet utilisées en microscopie) et un disque de verre de 5 cm. diamètre. Les couches minces de cuivre ont étét etalées sur des lames rectangulaires, afin d'obtenir sur le même echantillion, la gamme entière des couleurs de l'oxyde, lorsque l'on applique le long des lames un gradient de température. Les disques ont été utilisés pour la détermination de l'épaisseur des couches minces, à l'aide d'un dispositif interférométrique à franges d'égale épaisseur [5].

L'oxydation des couches minces déposées sur les lames de verre rectangulaire fût obtenue par le chauffage à l'air dans un four électrique. Les lames furent disposées verticalement dans le four, afin d'etre soumises à l'action d'un gradient de température. Grâce a cette disposition des lames, il est possible d'obtenir sur le même echantillion, trois ou quatre couleurs d'oxydation. L'oxydation devient visible à 160°C, la couche étant complétement oxydée à 220°C. A cette température — inférieure à 240°C — c'est l'oxyde Cu_2O qui se produit [6]. L'accroissement de la température fût de 10°C par minute.

Les spectres de réflexion spéculaire ont été obtenus avec un spectrographe Zeiss, à vision directe, ayant l'optique en verre. Les plaques photographiques ont été éxplorées à l'aide d'un microphotomètre. On a effectué également des mesures visuelles de la réflexion difusse en utilisant un photomètre Pulfrich.

Résultats.

Le phénomène d'oxydation devient perceptible, dès que la couleur de la couche mince vire vers or-rougeâtre. Au fur et à mesure que l'oxydation avance, la couleur de la couche devient : pourpre, violette, ensuite bleue, argent, et, à la fin, jaune. Si l'épaisseur de la couche dépasse 1000 Å, la couleur finale est jaune-brune ; pour une épaisseur comprise entre 500 Å et 900 Å, la couleur finale est jaune ; enfin pour les couches très minces, dont l'épaisseur est inférieure à 200 Å, la couleur finale est argent-jaunâtre.

Afin de comparer les résultats obtenus, à ceux de Vratny et Koklas, nous avons d'abord déterminé visuellement la réflexion diffuse des couches d'oxyde. Les résultats sont présentés sur la figure 1, où les divers courbes

correspondent aux couleurs comme il s'en suit : 1 — cuivre non oxydé, 2— or-rougeâtre, 3— violette, 4— bleue, 5— jaune, 6— jaune-brune. Sur un intérvalle de longeurs d'ondes d'environ 200 Å, on constate que la réflexion présente un minimum. Quoique la position de ces minimums ne soit pas sufisamment définie elle est sans doute déplacée vers des longueurs d'onde plus grandes, par rapport à la position des minimums constatés par Vratny et Koklas, pour le cuivre massif.

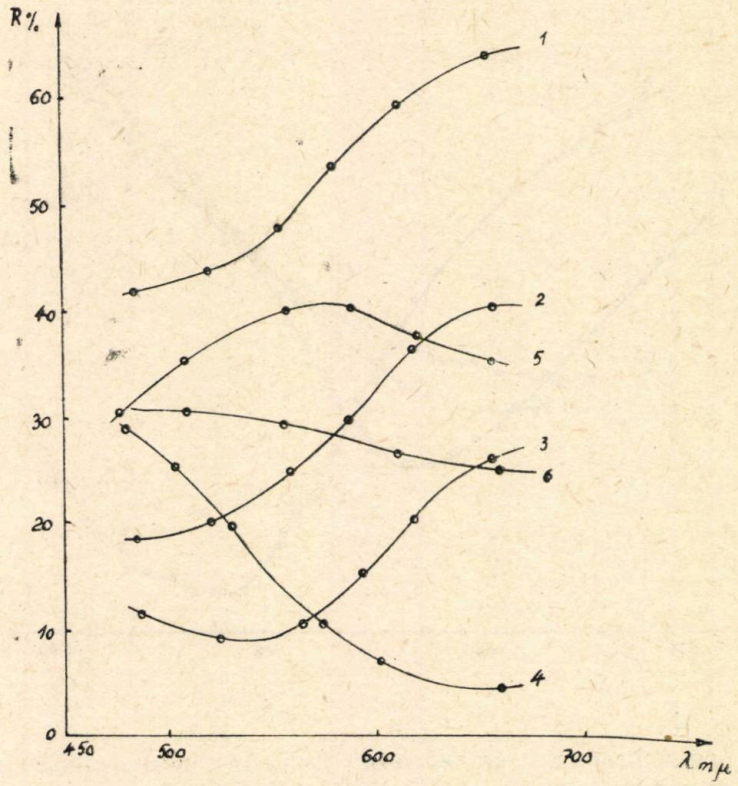


Fig. 1

L'étude spectrophotographique de la lumière reflétée, nous a conduit à des résultats plus précis. La figure 2 représente les courbes obtenues pour un echantillion dont l'épaisseur de la couches mince de cuivre non-oxydé était au moment initial de l'éxpérience de 840 Å (1— cuivre non-oxydé, 2— pourpre, 3— violet, 4— bleu). Pour la couleur violette, le minimum corresponde à la longueure d'onde de 575 mμ, tandis que pour la couleur bleue, le minimum est situé à 610 mμ. Vratny et Koklas ont trouvé pour la réflexion sur le cuivre massif de minimums situés vers 550 mμ et vers 580 mμ

L'enregistrement photographique étant effectué sur des plaques Isopan I.S.S., sensibles pour les régions jaunes et rouges du spectre, nous n'avons pas eu la possibilité de saisir la position des minimums pour les autres couleurs. Toutefois, nous estimons que les résultats obtenus pour les couleurs violette et bleue, associés aux résultats des observations visuelles, sont suffisants pour en tirer des conclusions. Les temps de pose

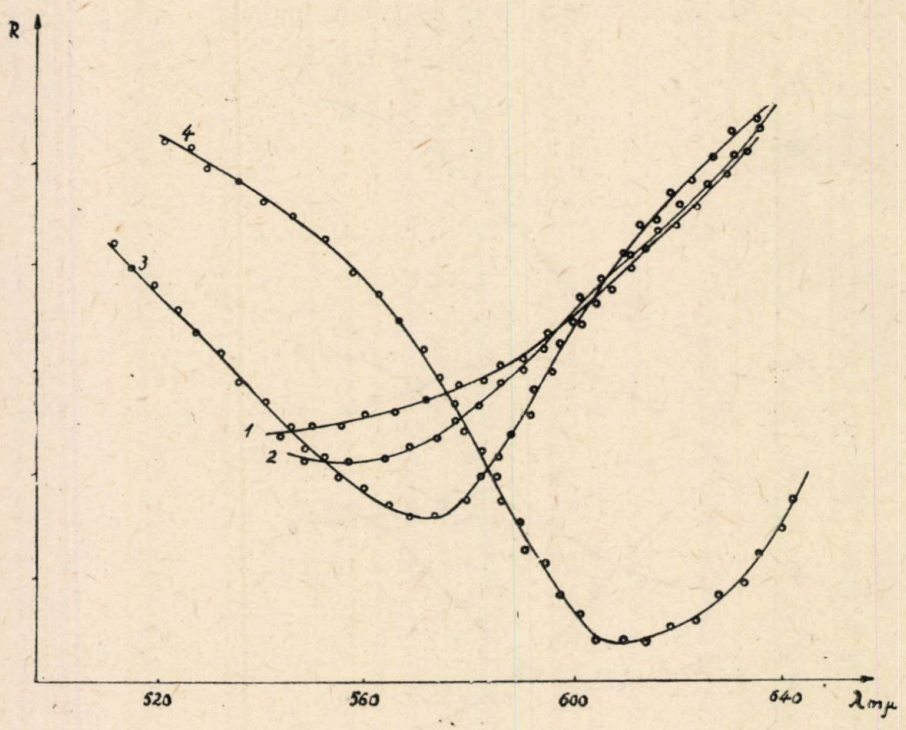


Fig. 2

de divers spectrogrammes ont été assez différents, afin d'obtenir dans la région du minimum la meilleure impression de la plaque photographique ; les résultats gardent pourtant leur valeur qualitative toute entière.

Nous avons constaté aussi, que les couleurs devient plus estompées si l'épaisseur de la couche decroît, et que, en même temps, le minimum de la réflexion devient moins aigu. Sur la figure 3 est présenté la variation de la profondeur du minimum en fonction de l'épaisseur de la couche, pour la couleur violette (1— épaisseur 550 Å, 2— 650 Å, 3— 850 Å, 4— 1150 Å).

Au fur et à mesure que l'épaisseur de la couche d'oxyde augmente, la transparence de la couche change aussi, ce qui fait que la couleur vire de vert au jaune. En même temps, la couleur de la lumière réfléchie sur la surface verre-couche mince, passe de la nuance caractéristique du

cuivre, à un jaune très brilliant. Ni cette réflexion, ni la transmission de la lumière, ne présente pas un spectre intéressant, la composition spectrale restant invariable pour les diverses couleurs d'oxydation. Les mesures effectuées, montrent que l'absorption de la lumière visible dans la couche d'oxyde de cuivre, est pratiquement non-sélective si l'épaisseur de la couche est inférieure à 1000 Å.

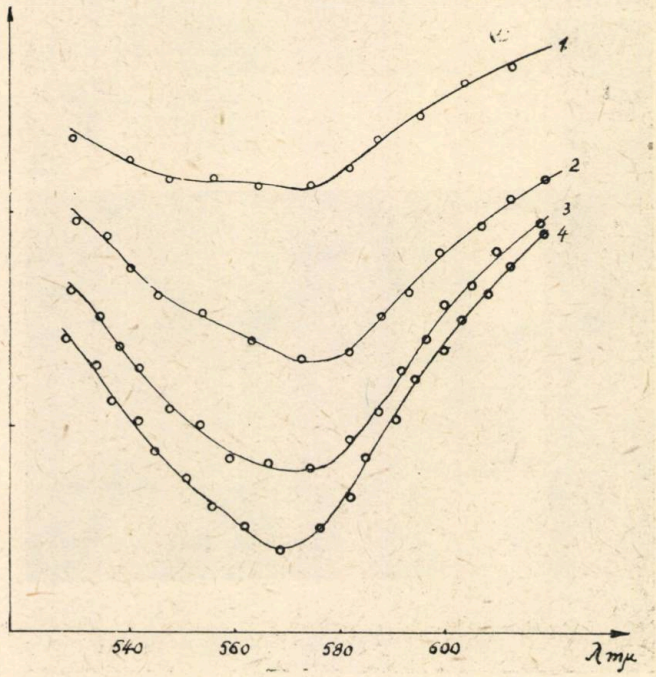


Fig. 3

Conclusion

Les écarts entre les résultats mentionés dans la litérature pour l'oxydation du cuivre massif, et les résultats que nous venons de présenter, montrent, une fois de plus, que les propriétés du corps solide en couches minces ne s'identifient point avec les propriétés du corps solide massif.

Le saut de phase qui accompagne la réflexion et qui depend non seulement de la longueur d'onde, mais aussi de l'épaisseur de la couche sur laquelle la réflexion se produit [7], constitue la cause principale de ces écarts. Un autre facteur qui détermine le déplacement des minimums, est à chercher dans la contribution de la couche de cuivre métallique, à la composition spectrale de la lumière qu'elle reflète. Lorsque l'épaisseur de la couche mince de cuivre grossit, la partie rouge de la lumière reflétée, devenant plus importante, il y a une légère déformation de la courbe R (λ).

Divers auteurs [2], [8] ont déterminé l'épaisseur de la couche d'oxyde, en mesurant la longueur d'onde pour laquelle se produit le minimum de

la réflexion. Toutefois, ces auteurs n'ont pas tenu compte du saut de phase sur la surface oxyde-metal. Des résultats plus précis ont été obtenus par Winterbottom [9], qui en a tenu compte. La méthode de Winterbottom reste quand même une méthode approximative, en tant qu'on n'utilise pas pour

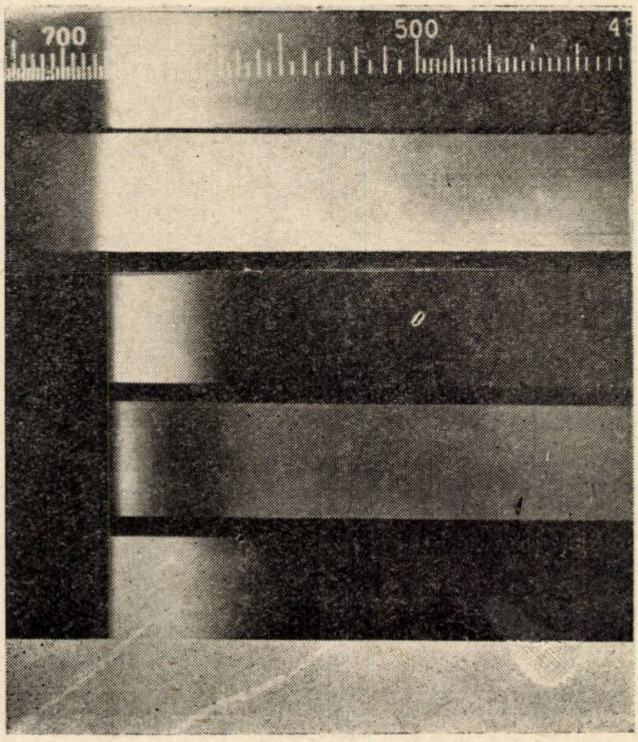


Fig. 4
1 échelle de repère étalonnée en mμ
2 spectre de la lumière non reflétée
3 spectre de la lumière reflétée sur une couche mince oxydée de couleur violette
4 idem, de couleur bleue
5 idem, légèrement oxydée, de couleur or-rougeâtre

l'indice de réfraction de l'oxyde la valeur correcte qui est fonction non seulement de l'épaisseur de la couche, mais aussi de la longuer d'onde.

Afin de déterminer tous les inconnues du problème, à savoir : l'indice de réfraction, le saut de phase et l'épaisseur de la couche d'oxyde, il faudra effectuer de mesures sous plusieurs angles d'incidence.

Nous nous proposons dans un prochain travail, de déterminer simultanément par cette méthode, toutes ces grandeurs qui caractérisent du point de vue optique, l'oxyde formé sur les couches de cuivre.

Institut Polytechnique de Bucarest
Chaire de Physique

BIBLIOGRAPHIE.

1. *U. R. Evans.* — The corrosion and oxydation of metalls. Arnold 1960, London.

2. *E. H. Constable.* — Proc. Roy. Soc. (A) *125* (1930), p. 630.

3. *Vratny et Koklas.* — J.O.S.A. juin (1961), p. 644.

4. *Ion Agarbiceanu, Ana Boiangiu, Diana Eitel.* — Com. Ac. R.P.R. *11* nr. 12 (1961), p. 1423.

5. *O. S. Heavens.* — Optical properties of thin solid film. London 1955.

6. *A. Goswami et Y. N. Trehan.* — Trans. of the Faraday Soc. *52* (3) nr. 399 (1956), p. 358.

7. *R. Philipp.* — Ann. de Physique B *5* (1960), p. 805.

8. *G. Tammann.* — Z. anorg. Chem. *148* (1925), p. 297 et 156 (1926), p. 261.

9. *A. B. Wintterbottom.* — Appendice à l'ouvrage „Metallic corrosion, passivity and protection" par U. R. Evans, London 1948.

СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ В СВЯЗИ С ОКИСЛЕНИЕМ ТОНКИХ СЛОЕВ МЕДИ

(Резюме)

В работе представлены результаты полученные при исследовании отражения света различной длины волны, от тонких слоев меди различной степени окисления.

Сравниваются результаты этой работы с литературными данными об отражении от массивной окисленной меди, и указаны главные факторы определяющие изменение положения минимума отражения для тонких слоев.

SPECTROSCOPIC STUDY OF COPPER THIN LAYERS OXIDATION.

(Summary)

The paper gives the results obtained by researches upon the light reflexion on copper thin layers in various stages of oxidation.

These results are compared with those mentioned in the litterature regarding the compact copper, and are shown the principal factors contributing to the position displacement of the reflexion minimums towards the bigger waves length in the thin layers case.

ÉTUDE SPECTROSCOPIQUE SUR L'OXYDATION DES COUCHES MINCES DE CUIVRE.

(Résumé)

On donne les résultats obtenus à la suite des recherches faites sur la réflexion de la lumière de différentes longueur d'onde, sur des couches minces de cuivre à l'état de différents degrés d'oxydation.

On compare les résultats obtenus à ceux donnés par la littérature concernant l'oxydation du cuivre à l'état massif ; on met en évidence les principaux facteurs auxquels on doit attribuer le changement dans la position des minimums de la réflexion pour les couches minces.

SPEKTROSKOPISCHE UNTERSUCHUNG DER OXYDATION DÜNNER KUPFERSCHICHTEN.

(Zusammenfassung)

Die Arbeit enthält die Messergebnisse über die Lichtreflexion an dünnen Kupferschichten in verschiedenen Oxydationsstadien.

Die erhaltenen Resultate werden mit den aus der Literatur bekannten Daten über die Oxydation von massivem Kupfer verglichen. Die hauptsächlichen Faktoren, die zur Verschiebung der Reflexionsminima bei dünnen Schichten beitragen, werden diskutiert.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 3

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

CONSIDERATIONS ABOUT THE HARDENING OF BINDING MATTER.

by I. TEOREANU

I. The mechanism of the hardening process of inorganic binding matter was studied by numerous research workers [1—10]. Various theories were developed [1, 2, 4, 7]. Recent investigations lead to the following representation of this process [7]: the chemical constituent of binding matter (abridged as b.m.) disolves in water yielding a hydrate; the solution becomes saturated in the b.m. and supersaturated in the hydrate, therefore the latter crystallizes from the solution under the form of finely dispersed crystals which grow in time and give rise to a crystalline aggregate whose strength progressively increases. As the hydrate separates from the solution, new amounts of b.m. dissolve, and the process may continue till all the b.m. is converted into the crystalline hydrate.

The knowledge of the hardening mechanism of b.m. gives the possibility to influence actively the process. A rational employement of accelerators and retarders of setting and hardening can only be made on the basis of detailed informations about the mechanism of these processes. The setting and hardening can be accelerated by acting on the step which proceeds with the smallest rate; they can be retarded by acting on any

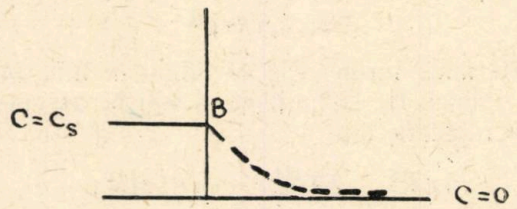


Fig. 1

step provided that its rate becomes smaller than that of the previously rate-determining step. In these conditions the process can be directed so that it can be determined either by the dissolution of the b.m. in water, or by the chemical hydration process, or by the crystallisation of the new formations.

II. We will examine the case when the dissolution of b.m. has the smallest rate. In this case, in the diffusion layer, all dissolved b.m. is

hydrated. The concentration on the surface of particles b.m. corresponds to the saturation. Therefore the process takes place according to the scheme presented in fig. 1.

In the layer under consideration, since the diffusion is accompanied by a chemical recation, the variation of the number of moles removed by diffusion equals the number of moles reacted, at which the number of moles accumulated in time is being added. As a first evaluation, let us consider in this note, the dissolution rate by the valuable expression, after the stationary regim has been quasirealized. We will write afterwards :

$$\frac{dN}{dx} = k' cn \tag{1}$$

Since

$$N = D\frac{dc}{dx} \tag{2}$$

it follows that

$$D\frac{d^2c}{dx^2} = k' cn\,. \tag{3}$$

However, the concentration of water greatly exceds the concentration of dissolved b.m., hence

$$D\frac{d^2c}{dx^2} \approx kc\,. \tag{4}$$

Integrating equation (4) :

$$c = c_s e^{-\sqrt{\frac{k}{D}}x} \tag{5}$$

From *eq* (5), it follows that the rate of dissolution is

$$N = c_s D^{1/2} k^{1/2} \tag{6}$$

In order to determine further the variation in time of the dimensions of b.m. particles — which for simplification will be assumed as spheres — one starts from the relations hip

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R_i^3}{3} - \frac{4\pi R^2 MN\tau}{\gamma_s} \tag{7}$$

which after several transformations leads to

$$R_i\left(\frac{R_i}{R}\right)^2 - R = \varphi\tau \tag{8}$$

where

$$\varphi = 3\,c_s D^{1/2} k^{1/2}\frac{M}{\gamma_s}\,.$$

Considering for the parameter φ values of the magnitude order 10^{-2}—10^{-4} mm/s, graphic representation of relationship (11) leads to the families of curves represented in fig. 2 *).

An analysis of the expressions devised affords several useful conclusion about the way in which the various factors are influencing the hardening process — within the field we are referring to.

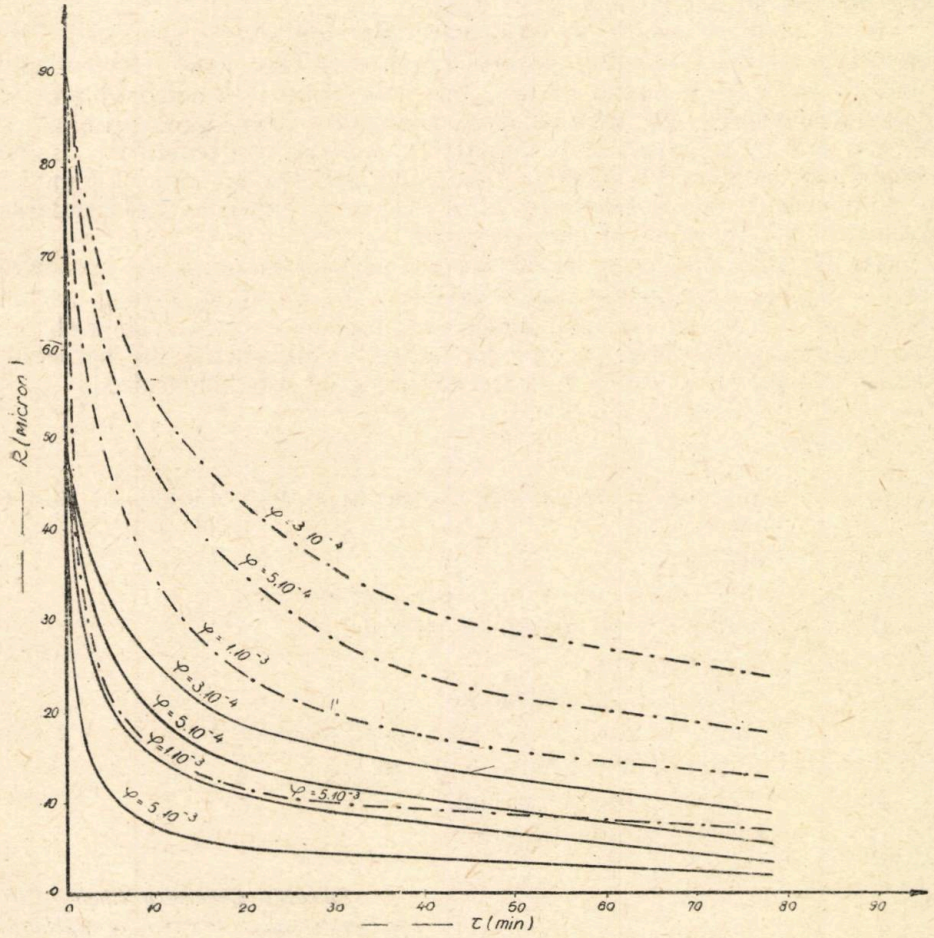


Fig. 2

Thus it is evident that for a given b.m., the rate of the hardening process is essentially determined — in the field under examination — by the value of the saturation concentration and of the diffusion coefficient of the b.m., in the given conditions, by the rate constant of the hydration

*) —.—.—. for Ri = 9 · 10-² mm.
_____ for Ri = 5 · 10-² mm.

process, and to a large extent by the fineness of grinding. The action of external factors on the process of dissolution of b.m., without considering the fineness of its grinding, can undoubtedly fail to secure the desired effects on the rate of hardening. With a high fineness of grinding, even in case the rate of dissolution is small, most of the material contained in the b.m. particles under goes conversion, during the hardening process, in a relatively short time.

It is also necessary to emphasize the important conclusion that copmletion of the hardening process requires a very long (theoretically infinite) time. As a matter of fact, this conclusion is verified in practice in many instances. By adequately choosing the fineness of grinding of the b.m. and by influencing its dissolution rate one can obtain the desired compromise between the time of hardening and the amount of b.m. left in non-hydrated form. One can thus indirectly influence the formation kinetics of the structure of hardened b.m.

III. By analysing in the present note a particular case of the hardening process kinetic relationships were devised. The effect of various factors on this process — in the field under examination — was evidenced, and the importance of these factors for actively influencing the hardening process and the structure of the hardened material was emphasized.

Notations

N — number of moles that diffuse in a unit of time for unit of surface;
x — distance;
k', k — rate constants of the hydration process;
D — coefficient of molecular diffusion;
c, n — concentration;
c_s — saturation concentration;
R — radius of particle of b.m. a given moment;
R_i — initial radius of particle of b.m.;
M — molecular weight of b.m.;
γ_s — specific weight of b.m;
τ — time.

Silicats's Chemistry Chair
The polytechnical Institute of Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. *H. Le Chatelier.* — „Les mortiers hydrauliques" Paris (1904) — in W. Eitel „Fizicescaia himia silicatov", izd. Inostrannoi Literaturî, Moscova (1962).
2. *W. Michaelis.* — „The hardening process of the calcareous hydraulic binding materials" Dresden (1909) in W. Eitel „Fizicescaia himia silicatov", ed. Inostrannoi Literaturî, Moscova (1962).

3. *P. P. Budnicov.* — „Sbornic naucino — isledovatelskih rabot po stroitelinîm materialam" Promizd. (1947).

4. *A. A. Baicov* „Polnoe sobranie socinenii" vol. V izd. A. N. SSSR (1948).

5. *V. F. Juravlev.* — „Himiea viajuşcih veşcestv" Goshimizd. (1951).

6. *O. P. Mcelov.* — Petrosian — DAN — SSSR, 89, 137 (1953).

7. *E. E. Segalova, P. A. Rebinder.* — Stroitelinîe materialî, VI, nr. 7, 21 (1960).

8. *V. A. Gregorian, V. B. Ratinov.* — Stroitelinîe materialî, VI, nr. 9, 32 (1960).

9. *V. B. Ratinov, O. D. Cucereaev, G. G. Malentieva, S. M. Pimenova.* — DAN — SSSR, 136, 875 (1961).

10. *B. V. Ratinov, A. P. Lavut, S. M. Pimenova, I. A. Smirnova.* — „Novoe v himii i tehnologhii ţementa" — Vsesoiuznoe himiceskoe obşcestvo imeni „D. I. Mendeleeva" ţentralnoe pravlenie, Moscova, (1962).

К ВОПРОСУ ТВЕРДЕНИЯ ВЯЖУЩИХ ВЕЩЕСТВ

(Краткое содержание)

В настоящей статье, рассматривается частный случай твердения вяжущих веществ и устанавливаются соответствующие уравнения касаясь кинетики процесса.

CONSIDERATIONS ABOUT THE HARDENING OF BINDING MATTER.

(Summary)

The present note examines a particular case of the hardening process of binding matter, and establishes equations concerning the kinetics of this process.

CONSIDÉRATIONS SUR LE DURCISSEMENT DES LIANTS

(Résumé)

En cet article on examine un cas particulier du durcissement des liants et on établie des équations pour la cinétique de processus.

FRAGEN ÜBER DIE ERHÄRLING DER BINDENUTTEL

(Zusammenfassung)

In dieser arbeit wird Geprüft ein Sonderfall der Erhärtung der Bindenuttel und es werden festgehalten Gleichungen für die Kinetik des Processes.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 3

ENERGETICA

LABORATORUL DE CENTRALE, STAȚII ȘI SISTEME ELECTRICE DIN INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI *)

C. DINCULESCU, A. ARIE, P. BUHUȘ, D. CRISTESCU.

1. — Scopul laboratorului.

Laboratorul de Centrale, Stații și Sisteme Electrice realizat în Institutul Politehnic București, este destinat pregătirii studenților din anii superiori de studii, din ramura energetică, în probleme de construcții și exploatare din partea electrică a centralelor și stațiilor și în probleme de funcționare a sistemelor electrice.

Laboratorul este folosit în principal pentru scopuri didactice, putînd fi utilizat în același timp și pentru lucrări cu caracter științific.

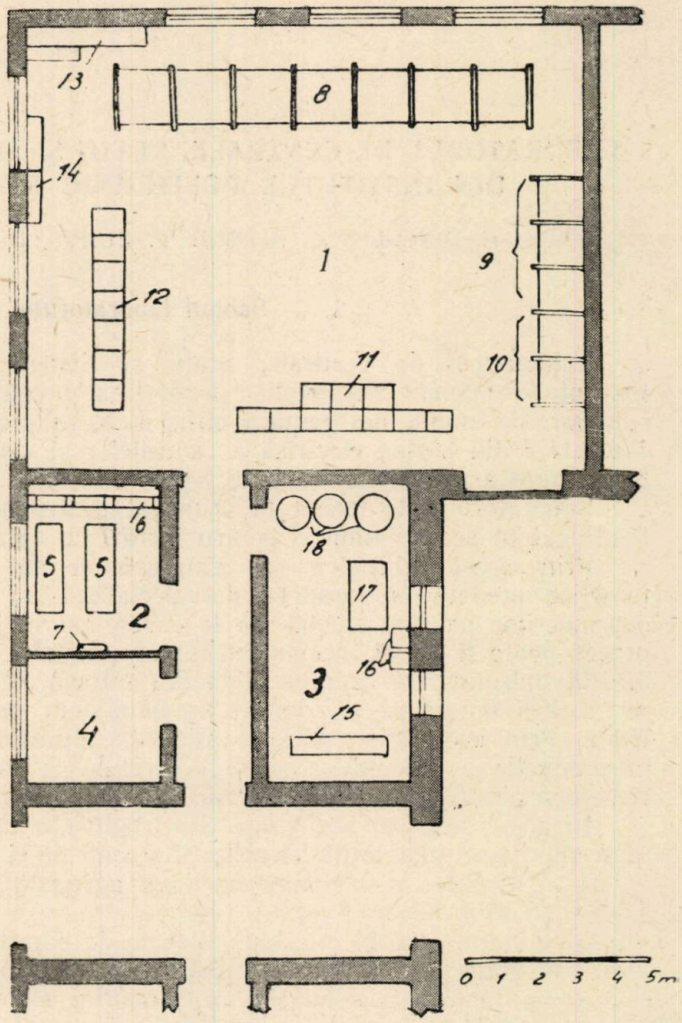
Prin acest laborator se urmărește a se concretiza cunoștințele teoretice predate la cursurile de specialitate și a se începe formarea deprinderilor pe care trebuie să le capete un inginer energetician. Acest proces poate fi astfel început în cursul ultimelor semestre de studii sub directa îndrumare a cadrelor didactice într-un laborator didactic în care se creează un cadru și condiții asemănătoare celor din practica industrială. Prin aceasta se mărește eficiența ultimelor perioade de practică în producție a studenților și se contribuie la scurtarea intervalului de trecere a absolvenților de la școlarizare la munca în producție.

În acest scop, în realizarea constructivă a laboratorului s-a urmărit să se reproducă instalațiile electrice din centrale și stații și anume (fig. 1):

— o încăpere a mașinilor cu două agregate motor-generator de cîte 25 kVA fiecare ;
— o stație de 6 kV cu două sisteme de bare colectoare ;
— o stație de 6 kV cu un sistem de bare colectoare ;
— un tablou de comandă cu panourile aferente ;
— un tablou de relee ;
— o cameră pentru servicii interne (instalații de aer comprimat, curent operativ continuu obținut prin redresori cu seleniu etc.).

*) Concepția laboratorului și coordonarea lucrărilor aparțin colectivului de autori, proiectele de execuție au fost întocmite de Institutul de Studii și Proiectări Energetice — arh. Ciortan Emil, ing. Negreanu Carol și ing. Neniță Eugen — iar cea mai mare parte din lucrările de construcție și montaj au fost realizate de Trustul de Construcții și Montaje Energetice. Laboratorul a fost pus în funcțiune în cursul anului 1961.

În plus, în laborator s-a realizat un model dinamic calitativ de sistem electric, compus din cele două surse proprii de tensiune, ce sînt gîndite să poată modela două centrale și o sursă de putere infinită, reprezentantă printr-un racord la rețeaua orașului București.



1. *Sala stațiilor, tablourilor și elementelor pentru modelarea liniilor.*
2. *Încăperea mașinilor.*
3. *Încăperea pentru servicii interne și consumatori.*
4. *Cameră de lucru.*
5. *Grupurile motor Schrage — generator.*
6. *Transformatori.*
7. *Telegrafele mașinilor.*
8. *Celulele stației A.*
9. *Celulele stației B.*
10. *Celulei stației C.*
11. *Tabloul de comandă.*
12. *Tabloul cu aparatura de protecție și automatizare.*
13. *Bobinele de inductanță pentru modelarea liniilor.*
14. *Dulapurile cu condensatori pentru modelarea liniilor lungi.*
15. *Tablou pentru alimentarea serviciilor interne.*
16. *Redresori cu seleniu.*
17. *Compresor.*
18. *Butelii pentru aer comprimat.*

Fig. 1. — Planul laboratorului.

Cele trei surse de putere pot debita prin patru secții de bare pe o rețea formată din patru linii, modelate prin inductanțe și capacități.

Schema electrică realizată este reprezentată în fig. 2. Schema permite realizarea mai multor variante de legături, între care citățm configurația din fig. 3.

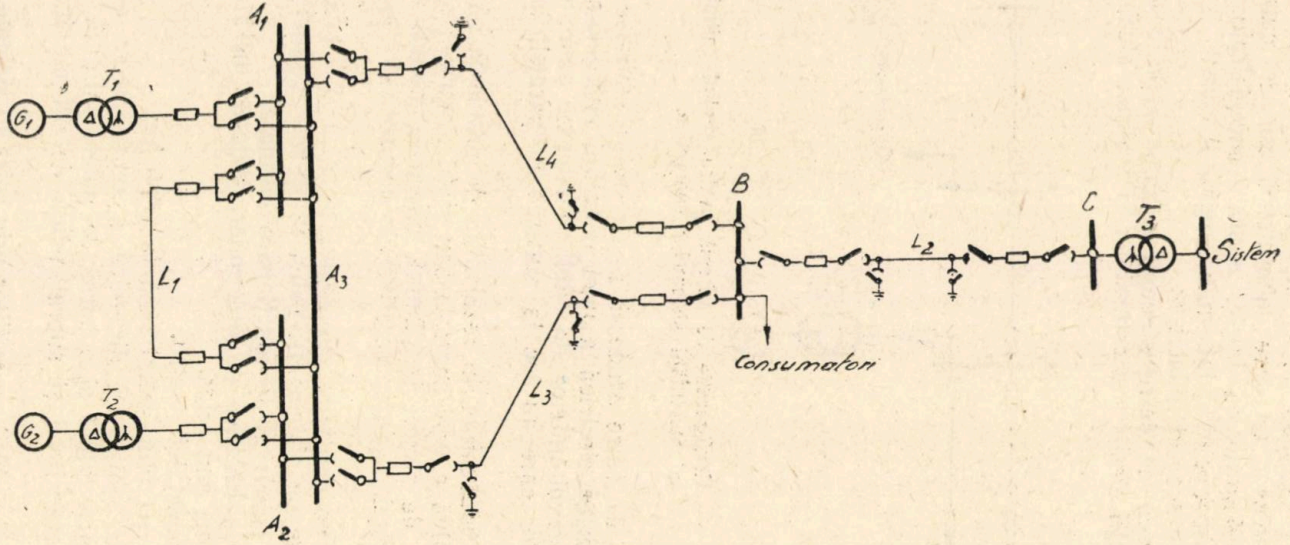


Fig. 2. — Schema electrică realizată în laborator.

Cu instalaţiile realizate şi cu aparatura de măsură şi punere în evidenţă a fenomenelor cu care laboratorul este în curs de echipare (osciloscoape, oscilografe cu bucle, aparate înregistratoare în diverse coordonate, stroboscoape etc.) laboratorul poate fi folosit — între altele — pentru următoarele scopuri didactice:

— Aprofundarea de către studenţi a unor aspecte constructive şi de montaj ale părţii electrice a centralelor şi staţiilor electrice.

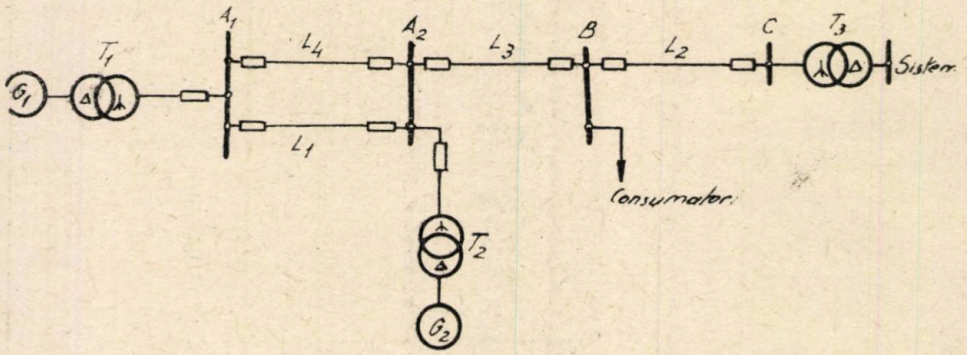


Fig. 3. — Configuraţie de schemă pentru studiul calitativ al stabilităţii sistemelor energetice.

— Exersarea de către studenţi a diverselor manevre uzuale ce se pot executa în partea electrică a unei instalaţii energetice: manevre de comutaţie, folosirea circuitelor de cuplă, studierea amănunţită a manevrelor şi proceselor care au loc la punerea în paralel, la autosincronizare etc.

— Exersarea studenţilor în rezolvarea de probleme pe care le ridică conducerea operativă a unei centrale sau staţii electrice: studii de scurtcircuite, detectări de puneri la pământ, diferitele moduri de reglare ale tensiunii şi frecvenţei, reglaje operative ale dispozitivelor de protecţie prin relee etc.

— Folosind posibilităţile modelului realizat în laborator se pot studia şi probleme de sistem energetic, între care citãm:

a) Regimuri simetrice de funcţionare normală.

b) Regimuri nesimetrice de funcţionare datorită nesimetriilor provocate de consumatori sau reţea.

c) Tratarea punctului neutru.

d) Fenomene pe liniii lungi pînă la 1000 km.

e) Stabilitatea statică şi dinamică a unui sistem energetic avînd două surse de putere finită şi o sursă de putere infinită.

f) Regimuri tranzitorii şi supratensiuni de origine internă în sistemele electrice.

g) Studiul comportării protecţiilor prin relee în sisteme electrice.

h) Studiul influenţei reglajelor automate asupra funcţionării sistemelor electrice.

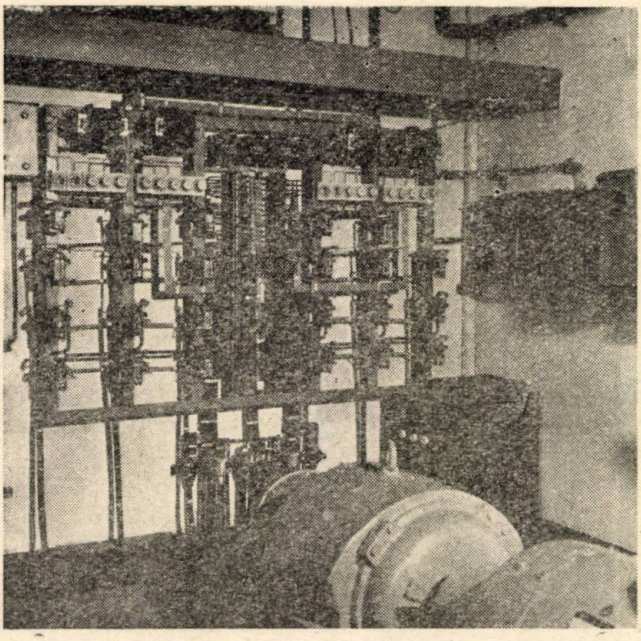


Fig. 4. — Vedere din încăperea mașinilor.

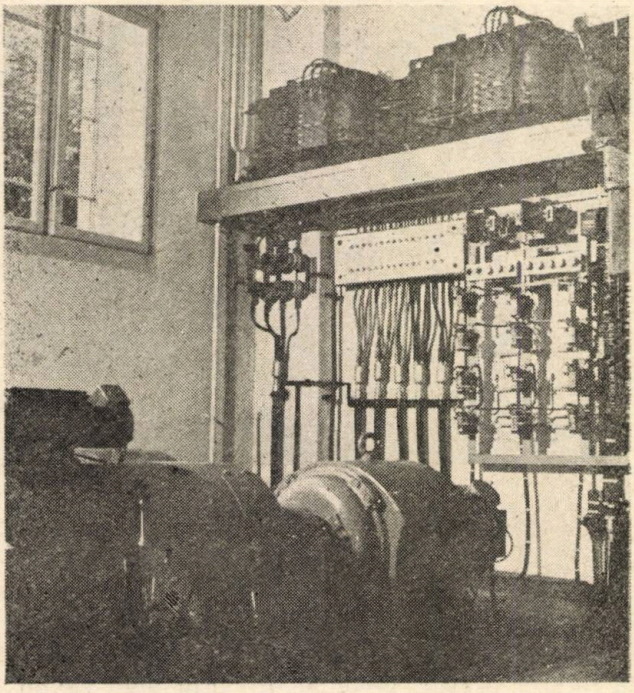


Fig. 5. — Vedere din încăperea mașinilor.

2. — Realizarea constructivă a instalațiilor din laborator.

În realizarea constructivă s-au întîmpinat dificultăți datorită spațiului restrîns de care s-a dispus. Acest lucru a condiționat multe din soluțiile constructive printre care și cele adoptate pentru încăperea mașinilor (fig. 4 și fig. 5).

În spațiul existent, mașinile au fost dispuse în ordinea fluxului de energie. Cei trei transformatori uscați au fost montați, pe o traversă metalică, la o înălțime de doi metri. Pe trei din pereții încăperii s-au prevăzut grupat telegrafele mașinilor, comanda celor două motoare care antrenează generatorii, respectiv reductorii de măsură ai celor două blocuri și reductorii de pe neutrele transformatorilor.

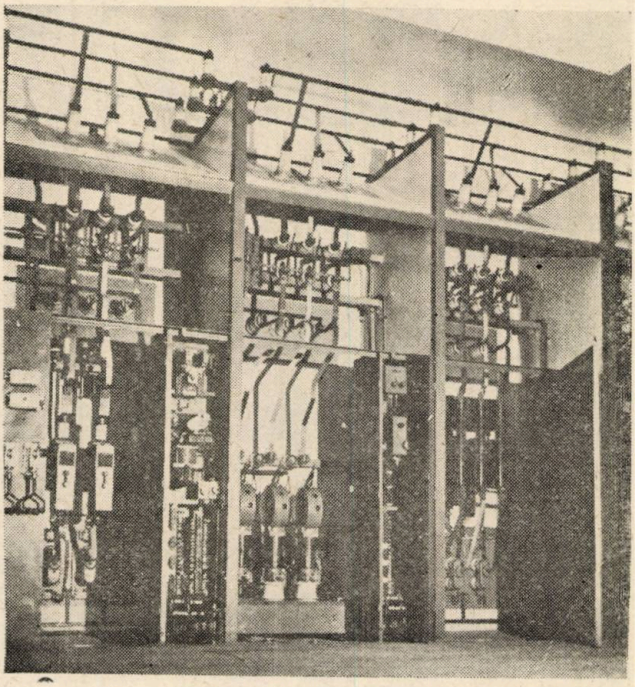


Fig. 6. — Celule din stația *A* cu bare colectoare duble.

De-alungul perimetrului sălii principale a laboratorului s-au prevăzut grupat cele două tipuri de stații de înaltă tensiune, tabloul de comandă și tabloul cu panourile de protecție și automatizare.

Gruparea tuturor acestor funcțiuni în jurul unui spațiu central diferă de soluțiile obișnuite din practica industrială unde stațiile și tablourile

se amplasează în încăperi diferite. În cazul de față s-a urmărit scopul didactic și prin această grupare s-au obținut rezultate bune atît în calitatea cît și în economia de timp a lucrărilor cu studenții.

Stațiile de 6 kV au fost realizate în sistem celular, pe un singur nivel, cu pereții din beton.

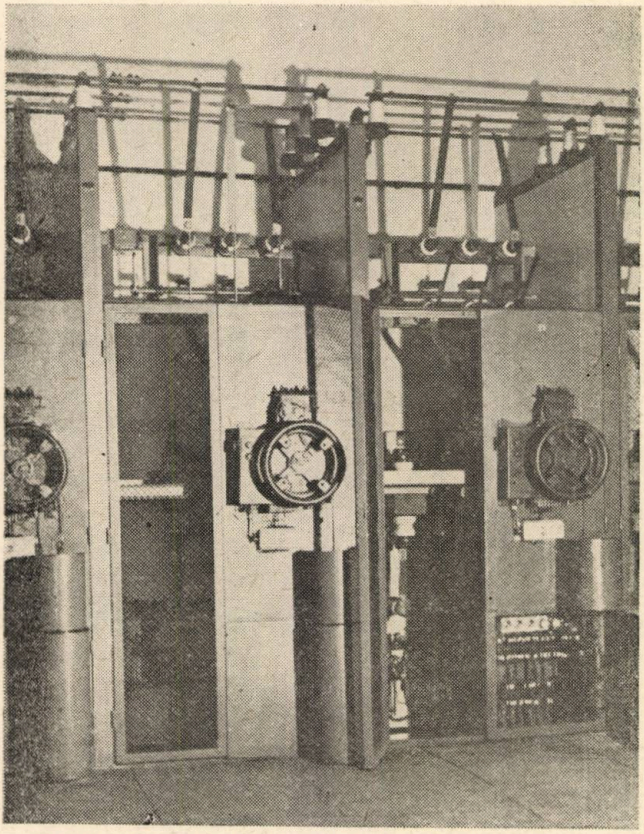


Fig. 7. — Celule din stațiile *B* și *C* cu bare colectoare simple.

O vedere de celule din stația *A* cu bare colectoare duble este dată în fig. 6, iar în fig. 7 se prezintă o vedere de celule din stațiile *B* și *C* cu bare colectoare simple.

Celulele s-au echipat cu aparate de tipuri constructive cît mai diverse: întreruptori cu ulei mult, ulei puțin, expansin, aer comprimat, dispozitive de acționare manuale, solenoidale, cu contra-greutate și cu aer comprimat etc.

Prin aceasta s-a urmărit ca viitorul inginer să ia cunoștință cel puțin în parte cu diversitatea aparatajului cu care va lucra apoi în practică și cu diversitatea problemelor pe care le poate ridica acest aparataj.

Stațiile sînt echipate pentru tensiunea de 6 kV, dar din motive de securitate se lucrează numai la tensiunea de 400 V.

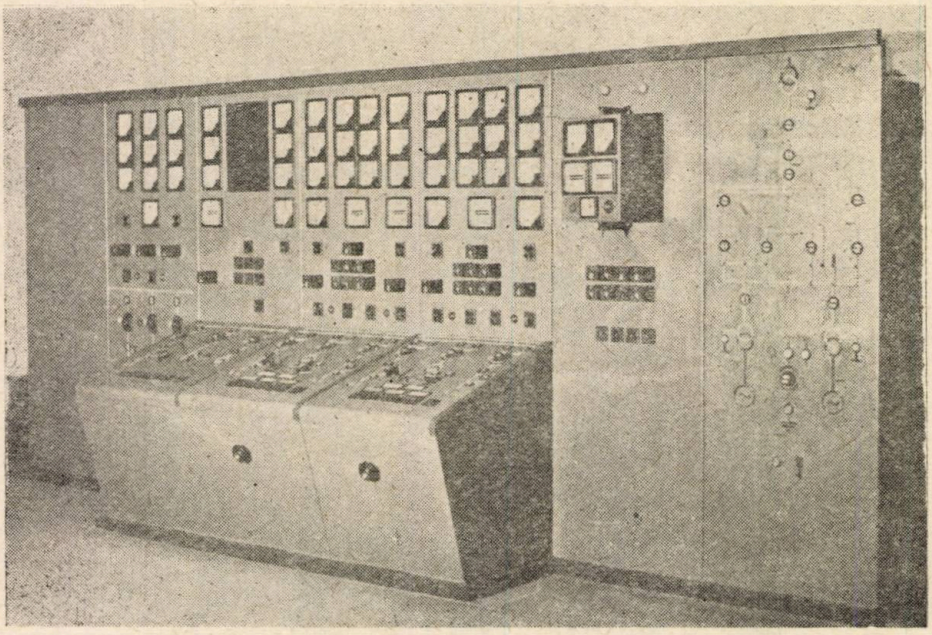


Fig. 8. — Tabloul de comandă.

Tabloul de comandă este realizat din panouri cu pupitrele alăturate (fig. 8). Concepția constructivă și aparatajul prevăzut sînt de tip clasic: aparate de măsură pătrate cu latura de 160 mm, schemă oarbă avînd intercalate chei de comandă cu lampă inclusă și indicatori de poziție ai separatorilor etc.

Pe acest tablou s-a căutat să se concentreze și majoritatea semnalizărilor laboratorului.

Tabloul pentru aparatura de protecție și automatizare este realizat din panouri cu ușă în spate care este și ea folosită pentru montarea releelor (fig. 9).

Tot în sala principală a laboratorului s-au dispus elementele pentru modelarea celor 4 linii precum și tablourile de comutație aferente. Bobinele de inductanță s-au montat pe stelaje, cu tabloul de comutație

din marmoră (fig. 10). Condensatorii și tabloul lor de comutație s-au montat în trei dulapuri metalice (fig. 11).

Intr-o încăpere separată destinată serviciilor interne sînt prevăzute: tabloul pentru alimentarea tuturor serviciilor interne, doi redresori cu seleniul de 220 V, unul pentru o sarcină permanentă de 10 A și altul

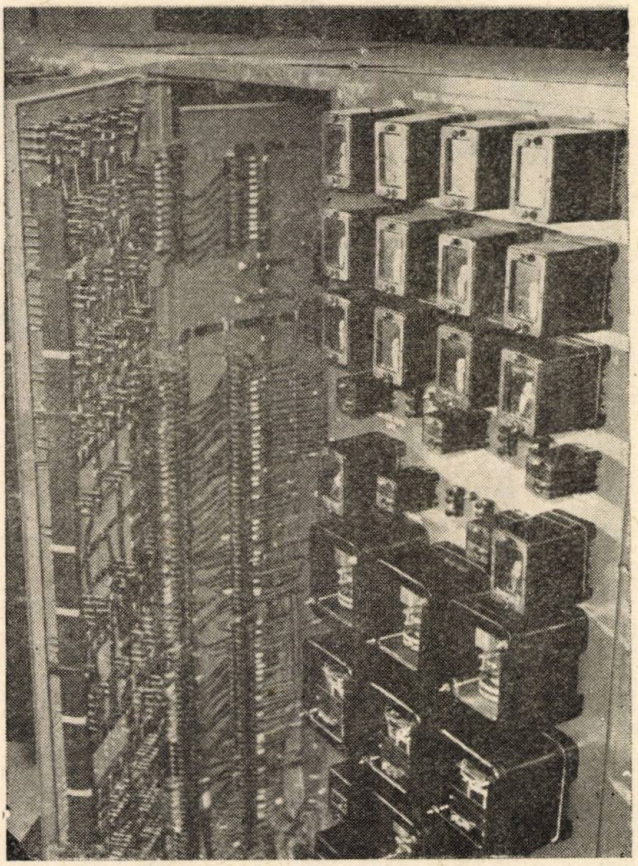


Fig. 9. — Panouri din tabloul de relee.

pentru sarcini de șoc de 100 A, instalația de aer comprimat cu butelii pentru presiuni de 5 at, 10 at și 20 at (fig. 12).

Legăturile în cabluri de forță și cabluri de circuite secundare precum și conductele de aer comprimat au fost pozate în canale acoperite cu tablă striată și covoare de cauciuc.

In limita posibilităților, în toată partea constructivă s-a căutat să se obțină finisaje de bună calitate și să se realizeze o estetică a dispozițiilor și culorilor la nivelul celor ce se întîlnesc în practica energetică.

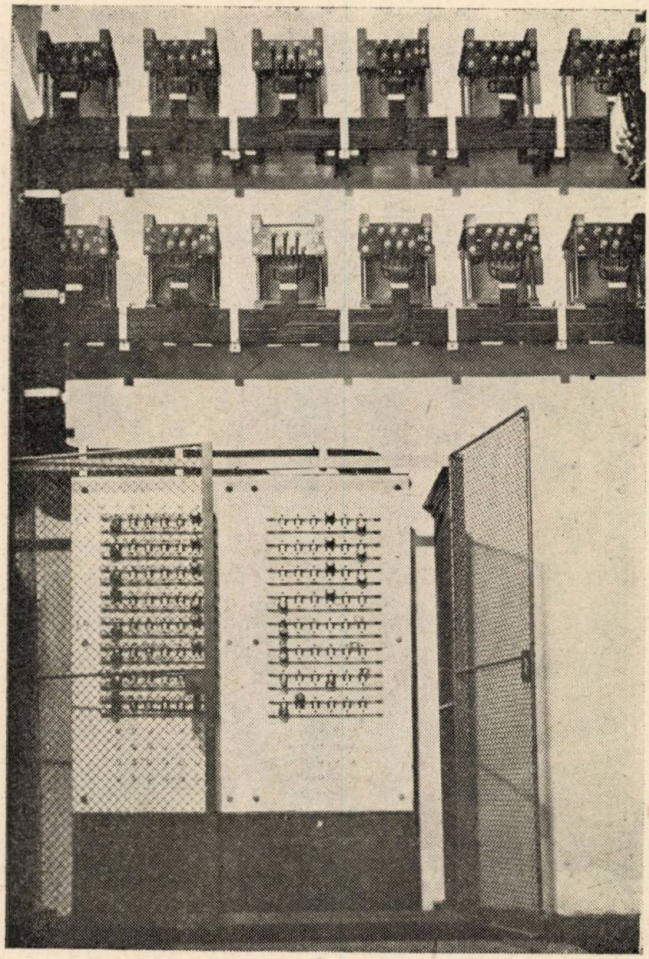


Fig. 10. — Bobinele pentru modelarea liniilor și tabloul de comutație al prizelor.

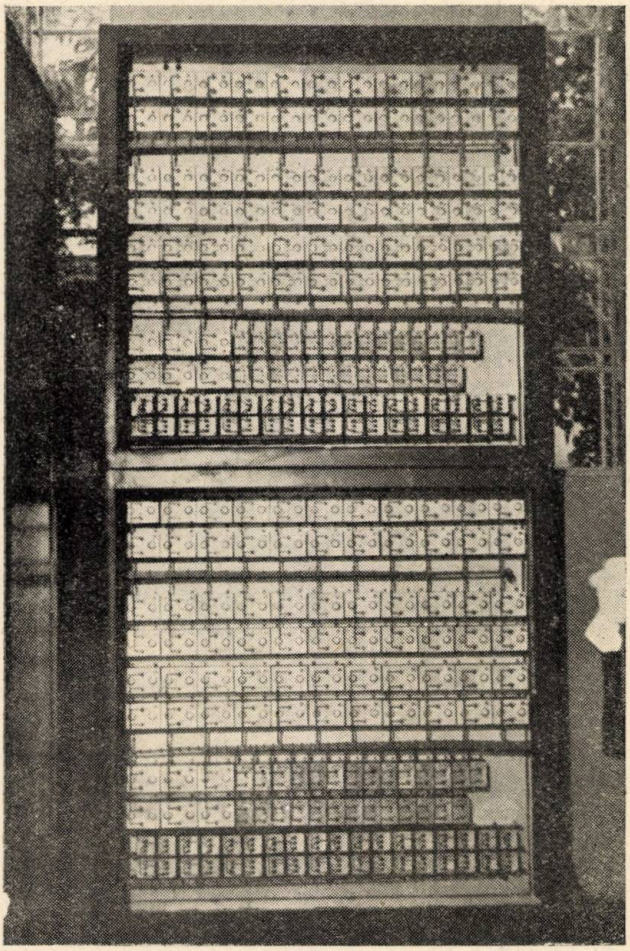


Fig. 11. — Dulapuri cu condensatori pentru modelarea liniilor lungi.

Pe aceeași linie, dar și din motive didactice, laboratorul s-a prevăzut cu iluminat fluorescent și cu un sistem corespunzător de ventilație naturală.

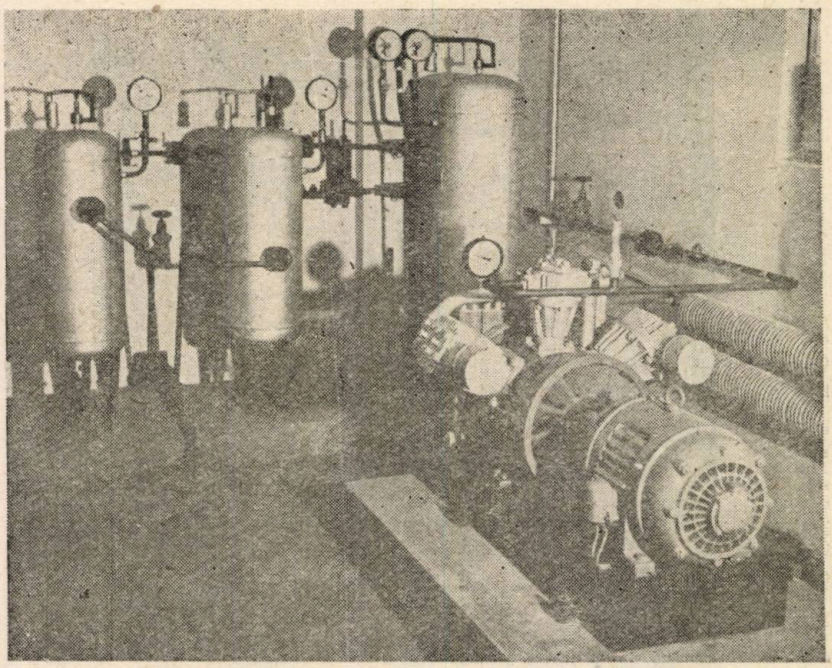


Fig. 12. — Instalația de aer comprimat.

3. — Utilajele și dispozitivele realizate în laborator pentru modelarea regimurilor de funcționare din sistemele electrice.

Pentru efectuarea studiilor menționate în primul paragraf ca operațiuni didactice, s-a căutat ca echipamentele din laborator să permită o modelare calitativă a fenomenelor din sistemele electrice, creindu-se posibilitatea efectuării de măsurători pentru scopul didactic propus.

În cele ce urmează se vor arăta unele posibilități ce s-au creat în laborator în acest scop.

Ca motoare primare pentru grupurile electrogene sînt folosite două motoare asincrone trifazate cu colector de tip Schrage a căror caracteristică mecanică se apropie de caracteristicile turbinelor din centrale. Prin deplasarea periilor, corespunzător variației de viteză la motoarele Schrage, se poate obține o translație a caracteristicilor și schimbarea repartizării sarcinilor pe grupuri, iar prin intercalarea unor rezistențe în circuitul rotoric se va putea varia și gradul de statism. Această soluție s-a preferat motoarelor de curent continuu cu excitație derivație, care prezintă o carac-

teristică liniară, întrucît în acest caz ar fi devenit necesară instalarea unor grupuri convertizoare mari, complicate și scumpe.

Ca generatoare s-au montat două mașini sincrone de cîte 25 kVA fiecare, din construcția de serie a Uzinelor de mașini electrice București.

Cu cele două grupuri electrogene, cu cele 4 secțiuni de bare colectoare și legăturile de linii electrice se pot realiza diferite scheme de sisteme electrice, cu multiple regimuri de funcționare care pun în evidență din punct de vedere calitativ funcționarea sistemelor energetice.

Aceste generatoare mici, de construcție curentă, cu toate îmbunătățirile aduse nu realizează întrutotul parametrii modelării cantitative a unor generatoare din centralele electrice mari. În etape viitoare, este necesar să se aducă o serie de îmbunătățiri și dezvoltări.

Rețeaua electrică a sistemului este formată dintr-un număr de patru linii identice, modelate prin bobine de inductanță și capacități.

Pentru fiecare linie s-au prevăzut cîte patru bobine și anume cîte trei bobine pentru cele trei faze și a patra pentru modelarea rețelei homopolare.

În laborator fiind prevăzute produceri voite de scurtcircuite pentru studiul fenomenelor, s-a ales soluția unor bobine de modelare în aer, pentru evitarea fenomenului de saturație.

Pentru determinarea reactanțelor x_p ale bobinelor ce modelează influența pămîntului în valoarea reactanței homopolare a liniei s-a folosit relația

$$x_p = \frac{1}{3}(x_0 - x_1)$$

unde

x_0 = reactanța homopolară.

x_1 = reactanța directă.

În funcție de reactanța homopolară x_0 considerată pentru diferite tipuri de linii (cu simplu sau dublu circuit, cu sau fără conductori de protecție) pentru x_1 ales la 3,5 mH s-au realizat bobine cu inductanță x_p de 1,5 ori mai mare.

Valoarea $x_1 = 3{,}5$ mH a bobinelor de linie s-a determinat ținîndu-se seama de căderile de tensiune în diferite regimuri de funcționare.

Schema homopolară se închide prin punctele neutre ale celor două transformatoare bloc cu generatorii și punctul neutru al transformatorului de separație care realizează cuplajul cu sistemul de putere infinită.

Este de menționat că fiecare bobină de linie a fost prevăzută cu 6 prize din 0,5 în 0,5 mH fiecare. Aceste prize permit pe de o parte un reglaj longitudinal elastic și pe de altă parte, prin racordarea de capacități la bornele lor, permit realizarea unui lanț de cuadripoli care să satisfacă ecuațiile analogice ale liniilor lungi.

Modelarea unei linii lungi. Cu instalațiile realizate în laborator pentru studiul sistemelor electrice se poate face și studiul calitativ al funcționării în paralel a două centrale interconectate printr-o linie lungă de ordinul 750—1000 km (fig. 13).

Modelarea se obține prin montarea de condensatoare pe prizele bobinelor de inductanță.

Stabilirea relațiilor de similitudine dintre parametrii unei linii lungi și parametrii modelului s-a făcut punîndu-se condiția ca parametrii omologi

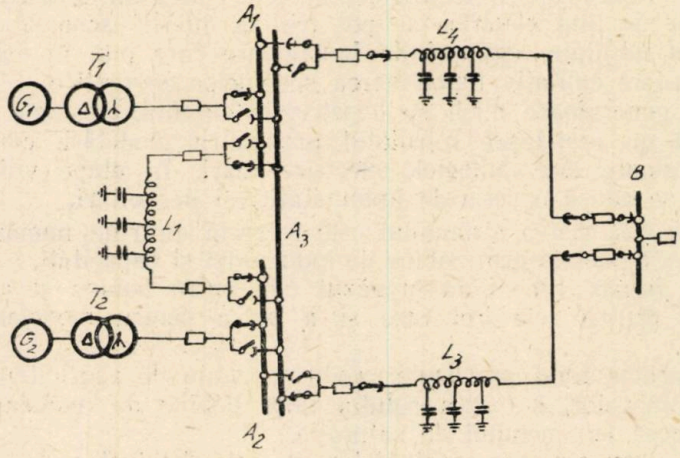


Fig. 13. — Schema de legături pentru modelarea unei linii lungi de 750 km.

fixați ca fundamentali să se reproducă la scări determinate, dacă sînt înlocuiți din ecuațiile liniei lungi în ecuațiile modelului și invers.

Drept parametri fundamentali s-au ales timpul, lungimea, tensiunea și curentul, iar drept parametri derivați s-au ales rezistențele, inductanțele, capacitățile și admitanțele.

Scările alese pentru parametrii fundamentali fiind:

$$\frac{T}{T_m}=1 \qquad \frac{l}{l_m}=\lambda \qquad \frac{U}{U_m}=\alpha \qquad \frac{I}{I_m}=\beta$$

prin identificarea ecuațiilor liniilor lungi cu ecuațiile lanțului de cuadripoli ai modelului se obțin relațiile:

$$Z_m=\frac{\alpha}{\beta}Z_0 l=\frac{\alpha}{\beta}Z_t$$

$$Y_m=\frac{\beta}{\alpha}Y_0 l=\frac{\beta}{\alpha}Y_t$$

unde:

T, T_m = timpul considerat pentru linia reală și model.
l, l_m = lungimile omoloage ale liniei reale și ale modelului.
U, U_m = tensiunile omoloage ale liniei reale și ale modelului.
I, I_m = curenții omologi ai liniei reale și ai modelului.
Z, Z_m = impedanțele omoloage ale liniei reale și ale modelului.
Y, Y_m = admitanțele omoloage, ale liniei reale și ale modelului.

Cu coeficienții determinați s-a calculat modelarea unei linii lungi de 750 km (optime de undă) cu o tensiune nominală $U_n = 380$ kV; $L_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-3}$ H/km; $C_0 = 0{,}9 \cdot 10^{-6}$ F/km.

Montajul celor 24 grupări de capacități, la prizele inductanțelor s-a făcut după schema din fig. 14.

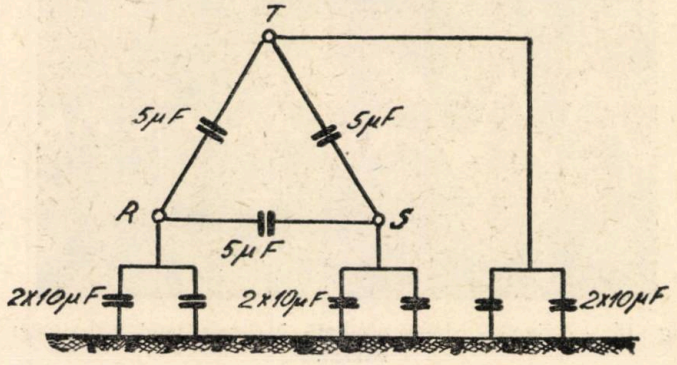


Fig. 14. — Montajul unuia din grupurile de capacități pentru modelarea liniilor lungi.

Instalația de producere a defectelor. Pentru efectuarea în scop didactic de scurtcircuite voite și punerile la pământ, în laborator s-a executat o instalație cu ajutorul careia se pot produce scurtcircuite de toate tipurile, în zece puncte caracteristice ale sistemului modelat.

Instalația mai permite și efectuarea unor defecte multiple longitudinale sau transversale pe o aceiași linie.

Instalația cuprinde trei părți: tabloul de comutare al prizelor, tabloul de defecte și panoul de comandă al defectelor.

Tabloul de comutare al prizelor bobinelor de linie permite, printr-un joc de contacte, fixarea locului de defecte pe linia aleasă (fig. 10).

La cel de al doilea tablou se alege tipul defectului și tot aici, printr-un contactor, se realizează producerea lui.

Comanda producerii defectului se face de la distanță, de la panoul din partea dreaptă a tabloului de comandă (fig. 8). Acest panou este prevăzut cu o schemă sinoptică cu semnalizări luminoase care indică locul defectului, tipul de defect și modul de tratare a neutrului în regimul respectiv de funcționare.

4. — Cîteva din rezultatele obținute în laborator.

Folosind posibilitățile create pînă în prezent, în laborator s-au putut efectua o serie de lucrări cu studenții și măsurători asupra unor regimuri complexe.

Astfel, printre altele, s-au putut pune în evidență o serie de fenomene ca supratensiunea staționară produsă prin sarcini nesimetrice (oscilograma fig. 15) și influența motoarelor asincrone în filtrarea transversală

a curentului invers, fapt care conduce la micșorarea supratensiunilor din sistem (oscilograma fig. 16).

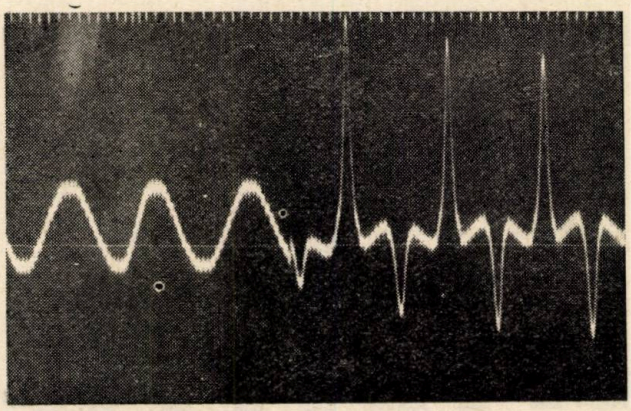


Fig. 15. — Supratensiune rezultată în urma unui scurtcircuit bifazat.

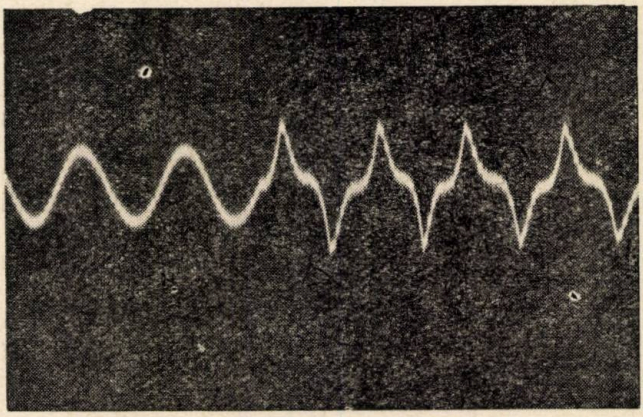


Fig. 16. — Oscilograma tensiunii în cazul filtrării componentei inverse de curent cu motoare asincrone.

Acest lucru rezultă evident din comparația celor două oscilograme, supratensiunile fiind practic nule în cazul oscilogramei din fig. 16 care reprezintă cazul filtrării curentului invers.

De asemenea s-a putut pune în evidență influența unor sarcini nesimetrice și neliniare monofazate (arc electric) precum și a unor sarcini generatoare de fenomene deformante (redresori cu seleniu) (oscilogramele 17 și 18).

* * *

Laboratorul de Centrale, Stații și Sisteme Electrice permite punerea în evidență și aprofundarea calitativă a fenomenelor celor mai curente

ca și a unor fenomene complexe din sistemele energetice și contribuie la pregătirea superioară a studenților la un nivel calitativ nou, mai apropiat necesităților din sistemul nostru energetic în continuă dezvoltare.

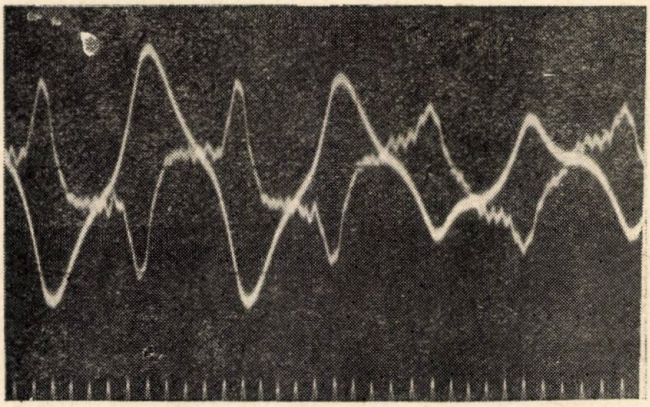


Fig. 17. — Oscilograma tensiunii și curentului la bornele unui generator în cazul unei sarcini nesimetrice și neliniare (arc electric).

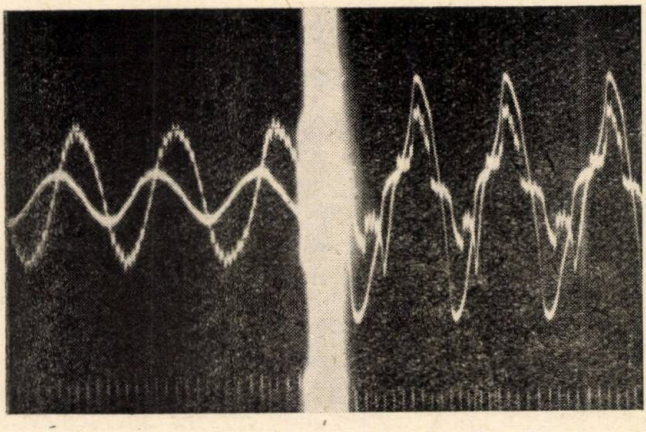


Fig. 18. — Oscilograma tensiunii și curentului la bornele unui generator în cazul unei sarcini generatoare de fenomene deformante (redresor trifazat cu seleniu).

Folosind instalațiile executate pentru scop didactic, cu unele completări, laboratorul poate permite realizarea unor studii preliminare calitative care pentru a fi efectuate direct în sistem ar necesita întreruperi în funcționare, eventuale repetări și perturbări în sistem.

Catedra de Centrale Electrice
Institutul Politehnic București

ЛАБОРАТОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТАНЦИИ, ПОДСТАНЦИИ И СИСТЕМ СУЩЕСТВУЮЩАЯ В БУХАРЕСТСКОМ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ

(Резюме)

В статье описывается лаборатория электрических станций, подстанций и систем, существующая в Бухарестском Политехническом Институте.

Главная задача этой лабораториии это практическая работа со студентами, старших курсов по электроэнергетической специальности; в лаборнии могут быть исследованы стационарные и переходные явления, которые могут происходить в электричнских системах, а также могут быть произведены исследования электрических систем на моделях.

Лаборатория состоит из установок в нормальном масштабе а также из специальных приспособлений: модель очень длиных линии, установки для моделирования разных аварии в сетях и. т. д.

Представлены также некоторые результаты полученые в этой лаборатории относительно асиметрических и нелинеарных явлений.

THE LABORATORY OF POWER PLANTS, STATION AND ELECTRICAL SYSTEMS OF THE POLYTECHNICAL INSTITUTE OF BUCAREST

(Summary)

The paper gives a description of the laboratory of power plants, stations and electrical systems of the Polytechnical Institute of Bucarest.

This laboratory was designed principally for didactic activity with advanced students of the electroenergetical speciality, but itallows also the study of stationary and transient phenomena that appear in electrical systems. The laboratory includes network-models as well as constructive parts of electrical stations at normal size and special experimental installations as: models of long transmission lines, an installation for modelling different faults which may appear on electric systems, etc. The paper also presents some results obtained in the described laboratory regarding assymetric and nonlinear phenomena.

LE LABORATOIRE DE CENTRALES, STATIONS ET RÉSEAUX ÉLECTRIQUES DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE BUCAREST

(Résumé)

L'article présente le laboratoire de Centrales, Stations et Réseaux électriques réalisé à l'Institut Polytechnique de Bucarest.

Le principal but de ce laboratoire est l'activité didactique avec les étudiants des annés supérieures de la branche électroénergetique ; mais ce labotatoire permet aussi des études sur les phénomènes stationnaires et transitoires qui apparaissent dans les réseaux électriques, ainsi que des études sur les modèles des systèmes électriques.

Le laboratoire comprend des installations à échelle normale, ainsi que des dispositifs spéciaux : modèles de lignes très longues, dispositifs pour modèler divers défauts des réseaux, etc.

A titre d'exemple on présente quelques uns des résultats obtenus dans ce laboratoire, concernant des phénomènes assymétriques et non linéaires.

DAS LABORATORIUM FÜR ELEKTRISCHE KRAFTWERKE, SCHALTWERKE UND NETZE DES POLYTECHNISCHEN INSTITUTS AUS BUKAREST

(Zusammenfassung)

Es wird das Laboratorium für elektrische kraftwerke, Schaltwerke und Netze des Poytechnischen Instituts aus Bukarest beschrieben.

Dieses Laboratorium kurde in erster Linie für Lehr-Tätigkeit mit den Studenten der grösseren Jahren des Elektroenergetischen Faches aufgefasst, es ermöglicht aber auch Studien der stettigen und Ausgleich — Vorgänge die in elektrischen Netzen vorkommen, sowie Studien der elektrischen Netmodelle.

Das Laboratorium umfasst Netzmodelle, sowie Teile der elektrischen Stationen in normaler Grösse und spezielle für Versuchszwecke ershaffene Anlagen, wie : — modelle langer Fernleitungen, eine Anlage zur Modelierung verschiedener in elektrischen Netzen vorkommenden Fehler, usw.

Es werden anliegend auh einige Ergebnisse angegeben die in diesem Laboratorium im Studium unsymetrischen und nicht — linioren Vorgönge erzielt wurden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 3

ANALYSE DER HYDRAULISCHEN WIRKUNGSGRADE NEUZEITLICHER KAPLAN-PROPELLER UND ROHRTURBINEN

D. PAVEL

1. Allgemeines über den heutigen Stand und die zukünftige Entwicklung der Wasserturbinen

Die Wasserturbinen werden hinsischtlich der Nettofallhöhen H, bei einstufigen Einheiten, eingeteilt in:

— *Hochdruck-Wasserturbinen* verschiedenartiger Pelton Typen welche, bei mittleren Leistungen, Fallhöhen von $H>300$ m und bei $P>100\,000$ PS je Turbine $H=500\ldots2000$ m, verarbeiten;

— *Mitteldruck-Francisturbinen,* bei $P<10\,000$ PS für $H=40\ldots300$ m, bezw. bei $P>50\,000$ PS für $H=60\ldots500$ m (Ferrera-Escher Wyss $H_{max}=522$ m) und doppeltregulierte Dériaz-Turbinen grosser Leistungen für Fallhöhen $H=50$—200 m;

— *Niederdruck-Turbinen,* von zwei Haupt-Typen: klassische Achsialturbinen (Kaplan, Propeller, Thomann-Kaplan) für Fallhöhen $H<70$ m, sowie neuzeitliche Rohrturbinen für $H=2\ldots20$ m und $P<20\,000$ PS.

Die Einheitsleistungen P (PS/Turbine) steigen ständig, *z.B*:

— Pelton vertikalachsig mit 4 Düsen oder horizontal-freihängende Zwillingslaufräder $P<150\,000$;

— Francis $P=250\,000$ (Bratzk-Sowjetunion);

— Kaplan $P=150\,000$ (Kuibischew und Volhograd auf der Wolga)

Die zuerst von Escher Wyss und nachher von Neyrpic gebauten Rohrturbinen haben, bei $H<16$ m, $P=25\,000$ PS noch nicht erreicht.

Die weitere Entwicklung der Wasserturbinen wird voraussichtlich mehrere Richtungen folgen, wie *z.B:* die Steigerung der Einheitsleistungen, andererseits die Verschiebung nach höheren Fallhöhen H, durch mehrstufige Turbinen. Bei Peltonturbinen dürfte $P_{max}\sim200\,000$ PS, bezw. bei einstufigen Francisturbinen $P_{max}<400\,000$ PS/Turbine nicht übersteigen.

Die einstufigen Kaplanturbinen werden höhere Leistungen erzielen, *z.B* für das demnächst zu bauende *WK* Eisernes Tor-Donau sind 12

[1] Gekürzter Auszug aus der Mitteilung an die wissenschaftliche Session, März 1962.

Kaplanturbinen von je 250 000 PS, mit 9,3 m Laufraddurchmesser, vorgesehen. Die Projekte für den Ausbau der Ströme Sibiriens enthalten Einheitsleistungen bis zu 500 000 PS/Turbine.

Für einstufige Rohrturbinen, bei $H_{max}=20$ m und $D=8$ m, können $P_{max}\sim 50\,000$ PS/Turbine erzielt werden, *z.B:* Nijni-Kamsk Projekt in der Sowjetunion 60 000 PS/Turbine.

Was die Entwicklung der zweistufigen Ueberdruck-Turbinen anbelangt, hat der Verfasser bereits vor 20-Jahren berichtet und Diplomarbeiten ausarbeiten lassen. Neuerdings hat Escher Wyss *AG* eine 2-stufige Francisturbine für Glems, mit $P=880$ PS und $H=303$ m, aufgestellt und für Turbinenpumpen Modelle für grosse 2-stufige Einheiten geprüft [1]. Auf dem Prüfstand von Gebr. Sulzer wurden desgleichen Modelle für 2— und 3— stufige Turbinenpumpen untersucht [2].

Durch die 2-stufigen Anordnungen und entsprechende Gegendrücke werden sich die Fallhöhengrenzen aufwärts verschieben, u. z. bei:

— 2-stufigen Francisturbinen bis zu $H_{max}<800$ m;
— 2-stufigen Kaplanturbinen $H_{max}<100$ m und Rohrturbinen $H_{max}<40$ m.

2. Die Wirkungsgrade der Niederdruck-Turbinen

Der Wirkungsgrad einer Wasserturbine $\eta=\eta_h\,\eta_v\,\eta_m$ ist durch folgende Teilwirkungsgrade beeinflusst:

— hydraulischer Wirkungsgrad $\eta_h=\dfrac{\Sigma h_w}{H}$, wobei Σh_w die Summe der Widerstandsverluste der hydraulischen Organe — vom Eintritt bis zum Austritt der Turbine — darstellt;

— volumetrischer Wirkungsgrad $\eta_v=1-\dfrac{q}{Q}$, mit $q=$Spaltwasserverlust;

— mechanischer Wirkungsgrad $\eta_m=1-\dfrac{\Delta P}{P}$, mit $\Delta P=$Leistungsverlust durch mechanische Reibungen und Vertilationsverluste.

Durch technische Verbesserungen wurde der mechanische Wirkungsgrad wesentlich erhöht, u.z: bei mittleren Leistungen $\eta_m=0{,}98-0{,}985$ und bei $P>100\,000$ PS, $\eta_m=0{,}99-0{,}995$.

Der Spaltverlust kann desgleichen nicht wesentlich vermindert werden, sodass $\eta_v=0{,}98-0{,}99$ die technische Grenze erreicht hat.

Der hydraulische Wirkungsgrad hat in letzter Zeit hohe Werte erreicht, z.B: bei Kaplanturbinen $\eta_h=0{,}94-0{,}95$ bei $D_1=5$—6 m Laufraddurchmesser und $\eta_h=0{,}95-0{,}955$ bei $D_1=9$—10 m.

Der Gesamtwirkungsgrad $\eta_{max}=\eta_h\,\eta_v\,\eta_m$ der Kaplanturbinen, bei günstigster Beaufschlagung, hat Werte erreicht, wie: $\eta_{max}=0{,}92$ bei $D_1=5$ m und $\eta_{max}=0{,}94$ bei $D_1=10$ m. Bei Vollast ist entsprechend $\eta_{100}=0{,}89$—$0{,}91$.

Weitere Verbesserungen des η_h der Kaplanturbinen um 1—2% können noch erzielt werden, durch:

— weitere Erforschung der einzelnen Organe, bestätigt durch Modellversuche;

— reichlichere Abmessungen der Durchmesser und feingeschliffene Leit-und Laufradschaufeln.

Wesentlichere Fortschrite für η_h werden zukünftig bei Rohrturbinen erreicht. Die geradlinige Strömung dieser Turbinen ist, für gleiche $Q\ H\ D$, wie diejenigen der Kaplanturbine, günstiger. Die Widerstandsverluste:

$$\Sigma h_w = 0{,}0826\ Q^2 \left[\sum \frac{\lambda \Delta L}{D^5} + \sum \frac{\zeta}{D^4} \right]$$

in der Zu — und Ableitung, ähnlich eines Venturi — Rohres, sind bedeutend geringer als diejenigen in der Spirale und dem gekrümmten Saugrohr der Kaplanturbine.

3. Die Grundlagen der Analyse

Es werden die hydraulischen Verluste für eine Kaplanturbine und vergleichsweise für eine Propeller —, bezw. eine Rohrturbine bestimmt, wobei es zweckmässig ist sämtliche hydraulischen Organe der Turbinen in drei Gruppen einzuteilen. Bei Kaplan und Propellerturbinen unterscheidet man die Gruppen: (1) Einlauf, Zuführung, Spirale, Leitrad und Rotationsraum bis zum Laufradeintritt; (2) das Laufrad; (3) das Saugrohr.

Die hydraulischen Organe einer Rohrturbine sind entsprechend: (1) Zulauftrichter und Leitradraum bis zum Eintritt in das Laufrad; (2) Laufrad; (3) Geradliniges Saugrohr (Difusor).

Wie unten folgt ist es günstig eine solche Einteilung durchzuführen, da die theoretische Untersuchung, wie auch die Nachprüfung an den Modellen, sich vereinfachen. Eine wichtige Grenze zwischen den Organen ist das Laufrad, weil vor — und nach dieser die Geschwindigkeiten und Drücke bedechnet und am Modell nachgeprüft werden können. In dieser Weise ist es möglich auch die hydraulischen Verluste $h_{w1}\ h_{w2}\ h_{w3}$ sowie die drei Wirkungsgrade $\eta_{h1}\ \eta_{h2}\ \eta_{h3}$ der drei Gruppen zuszurechnen.

Ein zylindrischer Schnitt durch den Laufradeintritt (Index 1) und Austritt (2) ergibt laut Kontinuitätsgleichung die elementare Wassermenge dQ und durch Integration die Gesamtwassermenge der Turbine:

$$dQ = 2\pi r_1\, dr_1\, c_{m1} = 2\pi\ r_2\, dr_2\, c_{m2}$$

$$Q = 2\pi \int_{r_i}^{r_1} c_{m1}\, r_1\, dr_1 = 2\pi \int_{r_i}^{r_2} c_{m2}\, r_2\, dr_2\,, \quad \frac{m^3}{s}, \ldots \qquad (1)$$

Es bedeuten hier: r_1 — der Radius am Eintritt, r_2 — Austritt, r_i — die Innenradiuse, an der Nabe, $c_{m1}\ c_{m2}$ die Meridiankomponenten der absoluten Wassergeschwindigkeiten beim Ein — und Austritt des Laufrades.

Da die Geschwindigkeiten $c_{m1}\, c_{m2}$, wie üblich, durch die Geschwindigkeits — Koeffizienten $k_{cm1}\, k_{cm2}$ ausgedrückt werden können, erhält man:

$$c_{m1} = k_{cm1}\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad c_{m2} = k_{cm2}\sqrt{2gH};$$

$$Q = 2\pi\sqrt{2gH}\int k_{cm}\, r\, dr = 27{,}83\sqrt{H}\int k_{cm}\, r\, dr$$

$$Q = 27{,}83\sqrt{H}\int_{r_i}^{r_1} k_{cm1} r_1\, dr_1 = 27{,}83\sqrt{H}\int_{r_i}^{r_2} k_{cm2} r_2\, dr_2 \ldots \qquad (2)$$

Ein, im Unterwasserkanal eingebauter, Messüberfall ermöglicht die genaue Messung der Turbinenwassermenge $Q = 2{,}953\, \mu\, b\, h^{3/2} \ldots$ (3) und muss mit (2) übereinstimmen.

Andererseits entspricht dem obigen zylindrischen Schnitt das elementare hydraulische Moment nach Euler:

$$dM_h = \frac{\gamma}{g} dQ\,(c_{u1} r_1 - c_{u2} r_2)$$

und, nach der Einführung des obigen Wertes von $dQ = 2\pi r\, dr\, c_m$, folgt nach der Integration:

$$M_h = 2\pi\frac{\gamma}{g}\left[\int_{r_i}^{r_1} c_{m1}\, c_{u1}\, r_1^2\, dr_1 - \int_{r_i}^{r_2} c_{m2}\, c_{u2}\, r_2^2\, dr_2\right], \text{ kgm} \ldots \qquad (4)$$

Ersetzt man auch

$$c_{u1} = k_{cu1}\sqrt{2gH}\ ; \quad c_{m1}\, c_{u1} = 2gH\, k_{cm1}\, k_{cu1}$$

$$c_{m2}\, c_{u2} = 2gH\, k_{cm2}\, k_{cu2}$$

so folgt das hydraulische Moment des ganzen Laufrades:

$$M_h = 4\pi\gamma H\left[\int_{r_i}^{r_1} k_{cm1}\, k_{cu1}\, r_1^2\, dr_1 - \int_{r_i}^{r_2} k_{cm2}\, k_{cu2}\, r_2^2 dr_2\right] \ldots \qquad (5)$$

Zugleich bestehen zwischen den Leistungen und Momenten folgende Beziehungen:

— effektive Leistung an der Turbinenwelle $P = P_t\, \eta$ bei der theoretischen Leistung

$$P_t = \frac{\gamma}{75} Q H = \frac{P}{\eta}\ (PS)$$

— hydraulische Leistung

$$P_h = P_t\, \eta_h = P\,\frac{\eta_h}{\eta}\ (PS)$$

Das hydraulische Moment:

$$M = 716{,}2\,\frac{P_h}{n} = 716{,}2\,\frac{P\,\eta_h}{n\,\eta} = 716{,}2\,\frac{P}{n\,\eta_v\,\eta_m}, \text{ kgm} \ldots \qquad (6)$$

ist bekannt und dient zur Nachprüfung der Gl. (4), da vorher $\frac{\eta_h}{\eta} = \frac{1}{\eta_v \eta_m}$ gefunden wurde. Die Leistung P und $n(U/\text{min})$ werden an dem Brems-Stand gemessen. Werden nun an einem Modell, oder an der Grossturbine, die Geschwindigkeits-Komponenten $c_{m1}\ c_{m2}\ c_{u1}\ c_{u2}$ gemessen, so sind auch $k_{cm1}\ k_{cm2}\ k_{cu1}\ k_{cu2}$ bekannt, als Funktionen der Radiuse r_1, r_2.

In der Literatur sind in dieser Hinsicht nur die Messungen an einer Kaplanturbine von Escher Wyss, mit $n_s = n\frac{P^{0,5}}{H^{1,25}} = 600$ und $D_2 = 1$ m Laufraddurchmesser beim Austritt, veröffentlicht [3]. Aus der Auswertung der veröffentlichten Diagramme folgen die Werte von $k_{cm1}\ k_{cm2}\ k_{cu1}\ k_{cu2}$ als Funktionen von r/r_1, für $r_i = 0{,}45\ r_1$ und $r_2 = 0{,}975\ r_1$, in der Tafel 1.

Desgleichen erhielten wir, durch Anwendung der Diagramme aus [3]:

— in Tafel 2 das Verhältnis $\eta_{h3}/\eta_{h3}^{max} = f(k_{u1})$, also der Wirkungsgrad η_{h3} des Saugrohres, der maximal wurde, bei $k_{u1} = 1{,}85 - 1{,}90$, also für die günstigste Umlaufgeschwindigkeit:

$$(u_1)_{\eta_{h3}-max} = k_{u1}\sqrt{2gH} = (8{,}2 \ldots 8{,}4)\sqrt{H} = 0{,}1047\ \tau_1 n$$

— in Tafel 2, desgleichen, $\eta_{h2} = F\ (k_{u1}\ ,\ Q_{12})$ des Laufrades, mit $Q_{12} = \frac{Q}{\sqrt{H}\, D_2^2}$;

— in Tafel 3 die Einzelwiderstände h_{w1} — für Gruppe 1, h_{w2} — im Laufrad, h_{w3} — im Saugrohr, bezogen auf $\Sigma h_w = h_{w1} + h_{w2} + h_{w3}$, welche, durch Druckmessungen von p_1 und p_2 vor — und nach dem Laufrad, erzielt wurden.

Die entsprechenden Teil-Wirkungsgrade η_{h1} — Eintritt bis Laufrad, η_{h2} des Laufrades und η_{h3} des Saugrohres, sind in der Tafel 3 berechnet.

4. Die Analyse der hydraulischen Verluste h_w und Wirkungsgrade von Kaplanturbinen

4.1. *Beziehungen zwischen* h_w *und* η_h

Für die Organe der ersten Gruppe, vom Eintritt oberwasserseits bis zum Laufrad-Eintritt, betragen:

$$\eta_{h1} = 1 - \frac{h_{w1}}{H};\quad h_{w1} = (1 - \eta_{h1})\, H. \tag{7}$$

Für die ganze Turbine, entsprechend $\Sigma h_w = h_{w1} + h_{w3} + h_{w3}$, ist der hydraulische Gesamtwirkungsgrad:

$$\eta_h = 1 - \frac{\Sigma h_w}{H};\quad \Sigma h_w = (1 - \eta_h)\, H \tag{8}$$

Tafel 1

Geschwindigkeits-Koeffiziente beim Eintritt (1) und Austritt (2) der Kaplanturbine mit $n_s = 600$, $r_i = 0{,}45\ r_1$, $r_2 = 0{,}975\ r_1$, nach Messungen

$\frac{r}{r_1}$	0,47	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,98
k_{cm_1}	0,4086	0,3670	0,3688	0,3842	0,4000	0,4102	0,4154	0,4090	0,4000	0,3782	0,3750	0,3920
k_{cm_2}	0,4256	0,4000	0,3825	0,4000	0,4090	0,4170	0,4240	0,4265	0,4240	0,4080	0,3840	0,3620
k_{cu_1}	0,5842	0,5860	0,5500	0,5102	0,4852	0,4610	0,4505	0,4436	0,4410	0,4390	0,4130	0,3675
k_{cu_2}	0,0300	—0,0086	—0,0030	—0,0170	0	0,0240	0,0470	0,0690	0,0920	0,1190	0,1410	0,1390
$k_{cu_1} - k_{cu_2}$	0,5542	0,5946	0,5800	0 5272	0,4852	0,4370	0,4035	0,3746	0,3490	0,3200	0,2720	0,2285
k_u	0,7070	0,7530	0,8280	0,9040	0,9800	1,0550	1,1300	1,2050	1,2800	1,3550	1,4300	1,4750

Tafel 2

Saugrohrwirkungsgrad $\eta_{h_3}/\eta_{h_3}^{max} = f(k_{u_1})$ der Kaplanturbine

$k_{u_1} = \frac{u_1}{\sqrt{2g\,H}}$	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
$\eta_{h_3}/\eta_{h_3}^{max}$	0,9642	0,9764	0,9844	0,9907	0,9958	1	1	0,9770	0,9705	0,9822

Laufradwirkungsgrad $\eta_{h_2}\% = F(k_{u_1})$ nach Messungen

$Q_{12} = \frac{Q}{\sqrt{H}\,D_2^2}$	$k_{u_1} = \frac{u_1}{\sqrt{2g\,H}} = 0{,}01182\ D_1 \frac{n}{\sqrt{H}}$								
	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80
1,0	95.70	95,62	95.51	95.30	95,11	94,82	94,55	94,20	93,87
1,2	96.50	96,38	96,30	96,22	96,06	95,93	95,67	95,44	95,10
1,4	97,00	96,10	96,80	96,76	96,59	96,45	96,24	96,00	95,63
1.6	97,50	97,44	97,37	97,30	97,13	96,96	96,80	96,55	96,15

Aus diesen Beziehungen folgt, aus (7) : (8), das Verhältnis :

$$\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w} = \frac{1-\eta_{h1}}{1-\eta_h}\,; \quad \eta_{h1} = 1-(1-\eta_h)\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w} \tag{9}$$

Für das Laufrad (Index 2) sind die entsprechenden Beziehungen :

$$\eta_{h2} = 1-\frac{h_{w2}}{H}\,; \quad h_{w2} = (1-\eta_{h2})\,H$$

$$\eta_{h2} = 1-(1-\eta_h)\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w} \tag{10}$$

$$\eta_{h1}\,\eta_{h2} = 1-(1-\eta_h)\frac{h_{w1}+h_{w2}}{\Sigma h_w}$$

$$\eta_{h2} = \frac{1}{\eta_{h1}}\left[1-(1-\eta_h)\frac{h_{w1}+h_{w2}}{\Sigma h_w}\right]. \tag{10'}$$

Für das Saugrohr (Index 3) sind ähnliche Beziehungen gültig :

$$\eta_{h3} = 1-\frac{h_{w3}}{H}\,; \quad h_{w3} = (1-\eta_{h3})\,H$$

$$\eta_{h3} = 1-(1-\eta_h)\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w} = \frac{\eta_h}{\eta_{h1}\,\eta_{h2}} \tag{12}$$

4.2. *Die hydraulischen Verluste.*

Jeder hydraulische, nicht rotierende Bestandteil, wie Einlauf, Spirale, Saugrohr kann in kurze Segmente von der Länge ΔL eingeteilt und auf den hydraulisch äquivalenten Durchmesser d umgerechnet werden. Die entsprechenden Geschwindigkeiten $c = \sqrt{c_a^2 + c_t^2}$ enthalten sowohl die Achsialkomponenten c_a längs der Achse des betreffenden Segmentes, sowie die Tangentialkomponente c_t entsprechend der Spiralbewegung. Die linearen und lokalen Widerstandshöhen ergeben für ein Teilsegment :

$$\Delta h_w = \left(\frac{\lambda}{d}\Delta L + \zeta\right)\frac{c^2}{2g} = 0{,}0286\,Q^2\left(\frac{\lambda}{d^5} + \frac{\zeta}{d^4}\right)$$

Durch die Einführung des Koeffizienten der lokalen Widerstände

$$k_\zeta = \frac{\zeta d}{\lambda \Delta L}\,; \quad \zeta = k_\zeta \frac{\lambda}{d}\Delta L$$

wird Δh_w und h_w des ganzen Bestandteils

$$\Delta h_w = 0{,}0826\,Q^2\,(1+k_\zeta)\,\frac{\lambda}{d^5}\,\Delta L$$

$$h_w = 0{,}0826\,Q^2 \sum_1^n \left[(1+k_\zeta)\,\frac{\lambda}{d^5}\,\Delta L\right]$$

Tafel 3

Hydraulische Verluste und Wirkungsgrade, nach Messungen an 3 Bestandteilen der Kaplanturbine, mit $n_s = 600$; $D_s = 1$ m

Q_{1s}	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w}$	0,250	0,261	0,267	0,270	0,272	0,268	0,260	0,250	0,238	0,225	0,210	0,197	0,182
$\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w}$	0,660	0,617	0,571	0,529	0,484	0,437	0,390	0,346	0,304	0,259	0,227	0,199	0,184
$\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w}$	0,090	0,122	0,162	0,201	0,244	0,295	0,350	0,404	0,458	0,516	0,563	0,604	0,634
η_h %	87,55	88,64	89,40	89,80	90,00	90,00	89,89	89,64	89,26	88,70	88,06	87,20	86,20
η_{h1}	96,90	97,05	97,16	97,25	97,30	97,36	97,40	97,42	97,44	97,46	97,46	97,49	97,50
η_{h2}	91,65	92,80	9 70	94,40	95,00	95,50	95,95	96,35	96 70	97,00	97,26	97,40	97,50
η_{h3}	98,70	98,50	98,20	97,80	97,30	96,70	96,10	95,50	94,75	93,85	92,90	91,80	90,70

Tafel 4

Hydraulische Wirkungrade der Kaplanturbine $D_2 = 1$ m, nach der Methode des Verfassers

Q_{1s}	Gl.	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w}$	15	0,2493	0,2583	0,2648	0,2687	0,2700	0,2687	0,2643	0,2583	0,2492	0,2375	0,2232	0,2063	0,1895
$\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w}$	17	0,6480	0,6060	0,5641	0,5223	0,4816	0,4396	0,3990	0,3591	0,3202	0,2825	0,2463	0,2119	0,1797
$\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w}$	18	0,1028	0,1357	0,1711	0,2090	0,2484	0,2917	0,3362	0,3826	0,4306	0,4800	0,5305	0,5818	0,6308
η_h %	13	88,03	88,94	89,64	90,16	90,50	90,66	90,64	90,44	90,06	89,50	88,76	87,84	86,74
η_{h1}	14	97,03	97,14	99,26	97,36	97,44	97,49	97,52	97,53	97,52	97,51	97,49	97,49	97,49
η_{h2}	19	92,02	93,10	93,99	94,72	95,30	95,79	96,17	96,48	96.88	96,95	97,16	97,38	97,57
η_h	20′	98,50	98,30	98,10	97,80	97,40	97,10	96,70	96,10	95,30	94,60	93,60	92,50	91,20

An Stelle der Turbinen-Wassermenge Q wird zweckmässig die Einheitswassermenge $Q_{12}=\frac{Q}{\sqrt{H}\,D_2^2}$ eingeführt, d.h. $Q=Q_{12}\sqrt{H}\,D_2^2$ in h_w ergibt

$$h_w=0{,}0826\,H\,D_2^4\,Q_{12}^2\sum_1^n\left[(1+k\zeta)\,\frac{\lambda}{d^5}\,\Delta L\right] \tag{12'}$$

Für ein und dieselbe Turbine sind $H\,D_2$ bei zahlenmässiger Berechnung bekannt und konstant, demnach ist $0{,}0826\,H\,D_2^4=K$ eine für die ganze Turbine gültige Konstante und (12') ergibt:

$$h_w=K\,Q_{12}^2\sum_1^n\left[(1+k\zeta)\,\frac{\lambda}{d^5}\,\Delta L\right] \tag{12''}$$

4.3. *Der gesamte hydraulische Wirkungsgrad η_h der Kaplanturbine*

Zahlreiche Uebernahmsversuche von neuzeitlichen Kaplanturbinen geben im Mittel $\eta_h=f(Q_{12}, n_s)$. Für die oben erwähnte Turbine mit $n_s=600$ und $D_2=1$ m ist der, auf 1 m Durchmesser bezogene, hydraulische Wirkungsgrad:

$$\eta_h=0{,}88+0{,}025\,Q_{12}-0{,}09\,(Q_{12}-1)^2=0{,}88+f(Q_{12}) \tag{13}$$

Für andere Durchmesser $D_2'\neq D_2$ ist angenähert gültig (13') und in diese (13) eingeführt, liefert die Gleichung (13''):

$$\eta_h'\sim 1-(1-\eta_h)\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^{1/4} \tag{13'}$$

$$\eta_h'\sim 1-[0{,}12-0{,}025\,Q_{12}+0{,}09\,(Q_{12}-1)^2]\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^{1/4} \tag{13''}$$

In den folgenden Betrachtungen wird (13) nur für die Einheitsturbine mit $D_2'=D_2=1$ m benützt.

4.4. *Verluste h_{w1} und Wirkungsgrad η_{h1} für Eintritt bis zum Laufrad.*

Führt man η_h laut (13) in η_{h1} nach (9) ein, so ist der Teilwirkungsgrad für die erste Gruppe:

$$\eta_{h1}=1-(1-\eta_h)\,\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w}$$

$$\eta_{h1}=1-[0{,}12-0{,}025\,Q_{12}+0{,}09\,(Q_{12}-1)^2]\cdot[0{,}27-0{,}13\,(Q_{12}-1)^2]$$

$$\eta_{h1}=0{,}9676+0{,}00675\,Q_{12}-(0{,}0087+0{,}00325\,Q_{12})\,(Q_{12}-1)^2+$$
$$+0{,}0117\,(Q_{12}-1)^4 \tag{14}$$

$$\eta_{h1}=0{,}9676+f_1(Q_{12}) \tag{14'}$$

Die Funktion $f_1(Q_{12})$ stellt die Glieder 2, 3, 4 der Gleichung (14) dar.

Die Analyse der hydraulischen Verluste ergibt (15), welches in (14) eingeführt wurde, desgleichen folgt aus (7) die Beziehung (16):

$$\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w} = 0{,}27 - 0{,}13\,(Q_{12} - 1)^2 \tag{15}$$

$$\frac{h_{w1}}{H} = 1 - \eta_{h1} = 0{,}0324 - 0{,}00675\,Q_{12} + \\ + (0{,}0087 + 0{,}00325\,Q_{12})\,(Q_{12} - 1)^2 - 0{,}0117\,(Q_{12} - 1)^4 \tag{16}$$

$$\frac{h_{w1}}{H} = 0{,}0324 - f_1(Q_{12}) \tag{16'}$$

4.5. *Verluste und Wirkungsgrade für das Laufrad und Saugrohr*

Die Analyse der hydraulischen Verluste h_{w2} für das Laufrad und h_{w3} für das Saugrohr, bezogen auf $\Sigma h_w = h_{w1} + h_{w2} + h_{w3}$ ergibt die Beziehungen (17—18). In diesen sind neben den Widerstandshöhen auch die Verluste durch die Komponenten $c_{u1} - c_{u2}$, sowie Austrittsverluste entsprechend $\frac{c_2^2}{2g}$ einbegriffen

$$\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w} = 0{,}9 - 0{,}42\,Q_{12} + 0{,}0125\,(Q_{12} - 0{,}5)^4 \tag{17}$$

$$\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w} = 1 - \frac{h_{w1} + h_{w2}}{\Sigma h_w} = -0{,}17 + 0{,}42\,Q_{12} + \\ + 0{,}13\,(Q_{12} - 1)^2 - 0{,}0125\,(Q_{12} - 0{,}5)^4 \tag{18}$$

Der hydraulische Wirkungsgrad des Laufrades beträgt laut (10'):

$$\eta_{h2} = \frac{1}{\eta_{h1}}\left[1 - (1 - \eta_h)\,\frac{h_{w1} + h_{w2}}{\Sigma h_w}\right]$$

$$\eta_{h2} = \frac{1}{\eta_{h1}}\Big\{1 - [0{,}12 - 0{,}025\,Q_{12} + \\ + 0{,}09\,(Q_{12} - 1)^2] \cdot [1{,}17 - 0{,}13\,(Q_{12} - 1)^2 - 0{,}42\,Q_{12} + 0{,}0125\,(Q_{12} - 0{,}5)^4]\Big\} \tag{19}$$

$$\eta_{h2} = \frac{1 - f_2(Q_{12})}{0{,}9676 + f_1(Q_{12})} \tag{19'}$$

mit $f_2(Q_{12})$ = Glieder 2, 3, 4 der Gleichung 19.

Der Wirkungsgrad des Saugrohres η_{h3} enthält die Widerstandshöhen h_{w3} die Verluste durch $\frac{c_4^2}{2g} = k_{c4} H$ beim Austritt aus dem Saugrohr, sowie diejenigen der Komponente c_{u2} nach dem Laufrad, u.z.:

$$\eta_{h3} = 1 - \frac{1 - \frac{2\pi}{Q}\sqrt{2gH}\int_{r_i}^{r_a}\left(\frac{h_{w2}}{H} + \eta_{h2}\right) k_{cm2} r_2 dr_2 - k_{c4}^2}{\left(1 - \frac{F_2^2}{F_4^2}\right) \frac{2\pi}{Q}\sqrt{2gH}\int_{r_i}^{r_a} k_{c2}^2 k_{cm2} r_2 dr_2} \tag{20}$$

Es bedeuten hier F_2 — die Austrittsfläche aus dem Laufrad, F_4 — Austrittsfläche aus dem Saugrohr, $k_{c2}^2 = \frac{c_2^2}{2gH}$, die anderen Bezeichnungen wurden weiter oben erläutert. Es kann (20) durch Q_{12} ausgedrückt werden (21), was zu Schwierigkeiten führt. Deshalb wird laut (11):

$$\eta_{h3} = \frac{\eta_h}{1 - (1 - \eta_h)\frac{h_{w1} + h_{w2}}{\Sigma h_w}} = \frac{0{,}88 + f(Q_{12})}{1 - f_2(Q_{12})} \tag{20'}$$

Das Verhältnis der Verluste h_{w2} im Laufrad und h_{w3} im Saugrohr, zur Fallhöhe H ist ähnlich wie in (16—16'):

$$\frac{h_{w2}}{H} = 1 - \eta_{h2} = 1 - \frac{1 - f_2(Q_{12})}{0{,}9676 + f_1(Q_{12})} = \frac{f_2(Q_{12}) + f_1(Q_{12}) - 0{,}0324}{0{,}9676 + f_1(Q_{12})} \tag{21}$$

$$\frac{h_{w3}}{H} = 1 - \eta_{h3} = 1 - \frac{0{,}88 + f(Q_{12})}{1 - f_2(Q_{12})} = \frac{0{,}12 - f_2(Q_{12}) - f(Q_{12})}{1 - f_2(Q_{12})} \tag{22}$$

4.6. *Berechnung der Verluste und hydraulischen Wirkungsgrade einer Kaplanturbine nach der vorgeschlagenen analytischen Methode.*

Für eine Kaplanturbine von normaler Schnelläufigkeit $n_s = 600$ und $D_2 = 1$ m sind in Tafel 4 die Verhältnisse der Teilverluste h_{w1} h_{w2} h_{w3} zum Gesamtverlust Σh_w, sowie die hydraulischen Einzelwirkungsgrade η_{h1} η_{h2} η_{h3} und der gesamte hydraulische Wirkungsgrad η_h mittels der Formeln 13 bis 20 berechnet. Die Wirkungsgrade sind laut Tafel 4 in der Abb. 1 dargestellt. Für diesen Normalschnelläufer ist die optimale Beaufschlagung $(Q_{12})_{opt} = 1{,}1\ (m^{0,5}/s)$ d.h. die Laufschaufeln werden in diesem Fall für $Q_{opt} = \sqrt{H} D_2^2 (Q_{12})_{opt} = 1{,}1\sqrt{H} D_2^2$ entworfen. Sowohl oberhalb, wie unterhalb dieser optimalen Berechnungswassermenge sinken die hydraulischen Wirkungsgrade, wie die Praxis dieses bestätigt. Verbesserungen sind bei allen Bestandteilen der Kaplanturbine noch möglich, jedoch prozentuell nur in geringem Umfang. Die Verluste im Saugrohr steigen wesentlich bei

steigender Beaufschlagung, deshalb sollen dessen Querschnitte reichlich bemessen werden. Bei kleinen Wassermengen steigen die prozentuellen Verluste im Laufrad, somit ist die weitere Erforschung der Strömungsverhältnisse im Laufrad wichtig.

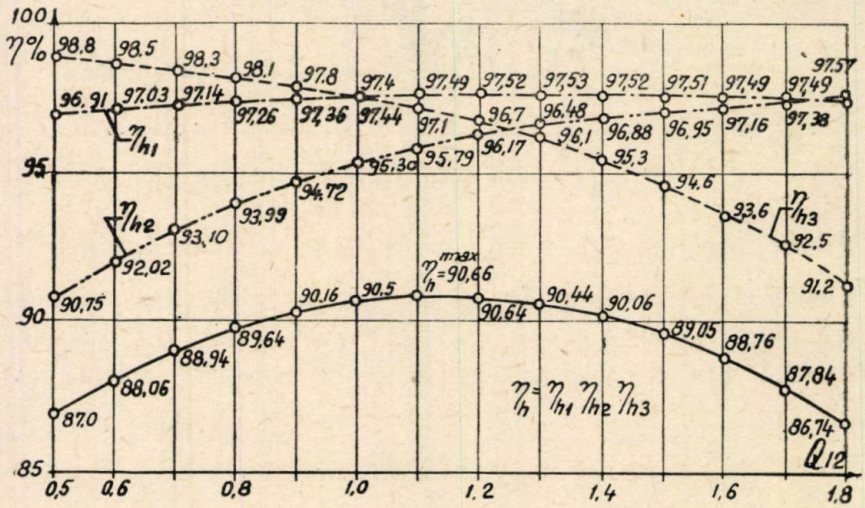


Abb. 1. Die hydraulischen Wirkungsgrade einer Kaplanturbine mit $n_s = 600$ und $D_2 = 1$ m.

Je grösser der Austritts-Durchmesser der Laufrades D_2 ist, um so höhere Wirkungsgrade werden erzielt, wie dieses die Gleichung 13 zeigt. Die Gleichungen (15) bis (22) sind gültig nur für den Bereich $Q_{12} = 0{,}5$ bis 1,8.

5. Die Analyse der Verluste und der hydraulischen Einzelwirkungsgrade einer Propellerturbine

5.1. *Der gesamte hydraulische Wirkungsgrad*

Die Propellerturbine mit einfacher Regulierung der Leitschaufeln, mit an der Nabe befestigten Laufschaufeln hat eine steile und energetisch ungünstige parabolische Wirkungsgradkurve. In der letzten Zeit werden Propellerturbinen selten angewandt. Nur bei Kraftwerken auf grossen Strömen mit vielen Maschineneinheiten ist es nötig, zu untersuchen, welche Anzahl M_P von Propellerturbinen, zusammen mit $M_K = M - M_P$ unter besonderen Umständen, wirtschaftlicher ist als insgesamt $M_K = M$ Kaplanturbinen.

Etwas häufiger als Propeller sind die Thomann-Turbinen (Halbkaplan) mit festen Leitschaufeln und regulierten Laufschaufeln angewandt. Der Wirkungsgrad η der letzteren schreibt sich zwischen η_P und η_K ein.

Für Normalläufer $n_s = 600 - 800$ und $D_2 = 1$ m ist bei Propellerturbinen der gesamte hydraulische Wirkungsgrad:

$$\eta_h = 0{,}85 + 0{,}036\, Q_{12} - 0{,}71\,(Q_{12} - 1{,}4)^2 \tag{23}$$

5.2. *Die Verluste und Einzelwirkungsgrade*

Aehnlich wie unter 4 sind für Gruppe 1 Eintritt bis zum Laufrad:

$$\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w} = 0{,}27 - 0{,}13\,(Q_{12} - 1)^2 \tag{24}$$

$$\frac{h_{w1}}{H} = 1 - \eta_{h1} = (1 - \eta_h)\,\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\eta_{h1} = 1 - (1 - \eta_h)\,\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w} &= 0{,}9595 - 0{,}1917\,(Q_{12} - 1{,}4)^2 - \\ &- Q_{12}\,[0{,}00468\,(Q_{12} - 1)^2 - 0{,}00972] + \\ &+ (Q_{12} - 1)^2\,[0{,}0195 + 0{,}0923\,(Q_{12} - 1{,}4)^2]\end{aligned} \tag{26}$$

Für das Laufrad (Index 2) und das Saugrohr (Index 3) folgen in gleicher Weise:

$$\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w} = 0{,}78 - 0{,}26\, Q_{12} - 0{,}03\, Q_{12}^2 \tag{27}$$

$$\frac{h_{w2}}{H} = 1 - \eta_{h2} = (1 - \eta_h)\,\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w} \quad (28), \qquad \text{mit } \eta_{h2} \text{ laut } (29):$$

$$\eta_{h2} = \frac{1 - [0{,}15 - 0{,}036\, Q_{12} + 0{,}71\,(Q_{12} - 1{,}4)^2]\,(0{,}92 - 0{,}16\, Q_{12}^2)}{0{,}9595 - 0{,}1917\,(Q_{12} - 1{,}4)^2 - Q_{12}\,[\cdot] + (Q_{12} - 1)^2\,[\cdot\cdot]} \tag{29}$$

$$[\cdot] = 0{,}00468\,(Q_{12} - 1)^2 - 0{,}00972$$

$$[\cdot\cdot] = 0{,}0195 + 0{,}0923\,(Q_{12} - 1{,}4)^2$$

$$\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w} = 0{,}08 + 0{,}16\, Q_{12}^2 \tag{30}$$

$$\frac{h_{w3}}{H} = 1 - \eta_{h3} = (1 - \eta_h)\,\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w} \tag{31}$$

$$\eta_{h3} = \frac{\eta_h}{\eta_{h1}\,\eta_{h2}}$$

$$\eta_{h3} = \frac{0{,}85 + 0{,}036\, Q_{12} - 0{,}71\,(Q_{12} - 1{,}4)^2}{1 - [0{,}15 - 0{,}036\, Q_{12} - 0{,}71\,(Q_{12} - 1{,}4)^2]\,(0{,}92 - 0{,}16\, Q_{12}^2)} \tag{32}$$

In der Tafel 5 sind die Verluste und die hydraulischen Wirkungsgrade einer Propellerturbine mit $D_2=1$ bei $n_s=800$ mittels der Gleichungen (23) bis (32) berechnet und in Abb. 2 dargestellt. Die Formeln (23) bis (32) sind gültig für den Bereich $Q_{12}=0{,}7—1{,}8$.

Tafel 5

Hydraulische Wirkungsgrade der Propellerturbine $D_2=1$ m, nach der Methode des Verfassers

Q_{12}	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
$\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w}$	0,2492	0,2648	0,2700	0,2648	0,2492	0,2232	0,1870
$\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w}$	0,6132	0,5527	0,4900	0,4248	0,3572	0,2872	0,2148
$\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w}$	0,1376	0,1825	0,2400	0,3104	0,3936	0,4896	0,5982
$\eta\,\%$	41,70	62,24	77,24	86,28	90,04	87,92	80,12
η_{h1}	85,47	90,01	93,86	96,37	97,52	97,30	96,27
η_{h2}	58,20	76,80	88,10	94,00	96,20	96,50	95,50
η_{h3}	83,70	90,05	93,40	95,30	95,90	93,60	87,00

Bei der Berechnungswassermenge $(Q)_{opt}=\sqrt{H}\,D_2^2\,(Q_{12})_{opt}$ für diese Turbine mit $(Q_{12})_{opt}=1{,}4$ ist der beste hydraulische Wirkungsgrad erreicht. Bei anderen Schnelläufigkeiten n_s wächst $(Q_{12})_{opt}$ mit n_s und umgekehrt.

Die Verluste im Saugrohr h_{w3} sind bei $Q_{12}>1{,}4$ bedeutend grösser als im Laufrad, bei kleinen Q_{12} hingegen ist $h_{w3}<h_{w2}$.

Die Laufradverluste h_{w2} sind bedeutend grösser als diejenigen der Kaplanturbinen. Desgleichen ist h_{w2} im Laufrad übertrieben gross im Vergleich zu h_{w1} und h_{w3} der Propellerturbine.

6. Die Verluste und hydraulischen Wirkungsgrade der Rohrturbinen

Für Niederdruckanlagen wurden in letzter Zeit neue Turbinen entwickelt, gebaut und in Betrieb genommen. Diese — wegen ihrer Form — Rohrturbinen benannt, wurden von Escher Wyss und später von Neyrpic gebaut und gegenwärtig sind auch in der Sowjetunion grössere Kraftwerke mit Rohrturbinen im Bau begriffen. In Abschnitt 7 wird eine Berechnungsmethode für Rohrturbinen vorgeschlagen.

Für die Analyse der hydraulischen Verluste und Wirkungsgrade der Rohrturbinen und deren einzelnen Bestandteile, sind in der Literatur zur

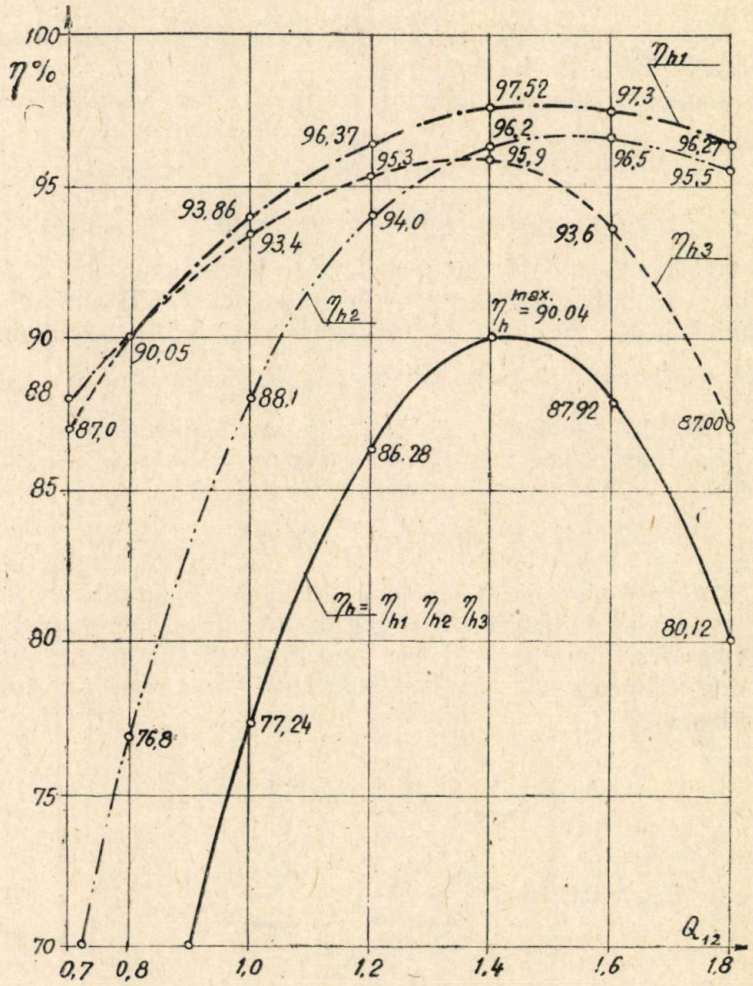


Abb. 2. Die hydraulischen Wirkungsgrade einer Propellerturbine mit D_2=1 m.

Zeit noch keine Angaben zu finden, sodass die folgende Methode sich nur auf Berechnungen stützt. Die experimentelle Bestätigung, die Berichtigung und Weiterentwicklung der vorgeschlagenen Methode ist erwünscht.

Auch für die Rohrturbine ist es zweckmässig die Bestandteil in drei Gruppen einzuteilen:

(1) Eintritt —, Rotationsraum mit schwenkbaren Leitschaufeln und Zwischenraum bis zum Laufrad;

(2) Laufrad zwischen Ein-und Austritt der regulierbaren Laufschaufeln;

(3) Saugrohr als geradliniger Difusor.

6.1. *Verluste und hydraulischer Wirkungsgrad der Gruppe 1.*

Die von der Beaufschlagung abhängige Wirkungsgradform ist etwas flacher und deshalb günstiger als diejenige der Kaplanturbine gleicher Schnelläufigkeit n_s, wie die Uebernahmsversuche ergeben haben. Insbesonders bei höherer Beaufschlagung, d. h. bei grösseren $Q_{12}=\frac{Q}{\sqrt{H}\,D_2^2}$ ist η_h der Rohrturbine höher als derjenige der Kaplanturbine.

Für eine Rohrturbine mit $n_s=600—800$ und $D_2=1$ m Austrittsdurchmesser des Laufrades ist der Gesamtwirkungsgrad:

$$\eta_h = 0{,}88 + 0{,}03\,Q_{12} - 0{,}06\,(Q_{12}-1{,}1)^2 \tag{33}$$

Für Gruppe 1 sind die Verluste h_{w1} und der hydraulische Wirkungsgrad η_{h1} mit Index 1 bezeichnet. Durch das Aufteilen der ganzen Strecke, vom oberwasserseitigen Eintritt bis zum Laufrad, in kurze Teilstrecken ΔL, mit den entsprechenden äquivalenten Durchmessern d, ist der hydraulische Verlust:

$$h_{w1}=\sum \frac{c^2}{2g}\left(\frac{\lambda}{d}\Delta L+\zeta\right)+\zeta_u\frac{c_{u0}^2}{2g}$$

$$h_{w1}=0{,}0826\,Q^2\left(\sum_1^n\frac{\lambda\,\Delta L}{d^5}+\sum_1^k\frac{\zeta}{d^4}\right)+\zeta_u\frac{c_{u0}^2}{2g}$$

Es sind hier bezeichnet: $c=\frac{4Q}{\pi d^2}$ — die Achsialgeschwindigkeit, veränderlich in den einzelnen Teilstrecken, c_{u0} — die Tangentialkomponente im Leitrad und $\lambda\,\zeta\,\zeta_u$ hydromechanische bekannte Koeffizienten. Ersetzt man $Q=\sqrt{H}\,D_2^2\,Q_{12}$ und mit Berücksichtigung des mittleren konstanten Wertes von c_{u0} wird:

$$h_{w1}=k\,Q_{12}^2+k_0\,;\quad \frac{h_{w1}}{H}=\frac{k}{H}\,Q_{12}^2+\frac{k_0}{H}$$

Durch die Anwendung der sukzessiven Aproximationsmethode wurden angenähert bestimmt:

$$\frac{k}{H} \sim 0{,}003 \; ; \quad \frac{k_0}{H} \sim 0{,}01 \quad \text{und}$$

$$\frac{h_{w1}}{H} = 0{,}003\, Q_{12}^2 + 0{,}01 \tag{34}$$

Aus Gleichung (9) folgt: $\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w} = \frac{1-\eta_{h1}}{1-\eta_h} = \frac{h_{w1}/H}{1-\eta_h}$ und mit den Werten (33), (34):

$$\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w} = \frac{0{,}003\, Q_{12}^2 + 0{,}01}{0{,}12 - 0{,}03\, Q_{12} + 0{,}06\,(Q_{12} - 1{,}1)^2} \tag{35}$$

$$\eta_{h1} = 1 - \frac{h_{r1}}{H} = 0{,}99 - 0{,}003\, Q_{12}^2 \tag{36}$$

Für Gruppe 3 (Saugrohr) ist in ähnlicher Weise das Verhältnis h_{w3}/H bestimmt, wobei aus den Grenzbedingungen $k_3 = 0{,}005$ und $k_3' = 0{,}04$ gefunden wurden. Es sind bekannt:

$$\frac{h_{w3}}{H} = k_3\, Q_{12}^2 + k_3'\,(Q_{12} - 1{,}4)^2 = 0{,}005\, Q_{12}^2 + 0{,}04\,(Q_{12} - 1{,}4)^2 \tag{37}$$

$$\eta_{h3} = 1 - \frac{h_{w3}}{H} = 1 - 0{,}005\, Q_{12}^2 - 0{,}04\,(Q_{12} - 1{,}4)^2$$

$$\eta_{h3} = 0{,}9216 + 0{,}112\, Q_{12} - 0{,}045\, Q_{12}^2 \tag{38}$$

$$\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w} = \frac{h_{w3}/H}{1-\eta_h} = \frac{0{,}005\, Q_{12}^2 + 0{,}04\,(Q_{12} - 1{,}4)^2}{0{,}12 - 0{,}03\, Q_{12} + 0{,}06\,(Q_{12} - 1{,}1)^2} \tag{39}$$

Für Gruppe 2 (Laufrad) folgen aus (33, 35, 39) und der Bedingung

$$h_{w1} + h_{w2} + h_{w3} = \Sigma h_w$$

$$\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w} = 1 - \frac{h_{w1} + h_{w3}}{\Sigma h_w} = \frac{0{,}003\, Q_{12}^2 + 0{,}01 + 0{,}005\, Q_{12}^2 + 0{,}04\,(Q_{12} - 1{,}4)^2}{0{,}12 - 0{,}03\, Q_{12} + 0{,}06\,(Q_{12} - 1{,}1)^2}$$

$$\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w} = \frac{0{,}04\,(Q_{12} - 1{,}4)^2 + 0{,}008\, Q_{12}^2 + 0{,}01}{0{,}12 - 0{,}03\, Q_{12} + 0{,}06\,(Q_{12} - 1{,}1)^2} \tag{40}$$

Mittels der Gleichungen (7) und (10) sind die Verluste h_{w2} und η_{h2} — der hydraulische Wirkungsgrad des Laufrades bestimmt:

$$\frac{h_{w2}}{H} = (1 - \eta_h)\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w} = 0{,}04\,(Q_{12} - 1{,}4)^2 + 0{,}008\, Q_{12}^2 + 0{,}01 \tag{41}$$

$$\eta_{h2} = 1 - (1 - \eta_h)\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w}$$

$$\eta_{h2} = 0{,}99 - 0{,}04\,(Q_{12} - 1{,}4)^2 - 0{,}008\, Q_{12}^2 \tag{42}$$

Tafel 6

Hydraulische Wirkungsgrade der Rohrturbine $D_2 = 1$, nach der Methode des Verfassers

Q_{12}	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
$\frac{h_{w1}}{\Sigma h_w}$	0,0949	0,1145	0,1436	0,1690	0,1907	0,2035	0,2063
$\frac{h_{w2}}{\Sigma h_w}$	0,6711	0,7120	0,7307	0,7270	0,6918	0,6655	0,5567
$\frac{h_{w3}}{\Sigma h_w}$	0,2340	0,1735	0,1257	0,1040	0,1175	0,1310	0,2370
$\frac{h_{w1}}{H}$	0,0111	0,0119	0,0130	0,0143	0,0159	0,0177	0,0197
$\frac{h_{w2}}{H}$	0,0785	0,0719	0,0662	0,0615	0,0577	0,0579	0,0531
$\frac{h_{w3}}{H}$	0,0274	0,0176	0,0114	0,0088	0,0098	0,0114	0,0226
$\frac{\Sigma h_w}{H}$	0,1170	0,1014	0,0906	0,0846	0,0834	0,0870	0,0954
η_h %	88,30	89,86	90,94	91,54	91,66	91,30	90,46
η_{h1} %	98,89	98,81	98,70	98,57	98,41	98,23	98,03
η_{h2} %	92,15	92,81	93,38	93,85	94,23	94,27	94,49
η_{h3} %	97,26	98,24	98,86	99,12	99,02	98,86	97,74

Die Gleichungen (33) bis (42) sind nur für den Bereich $Q_{12} = 0{,}6$ bis 1,8 gültig, für welche Tafel 6 und Abb. 3 die zahlenmässige Anwendung für eine Rohrturbine von $n_s = 700$ und $D_2 = 1$ m erläutern. Vergleicht man Abb. 1—2—3 so sind die hydraulischen Vorteile der Rohrturbinen ersichtlich, was auch die Praxis bestätigt.

7. Vorgeschlagene Dimensionierung der Rohrturbinen

7.1. *Die Entwicklung der Rohrturbinen*

Die Kaplanturbinen haben im Laufe von 4—Jahrzehnten stetige Fortschritte erzielt, insbesonders hohe Leistungen und Wirkungsgrade, sowie gute Doppelregulierung.

Bei kleinen Fallhöhen $H < 20$ m und $P < 20\,000$ PS/Turbine sind die Baukosten der Niederdruck-Kraftwerke umso höher, je kleiner H und P sind was zur Erforschung neuartiger Typen, der Rohrturbinen, führte.

Die erste Rohrturbine wurde von Escher Wyss im Jahre 1936 für das Kleinkraftwerk Rostin gebaut, deren Schema gegenwärtig im Prinzip noch gültig ist, jedoch wurden in einem Viertel-Jahrhundert grosse Fortschritte in der Anordnung und den Bestandteilen erzielt. Bis 1951 hat Escher Wyss bereits 75 Rohrturbinen mit insgesant 143 000 PS gebaut und noch grössere Erfolge wurden bis 1962 erzielt. Die meisten Rohr-

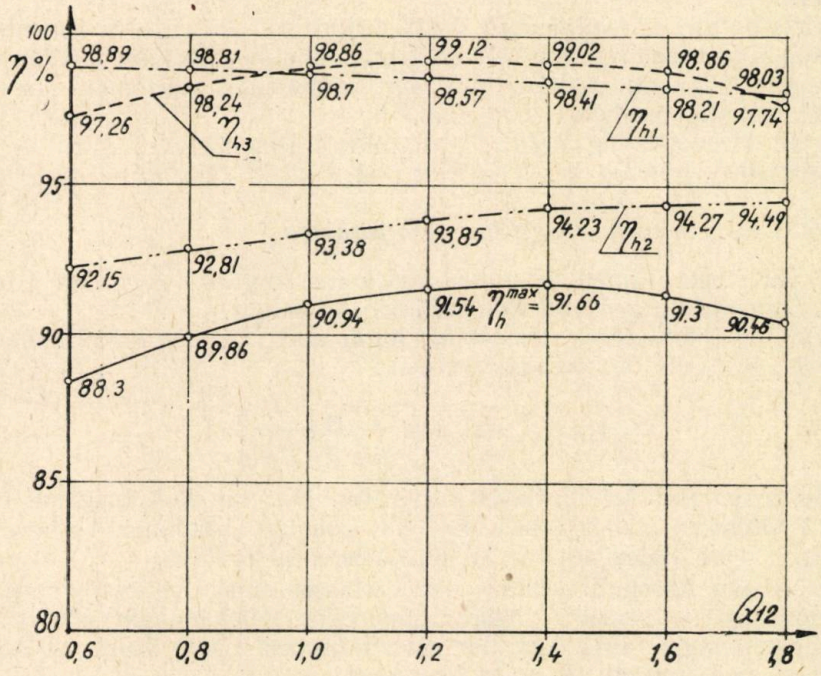


Abb. 3. Die hydraulischen Wirkungsgrade einer Rohrturbine mit n_s=600—800 und D_2=1 m.

turbinen EW erhöhen die Umdrehungszahl n_g — des gekapselten Generators, gegenüber n — der Turbine, durch Planetengetriebe, Stirnrad oder Kegelräder. Neuerdings baut EK grössere Rohrturbinen bei $H=7-15$ mit direktem Antrieb.

Im letzten Jahrzehnt hat Neyrpic eine grosse Anzahl Rohrturbinen mit direktem Antrieb gebaut und die Tatsache bestätigt, dass Rohrturbinen-Kraftwerke um 25—30% billiger sind als die Kaplan-Kraftwerke, bei gleichen Wirkungsgraden. Die grössten gebauten Turbinen sind diejenigen von Argentat mit $P=19\,250$ PS und $H=16{,}5$ m.

Das in der Sowjetunion im Bau begriffene KW-Kiev, $N=380\,000$ kW, hat 24 Rohrturbinen von je 22 000 PS bei $H=17$ bis 10 m und $D_1=6$ m Laufraddurchmesser. Unter anderen projektierten Kraftwerken, die mit Rohrturbinen ausgerüstet werden, sind die grössten Einheiten im KW Nijni-Kamsk mit $P=61\,000$ PS je Turbine von $D_1=8$ m Laufraddurchmesser mit veränderlicher Fallhöhe von $H=9-13$ m.

7.2. *Varianten der Rohrturbinen*

Die vor 1951 gebauten Rohrturbinen haben, mit Ausnahme von Rostin, die Sonderform des achsialkonzentrischen gemeinsamen hydraulischen und elektrischen Rotors, genant auch A-Fischer-Turbine. Ueber 70 solche Turbinen sind bereits 10—20 Jahre im Betrieb und haben sich bewährt.

Wirtschaftlicher sind jedoch die Rohrturbinen mit in der Innenhaube gekapselten Generatoren, die seit 1951 ausschliesslich gebaut werden u.z.:

— mit direktem Antrieb mit der Innen-Generatorhaube vor dem Laufrad, günstig bei höheren H und P;

—mit Uebersetzung $n_g/n = 3—5$ mittels Planeten —, Stirn — oder Kegelgetrieben, günstig bei $H < 7$ m und $P < 20\,000$ PS.

7.3. *Die Dimensionierung der Rohrturbinen*

In der einschlägigen Literatur sind keine Angaben über den Entwurf der Hauptabmessungen von Rohrturbinen mitgeteilt.

Wie für jede Ueberdruckturbine, kann auch für die Rohrturbine das Aehnlichkeitsgesetz angewandt werden:

$$D_1 = \lambda D_{1m} \text{ mit } \lambda = \frac{n_s}{n_{sm}} \frac{n_m}{n} \left(\frac{H}{H_m} \frac{\eta}{\eta_m} \right)^{1/2} \tag{43}$$

als adimensionaler Aehnlichkeits-Parameter. Die mit dem Index m bezeichneten Grössen beziehen sich auf die gebaute, bekannte Turbine und diejenigen ohne Index auf die zu projektierende Turbine.

In diesem Abschnitt schlägt der Verfasser eine direkte Methode vor, die sich auf allgemeine hydromechanische Gleichungen stützt. Die Hauptabmessungen sind aus der schematischen Darstellung in Abb. 4 ersichtlich und werden wie folgt berechnet.

Aus den Parametern des Kraftwerkes H — Nettofallhöhe und P— (PS) — Einheitsleistung lässt sich die Schnelläufigkeit bestimmen. Einerseits soll $n_s < n_{sk}$ sein, damit keine Kavitationsgefahr bestehe, andererseits liefert n_s die entsprechende Umdrehungszahl n (U/min). Die kritische Schnelläufigkeit n_{sk} beträgt für Rohrturbinen nach unseren Studien:

$$n_{sk} = \frac{30\,000}{24 + H \dfrac{11{,}5}{10 - H_s}} - 40 \tag{44}$$

Es sind hier mit $H_s > 0$ die *„Saughöhe"* und $H_s < 0$ die *„Gegendurckhöhe"* in der Laufradmitte bezeichnet, deren Grösse aus wirtschaftlichen Rechnungen bekannt ist. Die reelle Schnelläufigkeit $n_s = k_s n_s$ wird mit $k_s = 0{,}90 — 0{,}95$ so bestimmt, dass die entsprechende Umdrehungszahl synchron sei $n = \dfrac{3000}{p}$ mit p — Polpaare des Generators. Bei

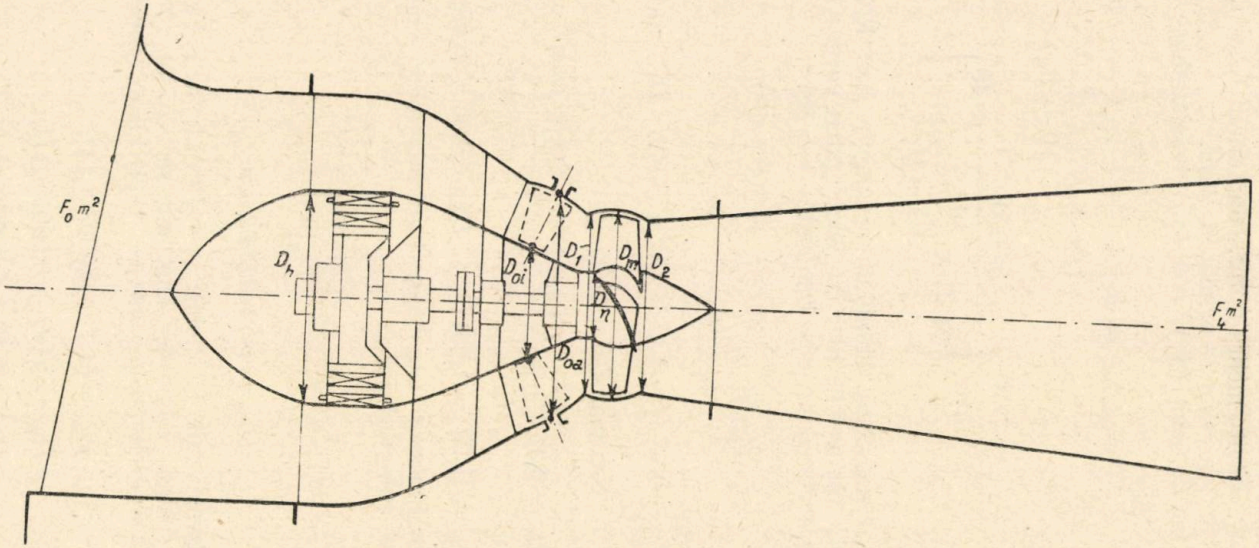


Abb. 4. Schema einer Rohrturbine und Definition der berechneten Abmessungen.

Anwendung von Getrieben zwischen der Turbine und dem Generator, ist letztere Bedingung nicht mehr nötig, da durch das Uebertragungsverhältnis $i=2-5$, $n_g = i\,n$ — synchron wird.

Andererseits ist n, nach (46), aus (45) bestimmbar:

$$n_s = n\frac{P^{0,5}}{H^{1,25}} = k_s\,n_{sk} = k_s\left(\frac{30\,000}{24+H\dfrac{11,5}{10-H_s}}-40\right) \tag{45}$$

$$n = k_s\frac{H^{1,25}}{P^{0,5}}\left(\frac{30\,000}{24+H\dfrac{11,5}{10-H_s}}-40\right) \tag{46}$$

Sämtliche hydraulischen Hauptabmessungen der Rohrturbine sind Funktionen von n_s für welche hier die wichtigsten vorgeschlagen werden.

Der Eintrittsdurchmesser des Laufrades beträgt:

$$D_1 = \left(0,37+\frac{237}{n_s}+\frac{17\,500}{n_s^2}\right)\frac{Q^{0,5}}{H^{0,25}} \tag{47}$$

Mit $n_s = n\dfrac{P^{0,5}}{H^{1,25}}$ und $P=13,33\;QH\eta$ kann D_1 auch nach (47′) geschrieben werden, der von $QH\eta$ abhängt:

$$D_1 = 0,37\frac{Q^{0,5}}{H^{0,25}}+\frac{64,9\,H^{0,5}}{n\;\eta^{0,5}}+\frac{1313\,H^{1,25}}{Q^{0,5}\,\eta\,n^2} \tag{47′}$$

Es folgen $D_m = (1,02\ldots1,03)\,D_1$; $D_2 = (0,96\ldots0,98)\,D_1$ (48)

Der Nabendurchmesser D_n beim Laufradeintritt und D_{nm} an der Schaufelmitte sind entsprechend:

$$D_n = \left(0,32+\frac{1400}{n_s^{1,4}}\right)D_1 \tag{49}$$

$$D_{nm} = (1+0,0002\,n_s)\,D_n \tag{50}$$

Bei Rohrturbinen mit Getrieben — ähnlich den Escher Wyss — Rohrturbinen — sind folgende Durchmesser gültig: D_h — Haube; D_{0a} D_{0i} die Leitraddurchmesser, aussen und innen gemessen, u.z.:

$$D_h = (1,1-0,0003\,n_s)\,D_1 \tag{51}$$

$$D_{0a} = (0,84+0,0005\,n_s)\,D_1 \tag{52}$$

$$D_{0i} = (0,32+0,00036\,n_s)\,D_1 \tag{52′}$$

Bei direktem Antrieb ist D vom Aussendurchmesser des Generator-Stators abhängig und grösser wie (51).

Der Eintrittsquerschnitt beim Oberwasser F_0 und Austrittsquerschnitt aus dem Saugrohr F_4 sind angenähert :

$$F_0 = \frac{Q}{0{,}8 + 0{,}1\sqrt{H}}\ (m^2)\ ;\quad F_4 = \frac{Q}{1 + 0{,}3\sqrt{H}},\ m^2, \tag{53}$$

Durch die Aehnlichkeit mit ausgeführten Rohrturbinen erhält man auch $F_4 = k_4\ D_1^2$ mit $k_4 = 3{,}1 \ldots 3{,}5$ wachsend mit H.

Die Gleichungen (47—53) wurden im Jahre 1959 vom Verfasser erzielt, unter Berücksichtigung der im Abschnitt 6 entwickelten Beziehungen zwischen den Wirkungsgraden, insbesonders zwecks Erzielung von Wirkungsgraden der Rohrturbinen um 2—3% höher als bei der Kaplanturbine, bei $n_s > 600$ und bei grösseren $Q_{12} = \dfrac{Q}{\sqrt{H}\,D_2^2}$.

Nachträglich, nach den erhaltenen Angaben über gebaute Rohrturbinen, hat der Verfasser die vorgeschlagene Methode mit den reellen Hauptabmessungen verglichen. Als Beweis für die Genauigkeit obiger Gleichungen dient die Tafel 7, welche den Vergleich des Laufrades-Eintrittsdurchmessers D_1 — berechnet und D_1 — reell, für 27 Anlagen darstellt. Die Summe $\Sigma\varepsilon$ der Abweichungen $\varepsilon = 100\,\dfrac{D_1 - \text{ber} - D_1 - \text{reell}}{D_1 - \text{reell}}$ in Prozenten sind bei 12 Rohrturbinen — 26,09%, bei 14 Turbinen +35,3% und bei einer Turbine 0%. Demnach gibt Gleichung 47 Werte, als Mittel gerechnet, mit $\varepsilon_m = 100\,\dfrac{35{,}3 - 26{,}09}{27} = 0{,}34\%$. Die positiven und negativen Abweichungen bestätigen die Genauigkeit der Formel (47).

Die Tafel 8 zeigt die verschiedenen Verhältnisse zwischen den Abmessungen der Rohrturbinen von veränderlicher Schnelläufigkeit.

7.4 *Die Gewichte der Rohrturbinen*

In der Literatur fanden wir nur Angaben über 3 Rohrturbinen (siehe Tafel 9), deshalb wird hier eine analytische Methode vorgeschlagen, die aus den hydraulischen und hydromechanischen Beziehungen folgt, mit Ausnahme der Maschinenkonstanten C_t C_g die statistich bestimmbar sind.

Für das Gewicht G eines Agregates mit Rohrturbinen, gekapseltem Generator und Hilfsausrüstungen (Regler, Ventile, Nebenpumpen u.s.w.), wird folgende Gleichung vorgeschlangen :

$$G = C_t\,\Phi\,A^{1{,}75}\,\frac{P^{0{,}875}}{H^{1{,}312}} + C_g\left(\frac{P}{n_g}\right)^{0{,}75},\ \text{kg} \tag{54}$$

Es bedeuten hier : $A = 0{,}1077 + \dfrac{78{,}6}{n_s}$, P—die Leistung an der Turbinen Welle in PS, n- Umdrehungszahl der Turbine, n_g — des Generators ; bei direktem Antrieb $n_g = n$, bei Getrieben $n_g = i\ n$, mit $i = 2 \ldots 4$, wie aus wirtschaftlichen Rechnungen hervorgeht.

Tafel 7

Nachprüfung der Formel D_1 (47) an Hand von gebauten Rohrturbinen

Rohrturbine	$P\,(PS)$	$Q\left(\frac{m^3}{s}\right)$	$H\,(m)$	$n\left(\frac{U}{\min}\right)$	n_s	η	D_1 reell	D_1 ber.	ε %
Maignannerie	69	3,5	1,85	214	825	0,802	1,12	1,095	— 2,23
L'Ame	200	9,7	1,9	158	1 000	0,816	1,60	1,655	+ 3,43
Rethel	250	9,2	2,5	176,5	888	0,818	1,65	1,590	— 3,69
Lagarde	252	10,3	2,25	176,5	1 015	0,816	1,60	1,625	+ 1,56
Verdun	327	9,5	3,13	176,5	766	0,818	1,65	1,640	— 0,61
Mercuest	386	10,1	3,5	176,5	724	0,818	1,65	1,698	+ 2,91
Osberghausen *	530	6,5	7,25	312	604	0,842	1,30	1,260	— 3,08
Herrfors *	582	14,4	3,5	166,7	842	0,869	1,80	1,870	+ 3,89
Bürglen *	610	18,0	3,06	115,4	703	0,834	2,30	2,380	+ 3,47
Rio Tunuyan *	780	9,7	6,7	270	699	0,898	1,45	1,440	— 0,69
Weilheim *	783	15,6	4,35	186	830	0,863	1,80	1,860	+ 3,33
Finsing	1 016	9,9	8,65	375	806	0,891	1,30	1,274	— 2,00
Puhos *	1 087	20,0	4,5	150	755	0,906	2,20	2,194	— 0,27
Lartige	1 090	7,5	13,5	500	638	0,807	1,12	1,122	+ 0,18
Castet	1 100	14,5	7,0	250	729	0,818	1,65	1,703	+ 3,21
Reutte *	1 690	24,0	6,07	166,7	720	0,871	2,20	2,280	+ 3,63
Rüchlig *	1 835	47.0	3,3	75	722	0,882	3,70	3,720	+ 0,54
Buckenhofen	2 050	35,0	5,18	166,7	966	0,850	2,45	2,484	+ 1,43
Lech III	5 331	47,5	9,4	166,7	742	0,896	2,85	2,844	— 0,21
Trier *	6 000	99,5	5.08	78	793	0,891	4,60	4,625	+ 0,54
Cambeyrac	7 090	56,0	10,7	150	650	0,873	3,10	3,200	+ 3,23
Detzem *	8 000	95,3	7,0	100	786	0,900	4,20	4,20	0
Beaumont-M.	12 000	94,2	11,3	150	794	0,844	3,80	3,69	— 2,89
St Malo	12 250	225,0	4,8	88,25	1 375	0,851	5,80	5,59	— 3,62
Rance	13 600	183,0	6,5	93,75	1 051	0,858	5,35	5,200	— 2,80
Argentat	19 250	101,0	16,5	150	626	0,857	3,80	3,950	+ 3,95
Kiew	22 000	245,0	7,7	88,25	1 023	0,876	6,00	5,820	— 3,00

* Mit Palnetengetrieben, Stirnräder, mit n_g — Generator wesentlich grösser als n — Turbine. Die Turbinen ohne (*) treiben die Generatoren direkt an.

Verhältnisse zwischen den Abmessungen der Rohrturbinen *Tafel 8*

$n_s = n \frac{P^{0,5}}{H^{1,25}}$	500	600	700	800	900	1000	1200	1400
$\frac{D_1}{Q^{0,5}/H^{0,25}}$	0,914	0,814	0,744	0,694	0,649	0,624	0,580	0,548
D_n/D_1	0,445	0,415	0,396	0,382	0,372	0,364	0,353	0,347
D_h/D_1	0,950	0,920	0,890	0,860	0,830	0,800	0,740	0,680
D_{oa}/D_1	1,090	1,140	1,190	1,240	1,290	1,340	1,440	1,540
D_{oi}/D_1	0,500	0,536	0,572	0,608	0,644	0,680	0,752	0,824

Nachprüfung der Formel (54) des Gewichtes von Rohrturbinen *Tafel 9*

Rohrturbine	St Malo	Rance	Kiew
H (m)	4,8	6,5	7,7
P $\frac{PS}{\text{Turbine}}$	12 250	13 600	22 000
$n = n_g$	88,25	93,75	88,25
$n_s = n \frac{P^{0,5}}{H^{1,25}}$	1 375	1 054	1 020
$\Phi A^{1,75} \frac{P^{0,875}}{H^{1,312}}$	22,30	19,05	24,65
$\left(\frac{P}{n_g}\right)^{0,75}$	40,45	41,80	62,60
C_t	22 000	17 000	15 000
$C_g = 3\,000 + \frac{100\,000}{P/n}$	3 720	3 690	3 400
G_t (kg)	490 600	323 900	369 800
G_g (kg)	150 500	154 200	206 600
$G = G_t + G_g$	641 100	478 100	576 400
G' (reell)	644 000	476 000	570 000
$\frac{G - G'}{G'}$ 100 (%)	− 0,45	+ 0,44	+ 1,12

Für die Turbinen-Konstante C_t und Generator C_g werden vorläufig folgende Werte vorgeschlagen:

— für Rohrturbinen, mit Eintrittstrichter und Saugrohr aus geschweisstem Blech: $C_t \sim 22\,000$;

— bei Blechbekleidung zwischen dem Stutzen vor dem Leitrad, bis kurz nach dem Laufrad, bei $P < 20\,000$ PS, $\sim C_t$ 17 000;

— bei sehr grossen Rohrturbinen mit vorgefertigten Eisenbeton Teilstücken ist $C_t \sim 15\,000$;

— für $C_g = a + \frac{b}{P/n}$ ist $a = 3\,000$ . . $4\,000$ und $b = 90\,000$ . . $110\,000$.

In der Tafel 9 werden, für 3 Rohrturbinen, verglichen: $G = G_t + G_g$ — laut Formel (54), mit dem reellen G', wobei dedeuten:

$G_t = C_t \Phi A^{1,75} \frac{P^{0,875}}{H^{1,312}}$ . . (54′) — das Gewicht der Turbine mit Nebenausrüstungen, die durch $\Phi = 1{,}05$ gekennzeichnet sind;

$G_g = C_g \left(\frac{P}{n_g}\right)^{0,75} = \left(a + \frac{b}{P/n}\right)\left(\frac{P}{n_g}\right)^{0,75}$ (54″) das Gewicht des Generators, für direkten Antrieb. Bei Getrieben wird G_g um 15 . . 25% vergrössert. Die kleine Ziffer für $i = 2$, die grosse für das Uebersetzungsverhältnis $i = 5$ gültig.

Die Abweichungen $\frac{G - G'}{G'}$ sind sehr gering, sodass der Aufbau der Gl. (54) richtig ist. Es müssen hingegen die Konstanten C_t C_g durch weitere praktische Konstruktionen bestätigt werden.

7.5. *Das Einheitsgewicht der Rohrturbinen.*

Mit $\Phi = 1{,}05$, $C_t = 22\,000$, $A^{1,75} = \left(0{,}1077 + \frac{78{,}6}{n_s}\right)^{1,75} = 0{,}0631$, für $n_s = 800$, wird laut (54′):

$$G_t = C_t \Phi A^{1,75} \frac{P^{0,875}}{H^{1,312}} \sim 1456 \frac{P^{0,875}}{H^{1,312}}.$$

Das Einheitsgewicht, bezogen au 1 PS, entspricht demmach:

$$g_t = \frac{G_t}{P} \sim \frac{1456}{P^{0,125} H^{1,312}}, \text{ kg/}PS, \tag{55}$$

Für den direkt angetriebenen Generator ist; entsprechend $C_g = 3\,500$ und $n_g = n$:

$$g_g = \frac{G_g}{P} \sim 23{,}3 \frac{P^{0,125}}{H^{0,938}} \tag{56}$$

$$g = g_t + g_g \sim \frac{1456}{P^{0,125} H^{1,312}} + 23{,}3 \frac{P^{0,125}}{H^{0,938}} \text{ (kg/}PS) \tag{57}$$

Es wurde hier ersetzt:

$$n = n_s \frac{H^{1,25}}{P^{0,5}} = 800 \frac{H^{1,25}}{P^{0,5}}$$

In der Tafel 10 sind die Einheitsgewichte, für verschiedene P, H, gerechnet. Es sinken $g = f(P, H)$ sehr ausgeprägt mit steigender Fallhöhe H und Leistung P, eine bekannte praktische Tatsache, die jedoch hier analytisch bewiesen wird.

Tafel 10

Einheitsgewichte g_t — Turbine, g_g — Generator und g kg/PS Gesamtgewicht des Rohrturbinen — Aggregates

Fallhöhe H (m)		5			10			15			20		
$H^{1,312}$		8,28			20,52			34,8			50,8		
$H^{0,938}$		4,52			8,67			12,7			16,6		
$P\left(\frac{RS}{\text{Turb.}}\right)$	$P^{0,125}$	g_t	g_g	g	g_t	g_g	g	g_t	g_g	g	g_t	g_g	g
1 000	2,37	74,20	12,21	86,41	30,00	6,44	36,44	17,68	4,34	22,02	12,11	3,32	15,43
5 000	2,90	60,70	14,95	75,65	24,50	7,80	32,30	14,45	5,32	19,77	9,91	4,07	13,98
10 000	3,16	55,70	16,31	72,01	22,46	8,50	30,96	13,25	5,80	19,05	9,08	4,44	13,52
20 000	3,45	51,00	17,75	68,75	20,54	9,26	29,80	12,12	6,32	18,44	8,31	4,84	13,15

7.6. *Die Kosten der Rohrturbinen.*

Bezeichnet man mit p_t — den Einheitspreis je kg Turbine und p_g — Generator, in einer beliebigen Valuta, so sind die Kosten eines ganzen Rohrturbinen-Aggregates:

$$I = p_t G_t + p_g G_g \qquad (57)$$

Vergleicht man I des Rohrturbinen-Aggregates, mit I_K eines Kaplan-Aggregates, gleicher P und H, so folgt I mit 10 . . 15% billiger als I_K

Der Achsenabstand der Turbinen ist bei Rohrturbinen wesentlich geringer. Die Bautiefe ist desgleichen kleiner, wegen der horizontalen Disposition der Rohrturbine und die baulichen Teile benötigen kleinere Baumengen. Im ganzen ist das ganze Krafthaus mit Rohrturbinen um 25—30% billiger, was praktisch erwiesen ist und hiemit ist die zukünftige Entwicklung der Rohrtubinen, bei kleinen und mittleren Fallhöhen gesichert.

7.7. Zukünftige Entwicklung der Kraftwerke mit Rohrturbinen.

Wie es die bisher bekannten Angaben über die sowjetischen Projekte andeuten werden in den K. W-Nijni-Kamsk, bezw. Tscheboksar, Rohrturbinen mit $P=60\,000$ *PS*/Turbine demnächst eingebaut.

Die für Rohrturbinen günstigste Fallhöhe bleibt, bei einstufigen Turbinen, $H=15$—20 m und $n_s > 600$—$1\,400$. Durch die Serienschaltung zweier Laufrädern kann der Bereich von H-max auf 30 m erhöht werden. Besonders günstig ist die Anordnung mit Laufrad 1 und folgendem Gegenlaufrad 2, ohne Zwischenstator. Dadurch erhöht sich die Umdrehzahl, relativ, auf 2n, welches die Kosten wesentlich verbilligt, trotz der kostruktiven Schwierigkeit die durch das umgekehrte Drehen des elektrischen Stators gegenüber dem Rotorentstcht.

8. Schlussfolgerungen

Die obigen Berechnungs-Methoden, ihre tabellarischen Anwendungen und die erläuterten Vergleiche mit den praktischen Erfahrungen, deuten auf folgende Ergebnisse hin:

— es ist möglich die hydraulischen Verluste h_{w1} vor dem Laufrad, h_{w2} — im Laufrad und h_{w3} — im Saugrohr analytisch zu erfassen;

— für Niederdruckturbinen: Kaplan —, Propeller — und Rohrturbinen konnten, auf Grund von hydraulischen und hydromechanischen Gleichungen, die 3-Komponenten der Verluste bestimmt werden, u.z.: bezogen einerseits auf $\Sigma h_w = h_{w1} + h_{w2} + h_{w3}$, andererseits auf die Fallhöhe H und alle abhängig von $Q_{12} = \dfrac{Q}{\sqrt{H}\, D_2^2}$. Somit sind $\dfrac{h_{w1}}{\Sigma h_w}$; $\dfrac{h_{w2}}{\Sigma h_w}$; $\dfrac{h_{w3}}{\Sigma h_w}$;

$$\frac{h_{w1}}{H}\,;\ \frac{h_{w2}}{H}\,;\ \frac{h_{w3}}{H}\,;\ \frac{\Sigma h_w}{H} = F(Q_{12})$$

für die untersuchten drei Turbinentypen, als analytische Funktionen von Q_{12} bestimmt;

— für die Kaplanturbine konnten diese Funktionen, an Hand von Geschwindigkeitsmessungen und Druckmessungen, vor — und nach dem Laufrad nachgeprüft werden (Tafeln 1 bis 4). Für die Propeller — und Rohrturbinen sind die entwickelten Gleichungen theoretisch und es ist eine nachträgliche praktische Prüfung nötig;

— aus den Verlusten wurden die hydraulischen Wirkungsgrade

$$\eta_{h1} = F_1(Q_{12});\ \eta_{h2} = F_2(Q_{12});\ \eta_{h3} = F_3(Q_{12});\ \eta_h = \eta_{h1}\,\eta_{h2}\,\eta_{h3} = F(Q_{12})$$

bestimmt und für die Kaplanturbine in Tafel 4, die Propellerturbine in Tafel 5, bezw. die Rohrturbine in Tafel 6, zahlenmässig ausgerechnet. Sämtliche Wirkungsgrade beziehen sich auf je ein Turbinen — Modell mit $D_2 = 1$ m und $n_s = 600 \ldots 800$, sie können mittels bekannter Gleichungen

auf beliebige andere Durchmesser $D_2 \neq 1$ und andere n_s umgerechnet werden;

— die Teilwirkungsgrade $\eta_{h1}\,\eta_{h2}\,\eta_{h3}$ und der hydraulische Gesamtwirkungsgrad η_h sind, für veränderliche Q_{12}, am günstigsten bei der Rohrturbine gefolgt von der Kaplanturbine. Für die Propellerturbinen sind η_h sehr ungünstig, für Beaufschlagungen $Q_{12} \neq (Q_2)_{opt}$, sodass deren Anwendung nur in seltenen Fällen wirtschaftlich sein kann;

— die Rohrturbinen haben, in den Bereich hoher Schnelläufigkeiten n_s und $H < 20$ m, $P < 20\,000$ PS/Turbine, um 2 bis 4% höhere Wirkungsgrade als die Kaplanturbinen, als Folge der geradlinigen Durchströmung und der günstigeren Ueberlastbarkeit;

— für Rohrturbinen sind in der dem Verfasser bekannten einschägigen Literatur Dimensionierungs-Methoden nicht veröffentlicht und demnach ist in Abschnitt 7 eine solche Methode — rein analytischer Natur vorgeschlagen;

— diesbezüglich werden im Abschnitt 7.3 analytische Gleichungen für verschiedene Abmessungen der Rohrturbinen entwickelt und in den Tafeln 7—8 praktisch angewandt. In 7.4 ist eine Gleichung für das Gewicht des ganzen Rohrturbinen-Aggregates vorgeschlagen und in den Tafeln 9—10 praktisch asugewertet;

— im Vergleich zur Kaplanturbine ist die Rohrturbine wesentlich billiger und die Baumengen für die konstruktiven Teile des Krafthauses sind um mindestens 25% geringer, allerdings nur bei Fallhöhen $H < 20$ m;

— für Fallhöhen über 20 m und grossen Leistungen ist die Kaplanturbine wirtschaflicher;

— durch die zukünftige Entwicklung de 2-stufigen Kaplan — und Rohrturbinen verschieben sich die Grenzen der Anwendung auf noch grössere Fallhöhen, z.B.: $H_{max} < 120$ m für 2-stufige Kaplan und $H_{max} < 40$ für 2-stufige Rohrturbinen;

— die Ergebnisse dieser Studie sind nicht abgeschlossen, sie können berichtigt und weiter entwickelt werden.

Lehrstuhl für Wasserkraftmaschinen
der Technischen Hochschule Bukarest.

LITERATUR — VERZEICHNIS

[1] *W. Meier:* Pompes-turbines, Bulletin Escher Wyss nr. 2/1962.

[2] *D. Florjancic:* L'évolution récente dans le domaine des machines reversibles, Revue Sulzer 1961.

[3] *J. Osterwalder:* Mesures d'écoulement sur modèles Kaplan, Bulletin Escher Wyss nr. 1—3/1960.

[4] *D. Pavel:* Randamentul organelor turbinelor elicoidale, Rev. Hidrotehnica, nr. 3/1962.

[5] *D. Pavel:* Economicitatea turbinelor tubulare, Rev. Hidrotehnica nr. 1/1962.

АНАЛИЗ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО КПД СОВРЕМЕННЫХ ПОВОРОТНОЛОПАСТНЫХ, ПРОПЕЛЛЕРНЫХ И КАПСУЛЬНЫХ ТУРБИН

(Резюме)

В работе предлагаются новые методы аналитического расчета для:

— определения потерь h_{w1}, h_{w2}, h_{w3}, Σh_w, соответственно гидравлического КПД η_{h1}. η_{h2}, η_{h3} различных органов поворотно-лопастной, пропеллерной и капсульной турбины с выходным диаметром рабочего колеса $D_2 = 1$ м;

— вывода расчетной формулы веса капсульной турбины $G = G_t + G_g$ включая генератор и вспомогательные установки.

Применение аналитического метода приведено на 10 таблицах и дана оценка будущего развития капсульных турбин.

HYDRAULIC EFFICIENCY ANALYSIS FOR MODERN KAPLAN, PROPELLER AND BULB TURBINES

(Summary)

New analytical calculation methods are suggsted in this paper i.e.:

— to determine the losses $h_{w1}, h_{w2}, h_{w3}, \Sigma h_w$, respectively the hydraulic efficiency η_{h1} η_{h2} η_{h3} for various parts of a Kaplan, resp. a propeller and a bulb turbine, the diameter at the rotor exit being $D_2 = 1$ m for all turbines and

— the calculation formule of the bulb turbine weight $G = G_t + G_g$, including generator and auxillary equipment.

The application of the analytical method is explained by means of 10 tables. The author considers also the future progress of bulb-turbines.

L'ANALYSE DE RENDEMENTS HYDRAULIQUES DES TURBINES KAPLAN, HÉLICOIDALES ET TUBULAIRE-BOULBES

(Résumé)

L'étude présente méthodes analytiques nouvelles pour:

— le calcul des pertes de charge $h_{w1}, h_{w2}, h_{w3}, \Sigma h_w$ et des rendements hydrauliques η_{h1} η_{h2} η_{h3} pour les différents organes d'une turbine Kaplan, respective Hélicoïdale et d'une turbine boulbe, ayant le diamètre de sortie du rotor $D_2 = 1$ m;

— la formule du poids $G = G_t + G_g$ des turbines bulbes, avec le générateur et les installations connexes.

Les méthodes proposées sont appliquées dans 10 tableaux et le développement future des turbine boulbes est apprécié.

ANALYSE DER HYDRAULISCHEN WIRKUNGSGRADE NEUZEITLICHER KAPLAN-PROPELLER UND ROHRTURBINEN

(Zusammenfassung)

In der Studie werden neue analytische Berechnungs-Methoden vorgeschlagen, für :

— die Bestimmung der Verluste $h_{w1}, h_{w2}, h_{w3}, \Sigma h_w$ bezw. der hydraulischen Wirkungsgrade η_{h1} η_{h2} η_{h3} der verschiedenen Organe einer Kaplanturbine, bezw. einer Propeller — und einer Rohrturbine, alle mit $D_2 = 1$ m Laufrad — Austrittsdurchmesser ;

— die Berechnungsformel des Gewichtes $G = G_t + G_g$ von Rohrturbinen, einschliesslich Generator und Nebenausrüstungen.

Die Anwendung der analytischen Methoden wird, and Hand von 10 Tafeln, arläutert und es wird die zukünftige Entwicklung der Rohrturbinen geschätzt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 3

CONTRIBUTION AU CALCUL DES RÉSEAUX TRIPHASES AVEC DES RACORDS MONOPHASÉES

P. MILITARU

1. Introduction

Les réseaux triphasés de courant alternatif alimentent quelquefois des récepteurs monophasés, ce qui provoque une dissymétrie des courants et des tensions, même şi le réseau triphasé est symétrique. Lorsque le degré de dissymétrie des tensions et des courants dépasse une certaine limite, il entraine la perturbation du bon fonctionnement des générateurs synchrones alimentant le réseau et des moteurs et des transformateurs reliés au réseau. Il en résulte la nécessité de vérifier le degré de dissymétrie des courants et des tensions des réseaux qui alimentent des charges inégales sur les trois phases ou des charges monophasées. Comme exemples des récepteurs monophasés on peut citer les fours monophasés à résistance, les machines à souder puissantes, les installations de traction électrique en courant alternatif monophasé, etc. Dans l'électrification rurale aussi, certains pays utilisent largement le systhème mixte de distribution à haute tension, dont les lignes principales des réseaux sont triphasés et les dérivations, monophasées.

Toute impédance reliée entre deux phases d'un réseau représente une dissymétrie transversale dans le point donné du réseau. Généralement, trois impédances inégales couplés en étoile ou en triangle entre les phases d'un réseau triphasé, représentent aussi une dissymétrie transversale dans le point respectif du réseau. Dans un réseau il peut y avoir plusieurs points ou noeuds de dissymëtrie transversale. Dans les systhèmes classiques de distribution, en régime normal de fonctionnement, le réseau triphasé est pratiquement symétrique entre ces noeuds, parce que les paramètres des lignes aériennes sont uniformisés par des transpositions, les paramètres des autres éléments étant aussi égaux sur les trois phases ; autrement dit, le réseau n'a pas de dissymetries longitudinales.

Le calcul des tensions et des courants sur des réseaux triphasés qui ont des dissymétries longitudinales et transversales se réalisent par la méthode des composantes symétriques, soit utilisant les schémas équivalents complexes, soit écrivant directement les équations de calcul.

Dans la littérature de spécialité on ne traite que des cas particuliers de réseaux triphasés avec racords monophasés, comme par exemple celui d'une seule impédance montée entre deux phases, celui de deux impédances connectées entre phases dans deux points différents du réseau, celui de deux impédances égales montées en triangle ouvert dans le réseau ou celui de trois impédances dont deux égales, connectées en étoile au réseau, etc. (B_3, B_4, B_5, B_7).

Les cas particuliers mentionnés de dissymétrie transversale dans un seul point, peuvent être représentés par des schémas équivalents complexes non pourvues de transformateurs de rotation de phases, ce qui permet une exécution plus simple des calculs, soit directement, soit à l'aide des tables à calcul.

Quoique la méthode de calcul des tensions et des courants dans un réseau à plusieurs points de dissymétrie simultanés est connue, le calcul d'un réseau dans le cas général comportant un certain nombre de dérivations monophasées n'a pas été traité d'une manière concrète ; on n'a pas encore indiqué la méthode la plus simple de résolution, soit par l'élaboration des schémas équivalents complexes, soit en écrivant directement les équations. C'est justement le but que se propose cette étude, pour faire face aux nécessités de résoudre certains problèmes de ce genre, qu'on rencontre dans la projection et dans l'exploitation des réseaux électriques triphasés. La méthode de calcul exposée au cours de cet ouvrage peut être utilisée aussi pour le calcul des courts-circuits entre deux phases, simultanés en plusieurs points.

Pour l'élaboration du schéma équivalent complexe d'un réseau triphasé compliqué, avec des dissymétries transversales multiples dans un certain nombre de points, il faut établir d'abord des schémas équivalents complexes pour toutes les formes simples de dissymétrie qui peuvent apparaître dans le réseau respectif.

Par la combinaison judicieuse des schémas équivalents simplifiés, on peut obtenir les schémas équivalents complexes pour des reseaux ayant des dissymétries compliquées et en plusierus points.

Dans les schémas équivalents complexes pour dissymétries simples, les schémas de séquence directe, inverse et homopolaire sont représentés par des dipôles, ayant les bornes L, M, N... et H. Les bornes L, M, N marquent les points de la dissymétrie transversale. Dans les schémas de séquence directe et inverse, la borne H représente le point neutre commun des générateurs et des charges ; dans le schéma de séquence homopolaire, elle représente le point neutre commun des transformateurs mis à la terre.

Les schémas de séquence directe, inverse et homopolaire sont connectées entre eux par des tranformateurs de rotation, transformateurs parafaits ayant des rapports de transformation

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{a} = \frac{a^2}{1}, \frac{1}{a^2} = \frac{a}{1},$$

transformateurs sans dispersion et sans courant magnétisant. Les transformateurs de rotation transforment dans le même rapport, autant les tensions que les courants. Dans les cas particuliers où les coefficients

de transformation sont égaux à l'unité, on peut renoncer aux transformateurs de rotation utilisant des connexions convenables entre les schémas de séquences différentes.

Au cours de cette étude, on a utilisé la phase A pour l'élaboration des schémas équivalents complexes, de manière que les schémas de séquence directe, invers et homopolaire correspondent aux composantes symétriques des valeurs rapportés à la phase A.

2. Schémas équivalents complexes pour une impédance connectée entre deux phases

On considère tout d'abord les cas les plus simples, lorsqu'une impédance est connectée entre deux phases (fig. 1). Dans le cas pris comme exemple, où l'impédance Z_B est connectée (fig. 1b) entre les phases A et C, on peut écrire les suivantes relations entre les valeurs des courants et des tensions dans le point de la dissymétrie :

$$\begin{aligned} I_{MB} &= 0 \\ I_{MC} &= -I_{MA} \\ U_{MC} - U_{MA} &= Z_B I_{MC} \end{aligned} \tag{1}$$

En remplaçant dans ces relations les valeurs des courants et des tensions, par leurs expressions en fonction des composantes symétriques, il en résulte :

$$\begin{aligned} &a^2 I_{1M} + a I_{2M} + I_{OM} = 0 \\ &a I_{1M} + a^2 I_{2M} + I_{OM} + I_{1M} + I_{2M} + I_{OM} = 0 \\ &a U_{1M} + a^2 U_{2M} + U_{OM} - U_{1M} - U_{2M} - U_{OM} = Z_B (a I_{1M} + a^2 I_{2M} + I_{OM}) \end{aligned} \tag{2}$$

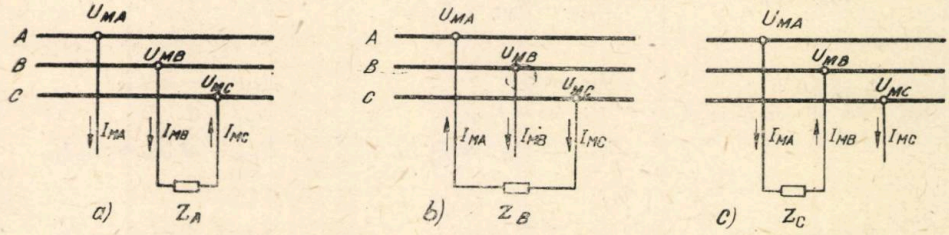


Fig. 1. — Dissymétries simples ,par le montage d'impédances entre les phases.

Par des calculs et des transformations convenables, le systhème d'équations (2) devient :

$$\begin{aligned} I_{1M} &= -a^2 I_{2M} \\ I_{OM} &= 0 \\ U_{3M} - a^2 U_{2M} &= Z_B I_{1M} \end{aligned} \tag{3}$$

Pour pouvoir déterminer les valeurs des trois courants et des trois tensions au point de la dissymétrie, en dehors des équations du système (3) on a aussi besoin de 3 équations résultant de l'application des lois de Kirchhoff au circuit respectif.

Le schéma équivalent complexe qui satisfait les équations (3) est donné dans la figure 2 b. Le schéma de séquence directe est lié avec le schéma de séquence inverse par un transformateur de rotation. Il n'y a pas de schéma de séquence homopolaire, parce que le courant dans le lieu de la dissymétrie n'a pas de composante de séquence homopolaire.

Dans le tableau 1 on donne les équations spécifiques entre les valeurs des tensions et des courants dans le lieu de dissymétrie (conditions locales ou limites), respectivement des composantes des courants et des tensions, pour les trois cas de dissymétrie simple :

— impédance Z_A connectée entre phasses B et C
— inpédance Z_B connectée entre les phases C et A
— impédance Z_C connectée entre phases A et B.

Tableau 1

Équations spécifiques aux cas de dissymetrie par connexion d'une impédance entre les phases

Mode de dissymétrie dans le point M	Équations spécifiques entre les courants et les tensions dans le point M	Équations spécifiques entre les composantes simétriques des courants et des tensions dans le point M
Impédance Z_A entre les phases B et C (fig. 1 a)	$I_{MA} = 0$ $I_{MB} = -I_{MC}$ $U_{MB} - U_{MC} = Z_A I_{MB}$	$I_{1M} = -I_{2M}$ $I_{OM} = 0$ $U_{1M} - U_{2M} = Z_A I_{1M}$
Impédance Z_B entre les phases C et A (ffg 1 b)	$I_{MB} = 0$ $I_{MC} = -I_{MA}$ $U_{MC} - U_{MA} = Z_B I_{MC}$	$I_{1M} = -a^2 I_{2M}$ $I_{OM} = 0$ $U_{1M} - a^2 U_{2M} = Z_B I_{1M}$
Impédance Z_C entre les phases A et B (fig. 1 c)	$I_{MA} = -I_{MB}$ $I_{MC} = 0$ $U_{MA} - U_{MB} = Z_C I_{MA}$	$I_{1M} = -a I_{2M}$ $I_{OM} = 0$ $U_{1M} - a U_{2M} = Z_C I_{1M}$

Les schémas équivalents complexes qui satisfont les équations spécifiques entre les composantes symétriques des courants et des tensions mentionnées dans le tableau 1 sont représentés dans la figure 2. Le schéma équivalent complexe de la figure 2a, qui est pourvue d'un trans-

formateur de rotation ayant le coefficient de transformation $\frac{1}{1}$ peut être représenté aussi comme dans la figure 3, en renonçant au transformateur de rotation.

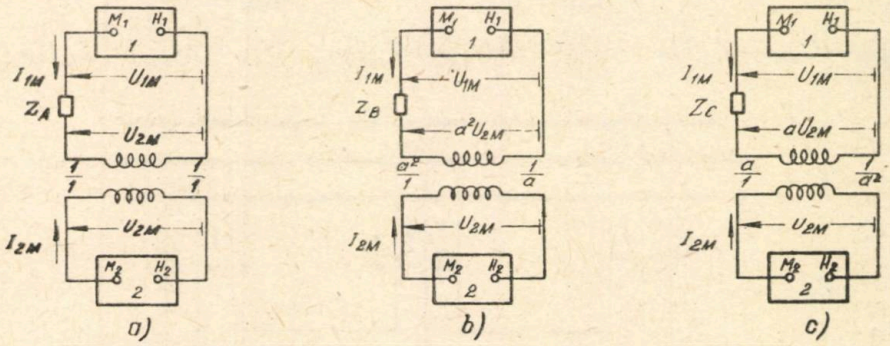


Fig. 2. — Schémas équivalents complexes pour les dissymétries de la fig. 1.

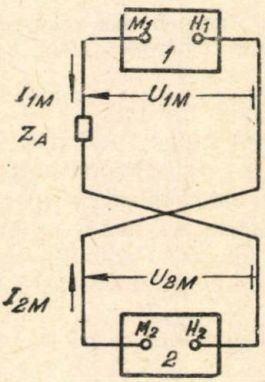


Fig. 3. — Autre forme du schéma équivalent complexe de la fig. 2a.

3. Schémas équivalents complexes pour trois impédances inégales connectées entre les phases

On considère trois impédances Z_A, Z_B et Z_C connectées séparément entre les phases B—C, C—A et A—B (fig. 4) dans la même point M d'un réseau triphasé. Les courants prélevés par les trois impédances sont $I'_{MA}, I'_{MB}, I'_{MC}$ par l'impédance Z_A ; $I''_{MA}, I''_{MB}, I''_{MC}$, par l'impédance Z_B et $I'''_{MA}, I'''_{MB}, I'''_{MC}$ par l'impédance Z_C. Entre les 9 composantes symétriques des courants et les 3 composantes des tensions, on peut écrire les 9

équations spécifiques, qui résultent du groupement des équations spécifiques des cas simples de dissmétrie transversale traités antérieurement ;

$$I'_{1M} = -I'_{2M} \qquad I''_{1M} = -a^2 I''_{2M} \qquad I'''_{1M} = -a I'''_{2M}$$

$$I'_{OM} = 0 \qquad I''_{OM} = 0 \qquad I'''_{OM} = 0 \qquad (4)$$

$$U_{1M} - U_{2M} = Z_A I'_{1M}; \quad U_{1M} - a^2 U_{2M} = Z_B I''_{1M}; \quad U_{1M} - a U_{2M} = Z_C I'''_{1M}$$

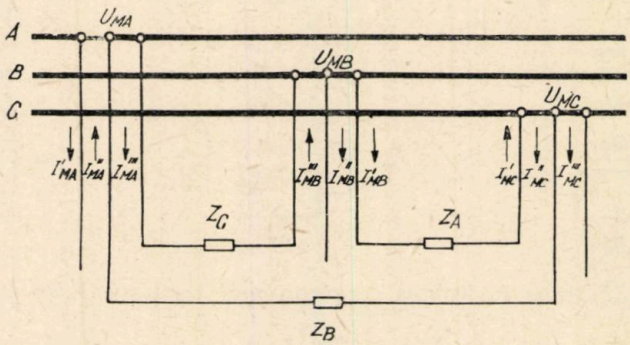


Fig. 4. — Dissymétrie dans un seul point, par le montage de trois impédances différentes entre les phases.

Pour pouvoir déterminer les valeurs des inconues (9 composantes des courants et 3 composantes des tensions), en dehors des équations du système (4), on a encore besoin de 3 équations qui résultent de l'application des lois de Kirchhoff au réseau triphasé respectif.

Les composantes symétriques des courants totaux prélevés par les trois impédances s'obtiennent par l'addition des composantes symétriques des courants prélevés par chaque impédance :

$$I_{1M} = I'_{1M} + I''_{1M} + I'''_{1M}$$

$$I_{2M} = I'_{2M} + I''_{2M} + I'''_{2M}.$$

Le schéma équivalent complexe qui satisfait le système (4) d'équations est donné dans la fig. 5. Le schéma de séquence directe est lié avec le schéma de séquence inverse par trois transformateurs de rotation ayant les coefficients de transformation $\frac{1}{1}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}$.

Si deux impédances connectées entre les phases deviennent égales à l'infini, les branches respectives disparaissent du schéma de séquence directe, en même temps que les transformateurs de rotation respectifs ; on peut ainsi obtenir successivement les schémas équivalents complexes pour tous les cas simples de dissymétrie par connexion d'une seule impédance entre deux phases. Dans le cas où on rend égale à l'infini une des trois impédances, la branche respective disparait du schéma de séquence directe, ainsi que le transformateur de rotation

respectif, en obtenant successivement les schémas équivalents complexes pour les cas de dissymétrie par connexion de deux impédances entre les phases. Le schéma équivalent complexe de la fig. 5 représente donc le

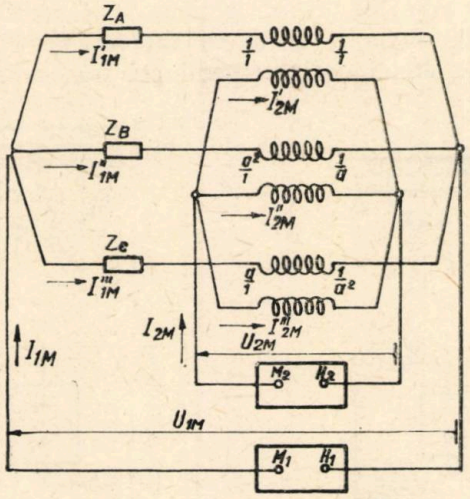


Fig. 5. — Schéma équivalent complexe pour la dissymétrie de la fig. 4.

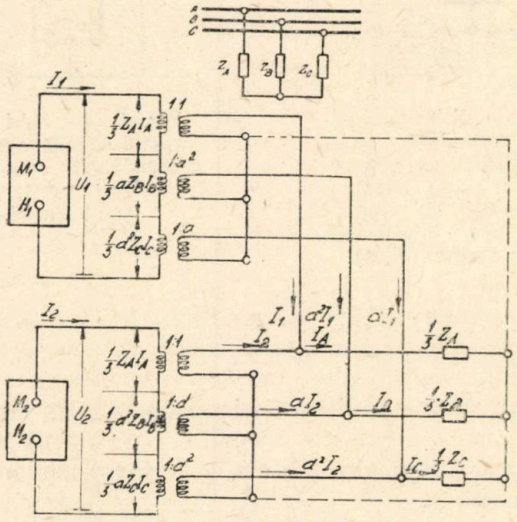


Fig. 6. — Schéma équivalent complexe pour trois impédances différentes connectées en étoile, dans un seul point du réseau.

cas général de trois impédances connectées entre les phases, duquel dérivent tous les autres cas plus simples de dissymétrie de deux ou d'une seule impédance connectées entre les phases.

Le cas de dissymétrie de la fig. 4 présenté ci-dessus correspond au cas de trois impédances inégales connectées en triangle et reliées aux phases du réseau triphasé dans le point M. Par la transfiguration du triangle en l'étoile équivalente, on obtient trois impédances quelconques connectées en étoile dans le point M du réseau triphasé. Le schéma equivalent complexe établi ordinairement est très compliqué dans ce cas

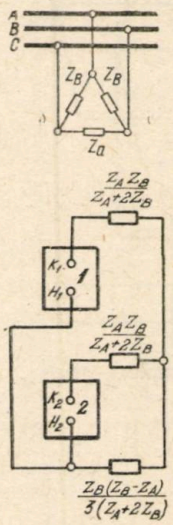


Fig. 7. — Schéma équivalent complexe pour trois impédances connectées en triangle, dans un seul point du réseau (deux des impédances égales entre elles).

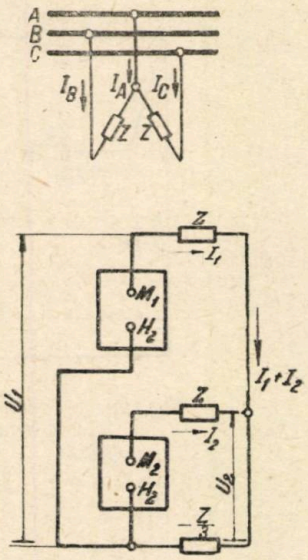


Fig. 8. — Schéma équivalent complexe pour deux impédances connectées en triangle ouvert, dans un point du réseau.

(il comprend 6 transformateurs de rotation) et le passage aux schémas correspondant à des cas plus simples de dissymétrie se fait avec difficulté (fig. 6). La combinaison de plusieurs schémas de cette sorte, pour représenter des réseaux avec des dissymétrie transversales en plusieurs points, mène à des schémas équivalents complexes tellement compliqués, qu'on n'a pas encore tâché à résoudre des cas de dissymétrie en plusieurs points, à l'aide de ces schémas.

C'est bien pourquoi dans la littérature de spécialité on a traité des cas particuliers de dissymétrie, auxquels correspondent des schémas équivalents complexes sans transformateurs de rotation, à savoir :

— trois impédances en étoile ou en triangle, dont deux égales entre elles (fig. 7) ;

— deux impédances en étoile ou en triangle ouvert (fig. 8).

4. Schémas équivalents complexes. Calcul des réseaux triphasés avec plusieurs racoords monophasés.

A l'aide des schémas équivalents complexes présentés ci-dessus, on peut établir les schémas équivalents des réseaux avec plusieurs raccords monophasés dans différents points du réseau.

On prend pour commencer le cas simple d'un réseau triphasé alimentant une seule impédance Z_B connectée entre deux phases (A—C). On note avec E_1 la force électromotrice résultante de séquence directe du réseau et avec Z_1, Z_2 et Z_0 les impédances résultantes de séquence directe, inverse et homopolaire. Appliquant la deuxième loi de Kirchhoff à ce réseau, il en résulte les équations :

$$\begin{aligned} U_{1M} &= E_1 - Z_1 I_{1M} \\ U_{2M} &= -Z_2 I_{2M} \\ U_{OM} &= -Z_O I_{OM} \end{aligned} \qquad (5)$$

Le système d'équations (3) et (5) permet la détermination de toutes les composantes symétriques des courants et des tensions, parce que $I_{OM}=0$ et $U_{OM}=0$. Le schéma équivalent complexe qui satisfait le système d'équations (3) et (5), est donnée dans la fig. 9. En partant

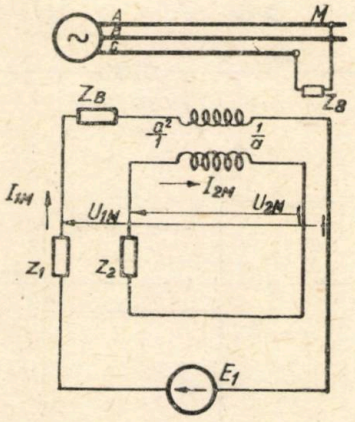


Fig. 9. — Schéma équivalent complexe pour un réseau ayant une seule impédance connectée entre deux phases.

soit des équations (3) et (5), soit du schéma équivalent complexe, on peut calculer les grandeurs qui intéressent :

$$I_{1M} = \frac{E_1}{Z_1 + Z_2 + Z_B}; \quad I_{2M} = \frac{-a E_1}{Z_1 + Z_2 + Z_B}$$

$$U_{1M} = \frac{(Z_2 + Z_B) E_1}{Z_1 + Z_2 + Z_B}; \quad U_{2M} = \frac{a Z_2 E_1}{Z_1 + Z_2 + Z_B}.$$

Le coefficient de dissymétrie des tensions est :

$$K_1 = \frac{U_{2M}}{U_{1M}} = \frac{a Z_2}{Z_2 + Z_B}.$$

Soit maintenant le cas d'un réseau alimentant deux impédances Z_A et Z_C connectées entre les phases B—C et A—B, dans le même point M du réseau. Entre les composantes des courantes et des tensions on peut écrire les équations spécifiques dissymétriques doubles :

$$\begin{aligned} I'_{1M} &= -I'_{2M} & I'''_{1M} &= -a I'''_{2M}, \\ I'_{OM} &= 0 & I'''_{OM} &= 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

$$U_{1M} - U_{2M} = Z_A I'_{1M} \qquad U_{1M} - a U_{2M} = Z_C I'''_{1M}$$

et les équations de la deuxième loi de Kirchhoff :

$$\begin{aligned} U_{1M} &= E_1 - Z_1 (I'_{1M} + I'''_{1M}) \\ U_{2M} &= -Z_2 (I'_{2M} + I'''_{2M}) \\ U_{OM} &= -Z_O (I'_{OM} + I'''_{OM}) \end{aligned} \qquad (7)$$

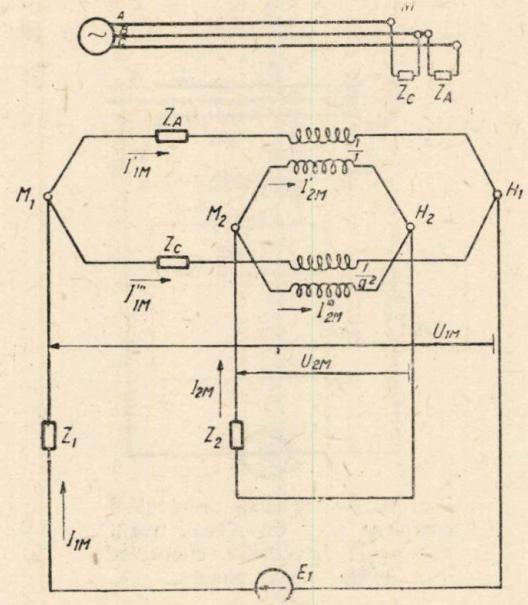


Fig. 10. — Schéma équivalent complexe pour un réseau ayant deux impédances montées entre les phases.

Dans la fig. 10 on donne le schéma équivalent complexe qui correspond au système (6, 7) d'équations. Les impédances connectées entre les phases du réseau apparaissent comme des dérivations dans le schéma de séquence directe, et seulement dans ce schéma. Dans le schéma de

séquence inverse n'apparaissent que les impédances longitudinales du réseau. Les relations qui existent entre les courants des branches connectées par des transformateurs de rotation, sont montrées dans le tableau 1 ; elles sont indiquées en même temps par les rapports de transformation. Dans les branches Z_A et Z_C du schéma de séquence

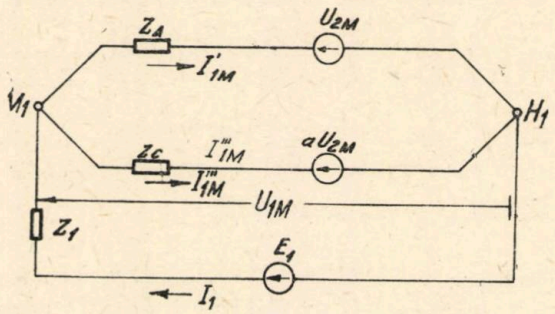


Fig. 11. — Schéma du circuit de séquence directe, correspondant au schéma équivalent complexe de la fig. 10.

directe s'induisent, du schéma de séquence inverse, les forces électromotrices $E'_{1M} = -U_{2M}$ et $E'''_{1M} = -aU_{2M}$, qui ont le sens contraire à la tension U_{1M}. En appliquant les lois de Kirchoff on peut écrire pour le schéma de séquence directe les équations (fig. 11) :

$$U_{1M} = E_1 - Z_1 I_1$$
$$U_{1M} = U_{2M} + Z_A I'_{1M}$$
$$U_{1M} = aU_{2M} + Z_C I'''_{1M}$$
$$I_1 = I'_{1M} + I'''_{1M}$$

et pour le schéma de séquence inverse les équations :

$$U_{2M} = -Z_2 I_2$$
$$I_2 = I'_{2M} + I'''_{2M}.$$

En remplaçant I'_{2M} et I'''_{2M} en fonction de I'_{1M} et I'''_{1M} ainsi que I_2 obtenu de cette manière dans l'expression de la tension U_{2M}, on aura après certaines transformations le système d'équations :

$$\begin{aligned} U_{1M} &= E_1 - Z_1 (I'_{1M} + I'''_{1M}) \\ U_{1M} &= U_{2M} + Z_A I'_{1M} \\ U_{1M} &= aU_{2M} + Z_C I'''_{1M} \\ U_{1M} &= Z_2 (I'_{1M} + a^2 I'''_{1M}) \end{aligned} \qquad (8)$$

En résolvant soit le système d'équations (8) obtenu à l'aide du schéma équivalent complexe, soit le système (6, 7), on peut déterminer les grandeurs qui intéressent :

$$\left.\begin{aligned}
I'''_{1M} &= \frac{-E_1(aZ_2 - Z_2 - Z_A)}{3Z_1Z_2 + (Z_1+Z_2)(Z_A+Z_C) + Z_AZ_C} \\
I'_{1M} &= \frac{-E_1(a^2Z_2 - Z_1 - Z_C)}{3Z_1Z_2 + (Z_1+Z_2)(Z_A+Z_C) + Z_AZ_C} \\
I_{1M} &= \frac{E_1(3Z_2 + Z_A + Z_C)}{3Z_1Z_2 + (Z_1+Z_2)(Z_A+Z_C) + Z_AZ_C} \\
I'_{2M} &= -I'_{1M}\ ;\quad I'''_{2M} = -a^2 I'''_{1M} \\
U_{1M} &= E_1 \frac{Z_2(Z_A+Z_C) + Z_AZ_C}{3Z_1Z_2 + (Z_1+Z_2)(Z_A+Z_C) + Z_AZ_C} \\
U_{2M} &= E_1 \frac{Z_2(a^2Z_A+Z_C)}{3Z_1Z_2 + (Z_1+Z_2)(Z_A+Z_C) + Z_AZ_C}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

A remarquer dans ce cas-ci qu'il est aussi simple d'écrire les équations directement ou à l'aide du schéma équivalent complexe.

Le coéfficient de dissymétrie des tensions est :

$$K_2 = \frac{U_{2M}}{U_{1M}} = \frac{Z_2(a^2Z_A+Z_C)}{Z_2(Z_A+Z_C) + Z_AZ_C}. \quad (10)$$

Dans le cas où les impédances, sont égales $Z_C = Z_A = Z$, le coefficient de dissymétrie est donné par l'expression :

$$K_2 = \frac{Z_2Z(1+a^2)}{2Z_2Z + Z^2} = -\frac{aZ_2}{2Z_2+Z}.$$

En comparant la valeur absolue de ce coefficient de dissymétrie avec la valeur absolue du coefficient de dissymétrie pour une seule impédance Z connectée entre les phases A et C :

$$K_1 = \frac{aZ_2}{Z_2+Z}$$

il résulte :

$$\frac{|K_1|}{|K_2|} = \frac{\left|\frac{aZ_2}{Z_2+Z}\right|}{\left|-\frac{aZ_2}{2Z_2+Z}\right|} = \left|-\frac{2Z_2+Z}{Z_2+Z}\right| > 1$$

ce qui signifie que le coefficient de dissymétrie diminue lorsqu'on connecte deux impédances égales entre les phases, au lieu d'une seule.

A l'aide des schémas équivalents complexes exposés antérieurement pour dissymétries dans un seul point, et représentés par une, deux ou trois impédances connectées entre les phases, on peut facilement tracer le

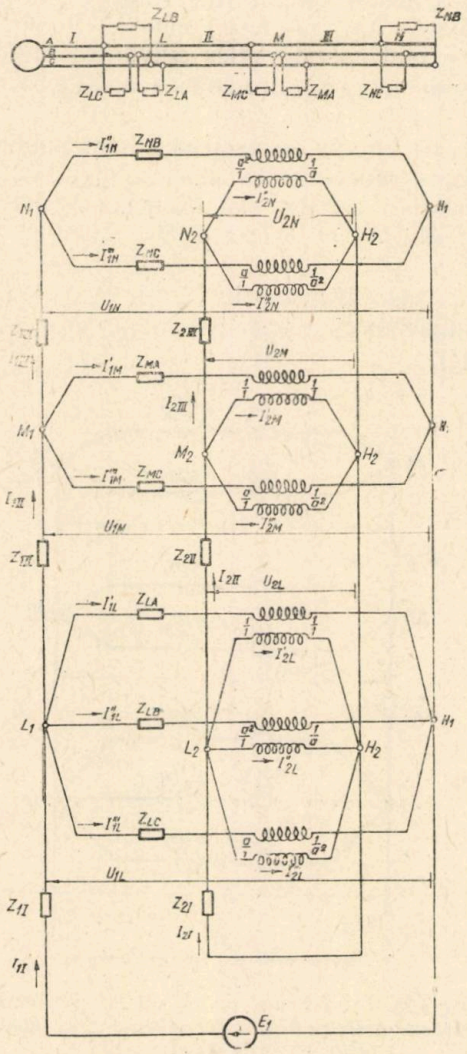


Fig. 12. — Schéma équivalent complexe pour un réseau avec différentes impédances montées entre les phases, en trois points.

schéma équivalent complexe pour un nombre de n'importe combien de dissymétries et on peut écrire le système d'équations pour la détermination des grandeurs qui intéressent. A titre d'exemple, on va traiter le cas du réseau triphasé avec trois noeuds de dissymétrie transversale,

exposé dans la fig. 12, dont le schéma équivalent est représenté dans la même figure. On peut voir que le schéma équivalent complexe a un circuit de séquence directe et un autre de séquence inverse, reliés entre eux par des transformateurs de rotation et ayant chacun une configuration semblable au réseau triphasé. Pour pouvoir tracer le schéma équivalent, il faut connaitre les suivantes règles simples :

a) Il n'y a pas de force électromotrice appliquée que dans le circuit de séquence directe.

b) Il n'y a pas de circuit de séquence homopolaire.

c) Les impédances reliées entre phases Z_{LA}, Z_{LB}, Z_{LC}, Z_{MA}, Z_{MC}, Z_{NB} et Z_{NC} apparaissent comme des branches connectées en dérivation entre les points L_1, M_1, N_1 et le point H_1, dans le circuit de séquence directe.

d) Entre les points de dissymétrie L_1, M_1 et N_1 du circuit de séquence directe on lie les impédances respectives Z_{1I}, Z_{1II} et Z_{1III} des portions de réseau I, II et III.

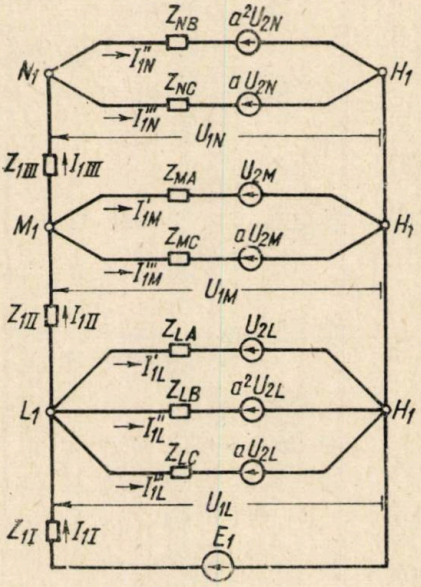


Fig. 13. — Schéma du circuit de séquence directe correspondant au schéma équivalent complexe de la fig. 12.

e) Dans le circuit de séquence inverse, les branches connectées en dérivation entre les points L_2, M_2, N_2 et H_2 ne comprennent pas d'impédances.

f) Entre les points de dissymétrie L_2, M_2 et N_2 du circuit de séquence inverse on lie des impédances respectives Z_{2I}, Z_{3II} et Z_{2III} des portions de réseau I, II et III.

g) Les branches en dérivation respectives des circuits de séquence directe et inverse sont connectées par des transformateurs de rotation ayant les rapports 1 : 1 pour les impédances Z_{LA}, Z_{MA} connectées entre les phases B et C ; 1 : a pour les impédances Z_{LB}, Z_{NB} connectées entre les phases A et C ; 1 : a^2 pour les impédances Z_{LC}, Z_{MC}, Z_{NC} connectées entre les phases A et B.

Grâce à ces règles simples et faciles à retenir, on peut tracer les schémas équivalents complexes pour des réeseaux avec n'importe combien de points de dissymétrie transversale dus aux impédances connectées entre les phases.

Pour le réseau et le schéma équivalent complexe représentés dans la fig. 12, on peut écrire le système d'épuations à l'aide duquel on détermine les grandeurs cherchées. En écrivant les équations, il faut tenir compte des rapports entre les courants correspondants de séquence directe et inverse, ainsi que du fait que dans les branches du circuit de séquence directe sont induites des forces électromotrices par le circuit de séquence inverse : $E'_{1L} = -U_{2L}$, $E''_{1L} = a^2 U_{2L}$, $E'''_{1L} = -a U_{2L}$, $E'_{1M} = -U_{2M}$, $E'''_{1M} = -a U_{2M}$, $E''_{1N} = -a^2 U_{2N}$, $E'''_{1N} = -a U_{2N}$ (fig. 13). C'est ainsi que pour le circuit de séquence directe résultent les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
U_{1L} &= U_{2L} + Z_{LA} I'_{1L} \\
U_{1L} &= a^2 U_{2L} + Z_{LB} I''_{1L} \\
U_{1L} &= a U_{2L} + Z_{LC} I'''_{1L} \\
U_{1M} &= U_{2M} + Z_{MA} I'_{1M} \\
U_{1M} &= a U_{2M} + Z_{MC} I'''_{1M} \\
U_{1N} &= a^2 U_{2N} + Z_{NB} I''_{1N} \\
U_{1N} &= a U_{2N} + Z_{NC} I'''_{1N} \\
U_{1L} &= E_1 - Z_{1I} I_{1I} \\
U_{1M} &= U_{1L} - Z_{1II} I_{1II} \\
U_{1N} &= U_{1M} - Z_{1III} I_{1III} \\
I_{1III} &= I''_{1N} + I'''_{1N} \\
I_{1II} &= I''_{1N} + I'''_{1N} + I'_{1M} + I'''_{1M} \\
I_{1I} &= I''_{1N} + I'''_{1N} + I'_{1M} + I'''_{1M} + I'_{1L} + I''_{1L} + I'''_{1L}
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Sur les branches en dérivation du circuit de séquence inverse il y a des sources de courants, produits par induction mutuelle avec le circuit de séquence directe (fig. 14), de sorte qu'il faut ajouter au système

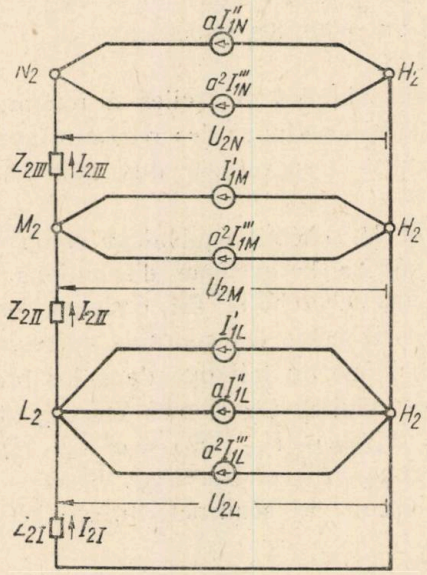


Fig. 14. — Schéma du circuit de séquence inverse correspondant au schéma équivalent complexe de la fig. 12.

d'équations (11), pour le circuit de séquence inverse, les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
U_{2L} &= -Z_{2I}\,I_{2I}\\
U_{2M} &= U_{2L} - Z_{2II}\,I_{2II}\\
U_{2N} &= U_{2M} - Z_{2III}\,I_{2III}\\
I_{2III} &= I''_{2N} + I'''_{2N} = -a^2 I''_{1N} - a\,I'''_{1N}\\
I_{2II} &= I''_{2N} + I'''_{2N} + I'_{2M} + I'''_{2M} = -a^2 I''_{1N} - a\,I'''_{1N} - I'_{1M} - a\,I'''_{1M}\\
I_{2I} &= I''_{2N} + I'''_{2N} + I'_{2M} + I'''_{2M} + I'_{2L} + I''_{2L} + I'''_{2L} =\\
&= -a^2 I''_{1N} - a\,I'''_{1M} - I'_{1M} - a\,I'''_{1M} - I'_{1L} - a^2 I''_{1L} - a\,I'''_{1L}
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Par l'élimination de ces deux systèmes (11) et (12) des courants I_{1I}, I_{1II}, I_{1III}, I_{2II}, I_{2III} et de tous les autres courants de séquence inverse et par leur additionnement, on obtient un système unique de

13 équations avec 13 inconnues, dans lesquelles les coefficients des inconnues, les termes libres et les inconnues sont des grandeurs complexes:

$$\left\{\begin{array}{l} U_{1L} = U_{2L} + Z_{LA} I'_{1L} \\ U_{1L} = a^2 U_{2L} + Z_{LB} I''_{1L} \\ U_{1L} = a U_{2L} + Z_{LC} I'''_{1L} \\ U_{1M} = U_{2M} + Z_{MA} I'_{1M} \\ U_{1M} = a U_{2M} + Z_{MC} I'''_{1M} \\ U_{1N} = a^2 U_{2N} + Z_{NB} I''_{1N} \\ U_{1N} = a U_{2N} + Z_{NC} I'''_{1N} \end{array}\right. \qquad (13)$$

$$\left\{\begin{array}{l} U_{1L} = E_1 - Z_{1I}(I''_{1N} + I'''_{1N} + I'_{1M} + I'''_{1M} + I'_{1L} + I''_{1L} + I'''_{1L}) \\ U_{1M} = U_{1L} - Z_{1II}(I''_{1N} + I'''_{1N} + I'_{1M} + I'''_{1M}) \\ U_{1N} = U_{1M} - Z_{1III}(I''_{1N} + I'''_{1N}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} U_{2L} = Z_{2I}(a I''_{1N} + a^2 I'''_{1N} + I'_{1M} + a^2 I'''_{1M} + I'_{1L} + a I''_{1L} + a^2 I'''_{1L}) \\ U_{2M} = U_{2L} + Z_{2II}(a I''_{1N} + a^2 I'''_{1N} + I'_{1M} + a^2 I'''_{1M}) \\ U_{2N} = U_{2M} + Z_{2III}(a I''_{1N} + a^2 I'''_{1N}). \end{array}\right.$$

De l'examen du système d'équation (13), on observe qu'il peut être divisé en 3 groupes d'équations. Le premier groupe comprend sept équations, égales en nombre avec les impédances connectées entre les phases. Le deuxième groupe comprend trois équations entre tensions de séquence directe. Le dernier groupe comprend trois équations entre tensions de séquence inverse. Le nombre des équations de chacun des deux derniers groupes d'équations est égal au nombre des branches du réseau triphasé (fig. 12a) Dans le cas général d'un réseau triphasé ayant des impédances de charge connectées entre les phases, au lieu du système (13) on obtient un système de $2\,m+n$ équations avec $2\,m+n$ inconnues, où m repreésente le nombre des branches triphasées du réseau et n le nombre des impédances connectées entre les phases, dans les différents noeuds de ce réseau.

Dans le nombre des inconnues interviennent m tensions de séquence directe, m tensions de séquence inverse et n courants de séquence directe, circulant dans les impédances en dérivation.

Sous forme matricielle, le système (13) peut être écrit de la façon suivante :

$$
\begin{array}{|cccccccccccc|}
\hline
Z_{LA} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & Z_{LB} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & a^2 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & Z_{LC} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & Z_{MA} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{MC} & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & a & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{NB} & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & a^2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{NC} & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & a \\
Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & Z_{1II} & Z_{1II} & Z_{1II} & Z_{1II} & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{1III} & Z_{1III} & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
Z_{2I} & a Z_{2I} & a^2 Z_{2I} & Z_{2I} & a^2 Z_{2I} & a Z_{2I} & a^2 Z_{2I} & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & Z_{2II} & a^2 Z_{2II} & a Z_{2II} & a^2 Z_{2II} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a Z_{2III} & a^2 Z_{2III} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|}
\hline
I'_{1L} \\
I''_{1L} \\
I'''_{1L} \\
I'_{1M} \\
I'''_{1M} \\
I''_{1N} \\
I'''_{1N} \\
U_{1L} \\
U_{1M} \\
U_{1N} \\
U_{2L} \\
U_{2M} \\
U_{2N} \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
E_1 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\hline
\end{array}
\qquad (14)
$$

En employant la méthode d'élimination, on peut d'abord éliminer du système d'équations (13) les tensions de succession inverse U_{2L}, U_{2M} et U_{2N}. Cette élimination peut se faire très facilement dans l'équation matricielle (14). Vraiment, en effectuant les sommes suivantes : $(1)+(11)$, $(2)+a^2(11)$, $(3)+a(11)$, $4+(11)+(12)$, $(5)+a(11)+a(12$, $(6)+a^2(11)+$ $+a^2(12)+a^2(13)$, $(7)+a(11)+a(12)+a(13)$, où les chiffres entre parenthèses représentent les coefficients de la ligne de numéro d'ordre respectif de l'équation matricielle et laissant inchangées les 8e, 9e, et 10e lignes, on obtient une nouvelle équation matricielle (15), dans laquelle la matrice carrée des coefficients est de l'ordre de 10 :

Effectuant ensuite les opérations $(1)+(8)$, $(2)+(8)$. $(3)+(8)$, $(4)-(5)$, $(6)-(7)$, $(6)+(8)+(9)+(10)$, $(7)+(8)+(9)+(10)$, il en résulte l'équation matricielle (16).

La résolution de l'un des systèmes d'équations ci-dessus peut être effectuée par une des méthodes connues pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. Les machines électroniques chiffriques de calcul assurent la résolution du système d'équation sous la forme (14), les opérations de calcul sur les nombres complexes étant ensuite continuées avec les mêmes machines.

Lorsqu'on ne dispose pas d'une machine électronique de calcul, on peut tenter la résolution à l'aide des machines électriques de calcul, utilisant en ce cas l'équation matricielle, (16) dont la matrice des coefficients n'a que l'ordre 7.

Pour la résolution de l'équation matricielle on n'opère pas directement avec des nombres complexes, mais on utilise un autre procédé de calcul nécessitant un moindre volume de calculs. L'équation matricielle (16) peut être écrite sous la forme concentrée suivante :

$$\|M\| \cdot \|I\| = \|E\| \tag{17}$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} \|M\| &= \|A\| + j\|B\| \\ \|I\| &= \|I_r\| + j\|I_i\| \\ \|E\| &= \|E_r\| + j\|E_i\| \end{aligned} \tag{17}$$

dans laquelle $\|A\|, \|I_r\|, \|E_r\|$ sont les matrices des parties réelles, et $\|B\|, \|I_i\|, \|E_i\|$ les matrices des parties imaginaires des éléments des matrices respectives.

Remplaçant les matrices par leurs expressions dans l'équation matricielle (17), on obtient l'équation :

$$(\|A\| + j\|B\|)\,(\|I_r\| + j\|I_i\|) = \|E_r\| + J\|E_i\|$$

qui se décompose en un système de deux équations matricielles

$$\begin{aligned} \|A\| \cdot \|I_r\| - \|B\| \cdot \|I_i\| &= \|E_r\| \\ \|B\| \cdot \|I_r\| + \|A\| \cdot \|I_i\| &= \|E_i\| \end{aligned} \tag{18}$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
Z_{LA}+Z_{2I} & a\,Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & a\,Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & -1 & \cdot & \cdot \\
\hline
a^2\,Z_{2I} & Z_{LB}+Z_{2I} & a\,Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & a\,Z_{2I} & Z_{2I} & a\,Z_{2I} & -1 & \cdot & \cdot \\
\hline
a\,Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & Z_{LC}+Z_{2I} & a\,Z_{2I} & Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & Z_{2I} & -1 & \cdot & \cdot \\
\hline
Z_{2I} & a\,Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & Z_{MA}+Z_{2I}+Z_{2II} & a^2(Z_{2I}+Z_{2II}) & a(Z_{2I}+Z_{2II}) & a^2(Z_{2I}+Z_{2II}) & \cdot & -1 & \cdot \\
\hline
a\,Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & Z_{2I} & a\,(Z_{2I}+Z_{2II}) & Z_{MC}+Z_{2I}+ & a^2(Z_{2I}+Z_{2II}) & Z_{2I}+Z_{2II} & \cdot & -1 & \cdot \\
 & & & & +Z_{2II} & & & & & \\
\hline
a^2\,Z_{2I} & Z_{2I} & a\,Z_{2I} & a^2\,(Z_{2I}+Z_{2II}) & a(Z_{2I}+Z_{2II}) & Z_{NB}+Z_{2I}+ & a\,(Z_{2I}+ & \cdot & \cdot & -1 \\
 & & & & & +Z_{2II}+Z_{2III} & +Z_{2II}+Z_{2III}) & & & \\
\hline
a\,Z_{2I} & a^2\,Z_{2I} & Z_{2I} & a\,(Z_{2I}+Z_{2II}) & Z_{2I}+Z_{2II} & a^2(Z_{2I}+Z_{2II}+ & Z_{NC}+Z_{2I}+ & \cdot & \cdot & -1 \\
 & & & & & +Z_{2III}) & +Z_{2II}+Z_{2III} & & & \\
\hline
Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & Z_{1I} & 1 & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & Z_{1II} & Z_{1II} & Z_{1II} & Z_{1II} & -1 & 1 & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{1III} & Z_{1III} & \cdot & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|}
\hline
I'_{1L} \\
\hline
I''_{1L} \\
\hline
I'''_{1L} \\
\hline
I'_{1M} \\
\hline
I'''_{1M} \\
\hline
I''_{1N} \\
\hline
I'''_{1N} \\
\hline
U_{1L} \\
\hline
U_{1M} \\
\hline
U_{1N} \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline
\cdot \\
\hline
\cdot \\
\hline
\cdot \\
\hline
\cdot \\
\hline
\cdot \\
\hline
\cdot \\
\hline
\cdot \\
\hline
E_1 \\
\hline
\cdot \\
\hline
\cdot \\
\hline
\end{array}
\qquad (15)
$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
Z_{LA}+Z_{1I}+ & Z_{1I}+aZ_{2I} & Z_{1I}+a^2Z_{2I} & Z_{1I}+Z_{2I} & Z_{1I}+a^2Z_{2I} & Z_{1I}+aZ_{2I} & Z_{1I}+a^2Z_{2I} \\
+Z_{2I} & & & & & & \\
\hline
Z_{1I}+a^2Z_{2I} & Z_{LB}+ & Z_{1I}+aZ_{2I} & Z_{1I}+a^2Z_{2I} & Z_{1I}+aZ_{2I} & Z_1+Z_{2I} & Z_{1I}+aZ_{2I} \\
 & +Z_{1I}+Z_{2I} & & & & & \\
\hline
Z_{1I}+aZ_{2I} & Z_{1I}+a^2Z_{1I} & Z_{LC}+Z_{1I}+ & Z_{1I}+aZ_{2I} & Z_1+Z_{2I} & Z_{1I}+a^2Z_{2I} & Z_1+Z_{2I} \\
 & & +Z_{2I} & & & & \\
\hline
(1-a)Z_{2I} & (a-a^2)Z_{2I} & (a^2-1)Z_{2I} & Z_{MA}+ & -Z_{MC}+ & (a-a^2)Z_{2I}+ & (a^2-1)Z_{2I}+ \\
 & & & +(1-a)Z_{2I}+ & +(a^2-1)Z_{2I}+ & +(a-a^2)Z_{2II} & +(a^2-1)Z_{2II} \\
 & & & +(1-a)Z_{2II} & +(a^2-1)Z_{2II} & & \\
\hline
(a^2-a)Z_{2I} & (1-a^2)Z_{2I} & (a-1)Z_{2I} & (a^2-a)Z_{2I}+ & (a-1)Z_{2I}+ & Z_{NB}+ & -Z_{NC}+ \\
 & & & +(a^2-a)Z_{2II} & +(a-1)Z_{2II} & +(1-a^2)Z_{2I}+ & +(a-1)Z_{2I}+ \\
 & & & & & +(1-a^2)Z_{2II}+ & +(a-1)Z_{2II}+ \\
 & & & & & +(1-a^2)Z_{2III} & +(a-1)Z_{2III} \\
\hline
Z_{1I}+a^2Z_{2I} & Z_{1I}+Z_{2I} & Z_{1I}+aZ_{2I} & Z_{1I}+Z_{1II}+ & Z_{1I}+Z_{1II}+ & Z_{NB}+Z_{1I}+ & Z_{1I}+Z_{1II}+ \\
 & & & +a^2(Z_{2I}+ & +a(Z_{2I}+Z_{2II}) & +Z_{1II}+Z_{1III}+ & +Z_{1III}+ \\
 & & & +Z_{2II}) & & +Z_{2I}+Z_{2II}+ & +a(Z_{2I}+ \\
 & & & & & +Z_{2III} & +Z_{2II}+Z_{2III}) \\
\hline
Z_{1I}+aZ_{2I} & Z_1+a^2Z_{2I} & Z_{1I}+Z_{2I} & Z_{1I}+Z_{1II}+ & Z_{1I}+Z_{1II}+ & Z_{1I}+Z_{1II}+ & Z_{NC}+Z_{1I}+ \\
 & & & +a(Z_{2I}+ & +Z_{2I}+Z_{2II} & +Z_{1III}+ & +Z_{1II}+Z_{1III}+ \\
 & & & +Z_{2II}) & & +a^2(Z_{2I}+ & +Z_{2I}+Z_{2II}+ \\
 & & & & & +Z_{2II}+Z_{2III}) & +Z_{2III} \\
\hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|}
\hline
I'_{1L} \\
\hline
I''_{1L} \\
\hline
I'''_{1L} \\
\hline
I'_{1M} \\
\hline
I'''_{1M} \\
\hline
I''_{1N} \\
\hline
I'''_{1N} \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|}
\hline
E_1 \\
\hline
E_1 \\
\hline
E_1 \\
\hline
\cdot \\
\hline
\cdot \\
\hline
E_1 \\
\hline
E_1 \\
\hline
\end{array}
\qquad (16)
$$

et, en groupant les matrices :

$$\left\|\begin{array}{cc} \|A\| & -\|B\| \\ \|B\| & \|B\| \end{array}\right\| \times \left\|\begin{array}{c} \|I_r\| \\ \|I_i\| \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} \|E_r\| \\ \|E_i\| \end{array}\right\| \tag{19}$$

L'équation matricielle (19) ne comprend que des nombre réels, mais la matrice des coefficients des inconnues a un ordre deux fois plus grand que la matrice des coefficients de l'équation (17), dont les coefficcients des inconnues, les termes libres et les inconnues sont des nombres complexes.

De la résolution du système (18) par rapport aux matrices $\|I_r\|$ et $\|I_i\|$, on obtient

$$\begin{aligned} \|K\| \cdot \|I_r\| &= \|\mathcal{E}_r\| \\ \|K\| \cdot \|I_i\| &= \|\mathcal{E}_i\| \end{aligned} \tag{20}$$

où :

$$\begin{aligned} \|K\| &= \|A\| + \|B\| \cdot \|A\|^{-1} \cdot \|B\| \\ \|\mathcal{E}_r\| &= \|E_r\| + \|B\| \cdot \|A\|^{-1} \cdot \|E_i\| \\ \|\mathcal{E}_i\| &= \|E_i\| - \|B\| \cdot \|A\|^{-1} \cdot \|E_r\| \end{aligned} \tag{21}$$

ou :

$$\begin{aligned} \|K\| &= \|B\| + \|A\| \cdot \|B\|^{-1} \cdot \|A\| \\ \|\mathcal{E}_r\| &= \|E_i\| + \|A\| \cdot \|B\|^{-1} \cdot \|E_r\| \\ \|\mathcal{E}_i\| &= -\|E_r\| + \|A\| \cdot \|B\|^{-1} \cdot \|E_i\| \end{aligned} \tag{22}$$

Pour le calcul des matrices $\|K\|$, $\|\mathcal{E}_r\|$ et $\|\mathcal{E}_i\|$ on adopte les formules (20) ou (21), selon la modalité la plus aisée de calculer la matrice inverse $\|A\|^{-1}$ ou $\|B\|^{-1}$. Après avoir calculé ces matrices, on résout les équations matricielles (19) par l'une des méthodes connues. Le volume des calculs est beaucoup plus petit que dans le cas de la résolution de deux systèmes d'équations linéaires du même ordre, étant donné l'identité des matrices des coefficients des inconnues dans les équations (19).

Exemple numérique

Soit un réseau triphasé comprenant trois portions de ligne de 110 kV, dont les caractéristiques sont indiquées dans le tableau 2 :

Tableau 2

Portion	Longueur (km)	Section du conducteur en *Alu — Ac* (mm^2)	Impédance de séquence directe (Ω)		Impédance de séquence inverse (Ω)	
			Symbole	Valeur	Symbole	Valeur
I	15	240	Z_{1I}	$1{,}9 + j\,5{,}5$	Z_{2I}	$1{,}9 + j\,5{,}5$
II	35	240	Z_{1II}	$4{,}3 + j\,12{,}9$	Z_{2II}	$4{,}3 + j\,12{,}9$
III	50	120	Z_{1III}	$12{,}0 + j\,19{,}6$	Z_{2III}	$12{,}0 + j\,19{,}6$

Le schéma de principe est le même que celui donné dans la fig. 12 a. Le réseau est alimenté par un système de barres de 110 kV, reliées à une source de puissance très grande (théoriquement infinie). Les tensions sur les phases de ces barres sont symétriques et égales à 66.474 V.

Dans les sous-stations L, M et N sont connectées des charges monophasées, dont les puissances actives, facteur de puissance et impédances équivalentes, calculées pour la tension de 110 kV, sont données dans le tableau 3.

Tableau 3

Sous-station	Phases de connexion	Puissance active (MW)		Facteur de puissance	Impédance équivalente (Ω)	
		Symbole	Valeur		Symbole	Valeur
L	*BC*	P_{LA}	6,0	0,90	Z_{LA}	$1625 + j\,786$
	AC	P_{LB}	4,0	0,80	Z_{LB}	$1935 + j\,1405$
	AB	P_{LC}	2,5	0,85	Z_{LC}	$3490 + j\,2545$
M	*BC*	P_{MA}	4,0	0,80	Z_{MA}	$1935 + j\,1405$
	AB	P_{MC}	6.0	0,90	Z_{MC}	$1625 + j\,786$
N	*AC*	P_{NB}	6.0	0,90	Z_{NB}	$1625 + j\,786$
	AB	P_{NC}	2,5	0,85	Z_{NC}	$3490 + j\,2545$

Avec les valeurs données par les tableaux 2 et 3, l'équation matricielle (14) devient :

$1625+j786$	·	·	·	·	·	·	-1	·	·	1	·	·	I'_{1L}	0
·	$1935+j1405$	·	·	·	·	·	-1	·	·	$-0,5-j0,866$	·	·	I''_{1L}	0
·	·	$3490+j2545$	·	·	·	·	-1	·	·	$-0,5+j0,866$	·	·	I'''_{1L}	0
·	·	·	$1935+j1405$	·	·	·	·	-1	·	·	1	·	I'_{1M}	0
·	·	·	·	$1625+j786$	·	·	·	-1	·	·	$-0,5+j0,865$	·	I'''_{1M}	0
·	·	·	·	·	$1625+j786$	·	·	·	-1	·	·	$-0,5-j0,866$	I''_{1N}	0
·	·	·	·	·	·	$3490+j2545$	·	·	-1	·	·	$-0,5+j0,866$	I'''_{1N}	0
$1,9+j5,5$	$1,9+j5,5$	$1,9+j5,5$	$1,9+j5,5$	$1,9+j5,5$	$1,9+j5,5$	$1,9+j5,5$	1	·	·	·	·	·	U_{1L}	66.474
·	·	·	$4,3+j12,9$	$4,3+j12,9$	$4,3+j12,9$	$4,3+j12,9$	-1	1	·	·	·	·	U_{1M}	0
·	·	·	·	·	$12,0+j19,6$	$12,0+j19,6$	·	-1	1	·	·	·	U_{1N}	0
$1,9+j5,5$	$-5,71-j1,105$	$3,81-j4,395$	$1,9+j5,5$	$3,81-j4,395$	$-5,71-j1,105$	$3,81-j4,395$	·	·	·	-1	·	·	U_{2L}	0
·	·	·	$4,3+j12,9$	$9,02+j10,17$	$-13,32-j2,73$	$9.02--j10,17$	·	·	·	1	-1	·	U_{2M}	0
·	·	·	·	·	$-22,96+j0,59$	$10,96-j20,19$	·	·	·	·	·	-1	U_{2N}	0

$\times$ $=$ (23)

La résolution du système d'équation (23) a été effectuée avec la machine électronique de calcul CIFA du centre de calcul de l'Académie de la République Populaire Roumaine. Les valeurs obtenues pour les courants et les tensions ont été les suivants :

$$I'_{1L} = 32{,}55 - j\,16{,}18\,[A]\,; \quad I''_{1L} = 22{,}04 - j\,16{,}36\,[A]$$

$$I'''_{1L} = 12{,}18 - j\,9{,}08\,[A]\,; \quad I'_{1M} = 21{,}46 - j\,16{,}30\,[A]$$

$$I'''_{1M} = 31{,}60 - j\,16{,}37\,[A]\,; \quad I''_{1N} = 28{,}26 - j\,17{,}64\,[A]$$

$$I''_{1N} = 11{,}71 - j\,8{,}82\,[A]$$

$$U_{1L} = 65.618{,}78 - j\,701{,}16\,[V]\,; \quad U_{2L} = 21{,}55 - j\,0{,}9\,[V]$$

$$U_{1M} = 64\,461{,}61 - j\,1.679{,}20\,[V]\,; \quad U_{2M} = 53{,}03 - j\,311{,}24\,[V]$$

$$U_{1N} = 63.472{,}50 - j\,2.194{,}30\,[V]\,; \quad U_{2N} = -640{,}86 - j\,217{,}05\,[V]$$

Les valeurs efficaces des tensions directes et inverses sont :

$$|U_{1L}| = 65.622{,}5\,[V]\,; \quad |U_{1M}| = 64.483{,}4\,[V]\,; \quad |U_{1N}| = 63.510{,}4\,[V]$$

$$|U_{2L}| = 21{,}56\,[V]\,; \quad |U_{2M}| = 315{,}70\,[V]\,; \quad |U_{2N}| = 678{,}90\,[V].$$

La valeur la plus grande du degré de dissymétrie des tensions revient dans le point N, comme c'était à prévoir :

$$K_N = \frac{|U_{2N}|}{|U_{1N}|} = \frac{678{,}90}{\epsilon\,3510{,}4} = 0{,}0107\ (1{,}07\%)\,.$$

A l'aide de ces valeurs on peut calculer les courants de séquence inverse prélevés par les impédances de charge :

$$I'_{2L} = -I'_{1N} = 32{,}55 - j\,16{,}18\,[A]\,; \quad I''_{2L} = -a\,I''_{1L} = 3{,}15 - j\,27{,}27\,[A]$$

$$I'''_{2L} = -a^2 I'''_{1L} = 13{,}95 + j\,6{,}01\,[A]\,; \quad I'_{2M} = -I'_{1M} = -21{,}46 + j\,16{,}30\,[A]$$

$$I'''_{2M} = -a^2 I'''_{1M} = 29{,}98 + j\,19{,}50\,[A]\,;$$

$$I''_{2N} = -a\,I''_{1N} = -1{,}15 - j\,33{,}29\,[A]$$

$$I'''_{2N} = -a^2 I'''_{1N} = 13{,}49 + j\,5{,}73\,[A]$$

ainsi que les courants de séquence directe et inverse, sur les trois portions de ligne :

$$I_{1III} = I''_{1N} + I'''_{1N} = 39{,}97 - j\,26{,}46\,[A]$$

$$I_{1II} = I_{1III} + I'_{1M} + I'''_{1M} = 93{,}03 - j\,59{,}13\,[A]$$

$$I_{1I} = I_{1II} + I'_{1L} + I''_{1L} + I'''_{1L} = 159{,}80 - j\,100{,}75\,[A]$$

$$I_{2III} = I''_{2N} + I'''_{2N} = 12{,}34 - j\,27{,}56\,[A]$$

$$I_{2II} = I_{2III} + I'_{2M} + I'''_{2M} = 20{,}86 + j\,8{,}24\,[A]$$

$$I_{2I} = I_{2II} + I'_{2L} + I''_{2L} + I'''_{2L} = 70{,}51 - j\,29{,}20\,[A]\,.$$

On peut calculer aussi les courants et les tensions sur les phases, dans n'importe quel point du réseau. Par exemple, les tensions sur les phases dans le point N sont les suivantes :

$$U_{NA} = U_{1N} + U_{2N} = 62.831{,}64 - j\,2.411{,}35\,[V]\,; \qquad |U_{NA}| = 62.877{,}89\,[V]$$

$$U_{NB} = a^2 U_{1N} + a\,U_{2N} = -33.126{,}13 - j\,53.143{,}69\,; \qquad |U_{NB}| = 62.622{,}54\,[V]$$

$$U_{NC} = a\,U_{1N} + a^2 U_{2N} = -29.705{,}51 + j\,56.663{,}74\,; \qquad |U_{NC}| = 63.978{,}09\,[V]$$

et les courants sur les phases dans la portion 1 de ligne :

$$I_{1A} = I_{11} + I_{21} = 2\,0{,}31 - j\,129{,}95$$

$$I_{1B} = a^2 I_{11} + a\,I_{21} = -180{,}47 - j\,12{,}36$$

$$I_{1C} = a\,I_{11} + a^2 I_{21} = -53{,}26 - j\,142{,}21$$

Les pertes de tension sur les phases dans le point N ont les valeurs :

$$\Delta U_{NA} = 5{,}41\%\ ;\quad \Delta U_{NB} = 5{,}79\%\ ;\quad \Delta U_{NC} = 3{,}75\%\,.$$

Chaire de Centrales électriques
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *C. F. Wagner, R. D. Evans :* Symmetrical components, New York 1933.
2. *N. N. Scedrin :* K teorii slojnîh nesimmetricinîh rejimov elektriceskih sistem, Elektricestvo, nr. 5 (1946).
3. *N. N. Sokolov :* Postroenie i primennenie kompleksnîh shem zameşceniia pri slojnîh nesimmetricinîh ţepiah, Elektricestvo No. 8 (1949).
4. *Edith Clarke :* Circuit analysis of A-C power systems, New York, 1943.
5. *A. Hochrainer :* Symmetrische Komponenten in Drehstromsystemen, Springer-Verlag, 1957.
6. *G. I. Atabekov :* Teoreticeskie osnovî releinoi zascitî vîsokovoltnîh setei, GEI, 1957.
7. *E. Pronteau :* Calcul des tensions dans un reseau triphasé déséquilibré par un preélèvement de puissance monophasée entre deux phases, RGE No. 5, Mai (1950) P. 225--231.
8. *M. Vajta :* Die Probleme beim Netz von 50 Hz Einphasen-Vollbahnsystemen, Acta Technica Academiae Scienttiarum Hungaricae, 1953.
9. *N. G. Maksimovici :* Lineinîe elektriceskie ţepi i ih preobrazobaniîa, G.E.I. 1961.
10. *Janko Bela :* Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare, Edit. Acad. R.P.R. 1961.

К РАСЧЕТАН ТРЕХФАЗНЫХ СЕТЕЙ С ОЕНОФАЗНЫМИ ОТВЕТВЛЕНИЯМИ

(Резюме)

В некоторых случаях трехфазные сети должны ритать однофазные приемнпки (однофазные электропечи, мощные сварочные агрегаты, установки электротяги и пр.). Расчет этих сетей не освещен конкретно для общего случая сети со многими точками асимметрий (однофазные нагрузки).

Использия теорию симметрических составлюющих в оанной работе выла разработана оригинальная комплекснаь схема замещения трехфазнпз сети с однофазными ответвлениями, нри помощи которой может быть выведена система линейных уравнений для расчета напряжений в различных узлах, а также токов в разлйсных ответвлениьх сети. Решение системы уравнений пройзводится матрицным исчислением на цифровой электронной машине.

Работа дополнена рримером расчета.

CONTRIBUTION TO THE CALCULATION OF THREE-PHASE NETWORKS WITH SINGLE-PHASE LOADS

(Summary)

In some cases, three-phase networws must feed single-phase receivers (electric furnaces, powerful welding machines, electric traction installations etc.). Thse networks were not calculated on the concrete wise of a network with many points of dissymmetrie (single phase loads).

Using the theory of the symmetrical component în that study, has been established an original equivalent sequence circuit of a three phase network with single phase consummers which may be used for writing the linear equation system for the calculation of voltages in various nodes and of currents indifferent branches of the network. The equation system is solved by matrix calculus using a digital computor. The study is completed by a calculation example.

CONTRIBUTION AU CALCUL DES RÉSEAUX TRIPHASÉS Á RACCORD MONOPHASÉS

(Résumé)

Les réseaux triphasés doivent alimenter parfois des recepteurs monophasés (fours électriques, machines à sonder puissantes, installations de traction électrique, etc.). Le calcul de ces réseaux n'a pas été traité de manière concrète pour le cas général d'un néseau à plusieurs points de dyssimétrie (charges monophasées).

En utilisant la théorie des composantes symétriques on a établi un schéma équivalent complexe original du réseau trhiphasé à raccords monophasés à l'aide du quel on peut écrire le système d'équations linéaires pour le calcul des tensions dans différents noeuds et des courants dans différentes branches du réseau.

La resolution du système d'équations s'effectue par calcul matriciel en utilisant une installation digitale pour les calcules numériques. L'étude est complété par un exemple de calcul.

BEITRAG ZUR BERECHNUNG DREIPHASIGER NETZE MIT EINPHASIGEN ANSCHLÜSSEN

(Zusammenfassung)

Die dreiphasigen Netze müssen manchmal einphasige Abnehmer speisen (elektrische Öfen, kräftige Schweissgeräte, elektrische Eisenbahnanlagen, u.s.w.). Die Berechnung dieser Netze wurde nicht konkret behandelt im allgemeinen Fall eines Netzes mit mehreren Unsymmetriestellen (einphasige Lasten).

Unter Anwendung der Theorie der symmetrischen Komponenten wurde in der vorliegenden Abhandlung ein originelles komplexes Ersatzschaltbild festgelegt für dreiphasige Netze mit einphasigen Anschlüssen, mit dessen Hilfe das System der linearen Gleichungen für die Berechnung der Spannungen in verschiedenen Knoten und der Ströme in den verschiedenen Zweigen des Netzes aufgestellt werden kann. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt durch Matritzenrechnung unter Benutzung eines elektronischen Digitalrechnears für Zahlenrechnungen. Ein Rechenbeispiel ergänzt die Abhandlung.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 3

ELECTROTEHNICA

EINE NEUE METHODE ZUR ABLEITUNG ALLGEMEINER BETRIEBSGLEICHUNGEN VON SYNCHRONMASCHINEN

VASILE N. NEDELCU

Übersicht. Aus der Fachliteratur ist in letzter Zeit eine Tendenz zur Systematisierung der Probleme der Synchronmaschinentheorie ersichtlich.

Diese Tendenz wird einerseits durch das rasche Anwachsen der Anzahl solcher Arbeiten, andererseits dadurch bedingt, dass, infolge der Verwendung verschiedener Varianten der allgemeinen Betriebsgleichungen, die Anwendung der entsprechenden Arbeiten sehr erschwert ist.

In diesem Sinne ist die „Klassifizierung der Betriebsgleichungen synchroner Maschinen" zu einem besonderen Problem geworden und es kann, nach Überprüfung der Arbeiten [2, 3, 4] behauptet werden, dass es kein leichtes ist, da, wie in [3] ausgeführt, die Zahl der laufend angewandten Varianten sehr gross und die der möglichen, bis zu 128 veranschlagt ist.

Es wirft sich somit die Frage auf, ob für die Gültigkeit oder Ungültigkeit, bzw., in Anbetracht der willkürlich angenommenen Hypothesen, für die Beschränkung der Anzahl dieser Gleichungen, doch Kriterien engegeben werden können.

Unter Berücksichtigung der Vielzahl der, in der Fachliteratur angewandten Koordinatensysteme, ist in [11] ein zweites gegenwärtig wichtiges Problem ausführlich behandelt worden; es handelt sich hierbei um die, in der Theorie der Wechselstrommaschinen benützten, symbo- angegeben werden können.

In allen sonstigen Arbeiten ist der, zur Lösung dieses Problems beschrittene Weg, folgender: von den Gleichungen im *a, b, c* — System wird auf Gleichungen im *d, q* (oder *d, q, O*) — System übergegangen; dann werden die komplexen Hauptvektoren eingesetzt, ohne zu berücksichtigen, dass die Gleichungen im *d, q* — System im Grenzfalle die Sollbetriebsgleichungen darstellen müssen; als Folge werden in den Gleichungen willkürliche Zeichen eingesetzt.

Vorliegende Arbeit versucht eine Antwort auf die obengenannte Frage zu geben.

Zu diesem Zwecke wird der Begriff eines zeiträumlichen Hauptvektors der Momentanwerte des, mit einem im Raume verteilten, symmetrischen und sinusförmigen Wicklungssystem verbundenen Dreiphasensystems eingeführt.

Die Ableitung der Gleichungen fusst auf diesem Begriff und besteht kurzgefasst in Folgendem:

1. Es werden die sich aus der Anwendung der II-ten Kirchhoffschen Regel ergebenden Ständerkreisgleichungen, aufgeschrieben.

2. Die zeiträumlichen Hauptvektoren der Spannungs —, Fluss und Stronsysteme werden eingesetzt.

3. Bedingt durch die d, q — Komponenten werden diese Hauptvektoren derart ausgedrückt, dass im Grenzfalle die allgemeinen Gleichungen das Gleichungssystem des Soolbetriebes (stationär) darstellen.

Einleitung.

In der technischen Fachliteratur werden die allgemeinen Betriebsgleichungen der Synchronmaschine [1] in verschiedenen Varianten angewendet [2, 3, 4].

Die Gründe hierfür sind: die willkürliche Wahl der positiven Richtungen für verschiedene Grössen, der Koordinatenachsen d, q, der Sollbetriebe, der Schreibart des Induktionsgesetzes, u.s.w., sodass gegenwärtig kein Kriterium besteht, nach welchem die in d, q — Koordinaten geschriebenen Gleichungen, auf die, in Vektorgrössen ausgedrückten Hauptgleichungen der Maschine, eindeutig abgestimmt werden könnten.

Wie in [3] ausgeführt, erreicht die Anzahl der, in der Fachliteratur laufend angewandten Gleichungen (in ψ — Veränderlichen), die sich in Abhängigkeit von den ursprünglichen Hypothesen aufstellen lassen, 128.

Es ist klar, dass die grundsätzliche Weiterentwicklung der Wechselstrommaschinentheorie dadurch nicht gefördert wird. Im Gegenteil widmen sich zahlreiche Arbeiten nur der Analyse formaler Aspekte. Ausserdem ruft die gleichzeitige Anwendung verschiedener Formen dieser Gleichungen beim Erfassen und Vergleichen verschiedener wissenschaftlicher Arbeiten, künstlich Schwierigkeiten hervor.

Vorliegende Arbeit versucht nicht eine neue Schreibart — die 129-te — zu finden; sie bezkeckt vielmehr zu beweisen, dass durch Anwendung der üblichen (Erzeuger —, bezw. Verbraucher —) Zählpfeilrichtungssysteme und der entsprechenden Schreibart des Induktionsgesetzes, unter Berücksichtigung der Wesenheit der elektromagnetischen Vorgänge in den Wechselstrommaschinen, die Anzahl der Gleichungen verringert und ihre Ableitung vereinfacht werden kann.

Zu diesem Zwecke wird der Begriff des zeiträumlichen Hauptvektors eines Dreiphasensystems der sinusförmig und symmetrisch im Raume verteilten Skalargrössen (Momentanwerte, Zeitfunktionen) angewendet.

Symbolische Darstellungen der, in der Theorie der Wechselstrommaschine angewandten Skalargrössen

Um die Zusammenhänge und die Eigenschaften der zeiträumlichen Hauptvektoren und der anderen, sowohl in der allgemeinen Ellektrotechnik, als auch in der Wechselstrommaschinentheorie angewandten, symbolischen Grössen, zu unterstreichen, wird im folgenden eine kurze Übersicht der verschiedenen symbolischen Darstellungsmöglichkeiten skalarer Grössen gegeben.

Wie bekannt finden in der Theorie der Wechselstromkreise folgende symbolische Grössen, zur Darstellung von Skalargrössen, Anwendung: umlaufende Zeigler und komplexe Zeiger.

Ausser den umlaufenden oder komplexen Zeigern finden in der Theorie der Wechselstrommaschinen, infolge derer konstruktiven Symmetrie, auch zeitliche Hauptzeiger und räumliche Hauptvektoren Anwendung [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Um den Einfluss der konstruktiven Symmetrie der Stromkreise auf die elektromagnetischen Vorgänge bei umlaufenden Elektromaschinen, im Gegensatz zu den statischen Stromkreisen, hervorzuheben, wird vorerst die Metrik der Hauptzeiger eines, mit einem Dreiphasensystem statischer Stromkreise verbundenen Skalargrössensystems, erläutert.

In diesem Sinne wird das (symmetrische, bezw. unsymmetrische) Skalargrössensystem $y_a(t)$, $y_b(t)$, $y_c(t)$ mit

$$y_n(t) = Y_n \cos(\omega t - \varepsilon_n) \tag{1}$$

angenommen,

$$n = a,\ b,\ c$$

welches folgende Bedingung erfüllt

$$\Sigma\, y_n(t) = 0 \tag{2}$$

und zur Zeit $t=0$, die in Bild 1 angegebenen Werte hat.

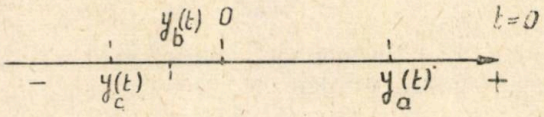


Fig. 1
Die Augenblicksgrössen $y_n(t)$ im Zeitpunkt $t=0$.

Diese Grössen können symbolisch folgendermassen dargestellt werden:

1. Durch drei umflaufende Zeiger $\underleftarrow{y_n}$ (Bild 2), der Amplitude Y_n, die sich mit einer, der Kreisfrequenz der harmonischen Funktionen gleichen Winkelgeschwindigkeit ω, um den Ursprung 0 drehen und die im Zeitpunkt $t=0$ die Anfangsphasen $(-\varepsilon_n)$ gegenüber der Bezugszeitachse oder Realachse des komplexen Systems $(+1, +j)$ haben.

Die Ausdrücke für die Umlaufzeiger (Fresnetzeiger) sind :

$$\overleftarrow{y_n} = Y_n e^{j(\omega t - \varepsilon_n)} \tag{3}$$

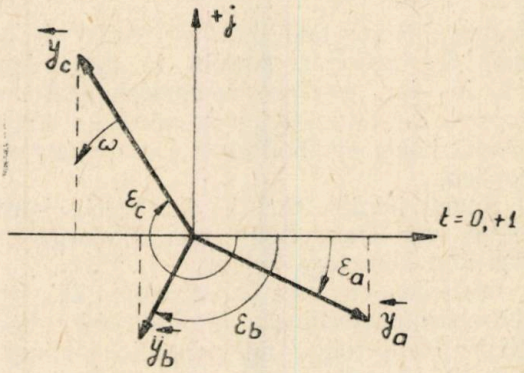


Fig. 2

Die symbolische Darstellung der Grössen $y_n(t)$. mittels komplexer Zeiger y_n.

Zwischen diesen Bildfunktionen und den Momentangrössen (Originalfunktionen) besteht die eindeutige Beziehung :

$$y_n(t) = R_e(\overleftarrow{y_n}) \tag{4}$$

2. Die Skalargrössen des angenommenen Systems können ebenfalls gegenüber dem komplexen Koordinatensystem, mittels komplexer, stehender Zeiger dargestellt werden ; in diesem Falle jedoch wird sich die Zeitachse (t=0) mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω, der Richtung der Umlaufzeiger entgegen, drehen (Bild 3).

Die stehenden komplexen Zeiger können durch die Formel

$$\dot{Y}_n = Y_n e^{-j\varepsilon_n} \tag{5}$$

ausgedrückt werden. Die Beziehungen zwischen den Realfunktionen und den neuen Bilderfunktionen werden

$$y_n(t) = R_e(\dot{Y}_n e^{j\omega t}) \tag{6}$$

Vergleicht man die Gleichungen (4) und (6), so ergibt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen den komplexen Umlaufzeigern und den stehenden, komplexen Zeigern. Im Falle der Umlaufzeiger ergeben sich Originalfunktionen unmittelbar als deren Projektionen (der Umlaufzeiger) auf die reale (bezw. die Bezugzeitachse $t=0$) oder die imaginäre Achse. Im Falle stehender, komplexer Zeiger ergeben sich die Originalfunktionen als Realteil (oder Imaginärteil) des Produktes zwischen diesen stehenden Zeigern und dem Umlaufsoperator $e^{j\omega t}$.

Zwischen den beiden Darstellungsarten bestehen die Beziehungen

$$\overleftarrow{y_n} = \dot{Y}_n e^{j\omega t} \tag{7}$$

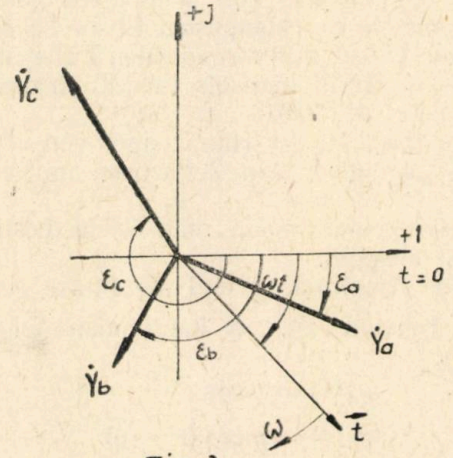


Fig.3

Die symbolische Darstellung der Grössen $y_n(t)$, mittels komplexer Zeiger $\dot{Y}_n$.

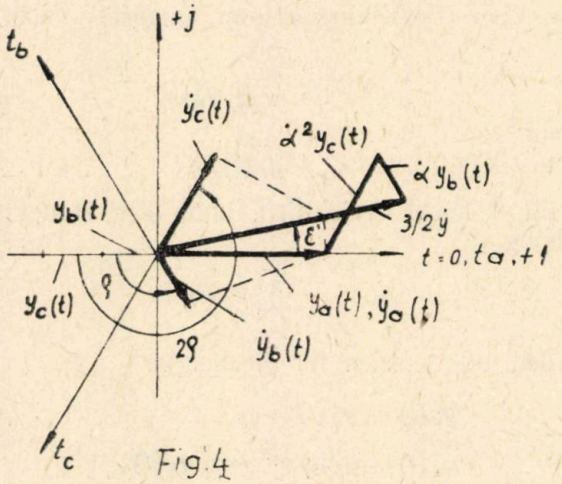


Fig.4

Die symbolische Darstellung der Grössen $y_n(t)$, mittels des zeitlichen Hauptzeigers $\dot{y}$.

3. Das angenommene Dreiphasensystem und im allgemeinen jedes Dreiphasen — (bezw. Mehrphasen —) System, welches die Bedingungen der Gl. (2) erfüllt, kann auch durch einen einzigen Zeiger — den Umlaufhauptzeiger $\dot{y}$ (Bild 4) dargestellt werden.

In diesem Falle wird für jede Phase eine Zeitachse angenommen, sodass die Zeitchsen der drei Phasen (t_a, t_b, t_c) mit $2\pi/3$ elektrische Radiane gegeneinander verschoben sind und deren Zeitachsenphasenfolge der Phasenfolge der umlaufenden oder komplexen Zeiger entgegengesetzt ist. Die t_a — Achse muss in der komplexen Ebene so ausgerichtet werden, dass sie mit der Achse (t=0) der vorgehenden Fälle übereinstimmt.

Die Originalgrössen erhält man als Projektion dieses Zeigers auf die entsprechende Zeitachse.

Im allgemeinsten Falle ist der Hauptzeiger von veränderlicher Amplitude und dreht sich gegenüber den Zeitachsen mit veränderlichter Geschwindigkeit.

Die Metrik dieses Zeigers kann man leicht bestimmen, wenn man von seiner Definition ausgeht.

Nimmt man seine Amplitude y und die Phase gegenüber der Achse t_a ε' [$\dot{y} = y < \varepsilon'$] als bekannt an, so kann man folgende Beziehungen schreiben

$$\begin{aligned} y_a(t) &= y \cos \varepsilon' \\ y_b(t) &= y \cos (\varepsilon' - \varrho) \\ y_c(t) &= y \cos (\varepsilon' + \varrho) \end{aligned} \tag{8}$$

worin

$$\varrho = 2\pi/3$$

oder, wenn man diese Beziehungen zum Quadrat erhebt und summiert erhält man:

$$y = \sqrt{2/3}\ \sqrt{\sum y_n^2(t)} \tag{9}$$

und entsprechend

$$\cos \varepsilon' = y_a(t)/y\,. \tag{10}$$

Wie aus Bild 4 leicht ersichtlich, kann der Hauptzeiger auch mit Hilfe der Beziehung

$$\dot{y} = \frac{2}{3} \cdot \sum \dot{y}_n(t) \tag{11}$$

ausgedrückt werden, aus welcher für die Zeigler

$$\begin{aligned} \dot{y}_a(t) &= y_a(t) \\ \dot{y}_b(t) &= y_b(t)\, e^{j\varrho} = \dot{\alpha}\, y_b(t) \\ \dot{y}_c(t) &= y_c(t)\, e^{j2\varrho} = \dot{\alpha}^2\, y_c(t) \end{aligned} \tag{12}$$

folgt, in welchen $\dot{\alpha}$, $\dot{\alpha}^2$ die zeitlichen Umlaufsoperatoren sind

$$\dot{\alpha} = e^{j\varrho}\ ;\ \dot{\alpha}^2 = e^{j2\varrho}\,.$$

Diese Zeiger sind in der Ebene stillstehend, nach den t_a, t_b, t_c — Achsen ausgerichtet und haben den Momentanwerten gleiche Amplituden.

Es muss die Tatsache hervorgehoben werden, dass im Falle statischer Stromkreise, sowohl der Hauptzeiger ($\dot{y}$) als auch die Zeiger $\dot{y}_n(t)$ keine physikalische Bedeutung haben.

4. Der zeiträumliche Hauptvektor.

Die Arbeitsweise elektrischer Wechselstrommaschinen beruht auf dem Auftreten folgender Drehgrössen im Luftspaltraum: magnetische Drehfelder, magnetische Drehspannungen, elektromotorische Drehspannungen usw.

Die Eigenschaften der Drehgrössen sind aus der klassischen Theorie der elektrischen Maschinen bekannt. Bekannt ist auch, dass die Umlaufsrichtung der Drehgrössen an der Peripherie des Luftspaltes mit der Richtung der Phasenfolge der Momentangrössen übereinstimmt und dass die Maximalamplitude der Raumwelle der Drehgrössen stets mit der geometrischen Achse der Wicklungen übereinstimmt, in denen die entsprechende Momentangrösse im angenommenen Zeitpunkt ihren höchsten Wert annimmt.

Die grundsätzliche Eigenschaft der Drehgrössen gestattet die Abstimmung der Skalargrössen (Momentagrössen) mit den Raumgrössen, folglich die Bestimmung der Metrik der zeiträumlichen Hauptvektoren.

Zu diesem Zwecke vereinigen wir das Skalargrössensystem $y_n(t)$ mit einem symmetrisch und sinusförmig, an der Peripherie des Luftspaltes einer Wechselstrommaschine verteilten Dreiwicklungsystem.

In diesem Falle entsprechen den skalaren Momentanwerten zeiträumliche Vektoren $\dot{y}_n(t)$, die nach den geometrischen Achsen der Stromkreise (a, b, c), positiv oder negativ ausgerichtet sind, je nachdem die Momentanwerte der angenommenen Grössen, positiv oder negativ sind; sind die Wicklungen sinusförmig verteilt, so erhält man die resultierende Drehgrösse durch vektorielle Summierung der drei Grössen je Phase.

Gleichzeitig schreibt die weiter oben erwähnte grundsätzliche Eigenschaft der Drehgrössen, die Ausrichtung der geometrischen Achsen der Stromkreise (a, b, c) gegenüber den Zeitachsen der Grössen aus den entsprechenden Wicklungen (t_a, t_b, t_c) vor und zwar müssen die zwei Achsensysteme sich überlagern (Bild 5).

Nun kann die Metrik der zeiträumlichen Hauptxektoren durch folgende Beziehung zestimmt werden:

$$\underline{\dot{y}} = 2/3 \cdot \sum \underline{\dot{y}}_n(t) = 2/3\,[y_a(t) + \underline{\alpha}\, y_b(t) + \underline{\alpha}^2\, y_c(t)] \qquad (13)$$

worin $\underline{\alpha}$, $\underline{\alpha}^2$ die räumlichen Umlaufsoperatoren:

$$\alpha = e^{j\rho}\ ;\ \alpha^2 = e^{j2\rho} \text{ sind.}$$

Durch Einführung der zeiträumlichen Hauptvektoren und der zwei Koordinatenachsensysteme (des zeitlichen und des geometrischen), ist ein wichtiges methodologisches, die Abstimmung der zeitlichen Phasenverschiebungen und der Raumverschiebungen getreffendes Problem gelöst [5, 6, 7, 11]: in Wechselstrommaschinen entsprechen den zeitlichen

Phasenverschiebungen zwischen den Momentangrössen, Verschiebungen zwischen den entsprechenden Raumwellen und in den Zeiger — oder Vektorendiagrammen überlagern sich die zwei (räumliche und zeitliche) Winkelarten.

Andererseits und physikalisch gesehen, erscheint die Darstellung der zeiträumlichen Hauptvektoren gegenüber den zwei Koordinatenachsen-

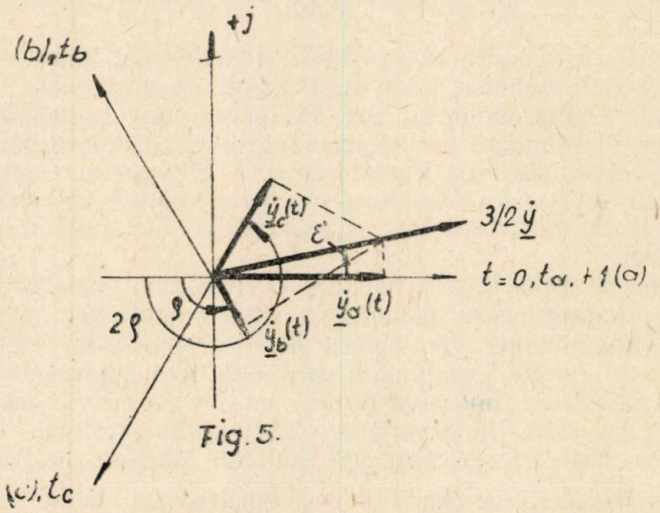


Fig. 5.

Die symbolische Darstellung der symmetrisch und sinusförmig im Raume verteilten Grössen y, mittels des zeiträumlichen Hauptvektors.

systemen notwendig, um den Ablauf der elektromagnetischen Vorgänge in Zeit und Raum eindeutig zu kennzeichnen: die Projektionen der zeiträumlichen Hauptvektoren auf die Zietachsen t_a, t_b, t_c, die als Verlängerung der Zeitachse (t=0) betrachter werden müssen, erfüllen die Bedingung der Gleichung (2) und die Projektionen desselben Hauptvektors auf die geometrischen a, b, c Achsen erfüllen die Bedingung der Gleichung (13).

Die allgemeinen Betriebsgleichungen von Synchronmaschinen

a) *Die synchrone Maschine im Generatorbetrieb.*

Es werden folgende Hypothesen angenommen:
— Sollbetrieb — stationärer übererregter Betrieb;
— die Maschine wird in Park-schem Sinne als idealisiert betrachtet;
— der Läufer dreht sich in positiver trigonometrischer Richtung;
— das Zeiger — bezw, Vektor-Diagramm der Spannungen wird im ersten trigonometrischen Quadranten so dargestellt, dass die Längsachse

(d) mit der Realachse und die Querachse (q) mit der Imaginärachse der komplexen Ebene übereinstimmen.

Wird auf die Ständerstromkreise das II-te Kirchhoff-Gesetz angewendet, so erhält man gegenüber dem natürlichen Koordinatensystem (der magnetischen oder geometrischen Wicklungsachsen a, b, c), unter Anwendung des Erzeuger-Zählpfeilrichtungssystems auf die Betriebsgrössen:

$$u_n = -D\psi_n - R\,i_n = e_n - R\,i_n \tag{14}$$

worin

u_n, ψ_n, i_n, e_n — die mit der n-Phase verbundenen Momentanwerte Klemmenspannung, des resultierenden Flusses, Stromes und der induzierten EMK sind;

R — der Widerstand einer Phase;

D — der zeitliche Ableitungsoperator.

Werden die Gleichungen der Indexe b, c, des Systems (14) mit $\underline{\alpha}(\dot{\alpha})$, bezw. $\underline{\alpha}^2$ ($\dot{\alpha}^2$) multipliziert, die rechte und die linke Seite der drei Beziehungen summiert und in der Folge die Summen mit dem Faktor 2/3 multipliziert, erhält man folgende Beziehung zwischen den zeiträumlichen Hauptvektoren im a, b, c — System (die vektorielle Betriebshauptgleichung):

$$\underline{\dot{u}} = -D\underline{\dot{\psi}} - R\underline{\dot{\imath}} = \underline{\dot{e}} - R\underline{\dot{\imath}} \tag{15}$$

worin

$\underline{\dot{u}}$, $\underline{\dot{\psi}}$, $\underline{\dot{\imath}}$, $\underline{\dot{e}}$ — die zeiträumlichen Hauptvektoren der Momentanwerte des Dreiphasenständerspannungssystems an den Klemmen, die resultierenden Flüsse, Ströme, induzierte EMK sind. Sie lassen sich im a, b, c — Koordinatensystem wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}} &= u(t)\,e^{j\sigma} \;;\; \underline{\dot{\imath}} = i(t)\,e^{j\varepsilon} \\ \underline{\dot{\psi}} &= \psi(t)\,e^{j\beta} \;;\; \underline{\dot{e}} = e(t)\,e^{j\lambda} \end{aligned} \tag{16}$$

Wie sich aus den Ausdrücken (16) ergibt, ist der Hauptvektor $\underline{\dot{\psi}}$ im allgemeinsten Falle von veränderlicher Amplitude [$\psi(t)$] und veränderlicher Winkelumlaufsgeschwindigkeit ($D\beta$); der Hauptvektor $\dot{e}$ wird tangent zum Hodograph des Hauptvektors $\underline{\dot{\psi}}$ sein.

Die allgemeine Gleichung (15) muss aber im Grenzfalle die Sollbetriebsbedingungen erfüllen. Für diesen Betrieb ist die Gleichung (15) in Bild 6, unter Berücksichtigung der angenommenen Hypothesen, dargestellt. In diesem Falle muss der Operator D aus Gleichung (15) mit dem komplexen Operator $j\,p\,D\,\beta = j\,\omega$ (p — Polpaarzahl; ω — Kreisfrequenz der Skalargrössen) ersetzt werden; der Hauptvektor $\dot{e}$ ist für diesen Betrieb um $\pi/2$ elektrische Radiane dem Hauptvektor $\underline{\dot{\psi}}$ nacheilend phasenverschoben.

Die Vektorgleichung (15) kann leicht im rechtwinkligen, mit dem Ständer solidarischen Koordinatensystem α, β, im umlaufenden, mit dem Läufer solidarischen Koordinatensystem d, q, oder in jedem anderen Koordinatensystem umgeschrieben werden.

Wenn die Maschine einen ungleichmässigen Luftspalt aufweist (Fall der Schenkelpole), so ist das wirksamste System, das System d, q, O (Blondel, Park).

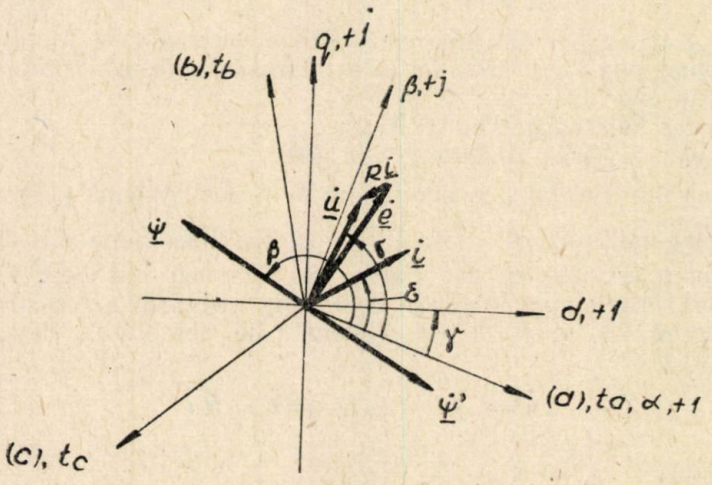


Fig. 6

Dar Vektorendiagramm der Ständerspannungen im symetrischen, sinusförmigen, übererregten Generatorbetrieb (q-Achse um $+\pi/2$ el. Radiane gegenüber der d-Achse verschoben).

Für die Umschreibung der Gleichung (15) im d, q — System, weisen wir auf die anfänglich angenommene Hypothese der Darstellung des Vektorendiagrammes der Spanungen im ersten trogonometrischen Quadranten hin.

Drückt man die Hauptvektoren $\underline{\dot{u}}, \underline{\dot{\psi}}, \underline{\dot{i}}, \underline{\dot{e}}$ gegenüber dem d, q — Koordinatensystem durch $\underline{\dot{u}}', \underline{\dot{\psi}}', \underline{\dot{i}}', \underline{\dot{e}}'$ und die Verschiebung zwischen den Achsen a, d, durch γ aus, so können folgende Beziehungen niedergeschrieben werden:

$$\underline{\dot{u}} = \underline{\dot{u}}' e^{j\gamma} \quad ; \quad \underline{\dot{i}} = \underline{\dot{i}}' e^{j\gamma}$$
$$\underline{\dot{\psi}} = \underline{\dot{\psi}}' e^{j\gamma} \quad ; \quad \underline{\dot{e}} = \underline{\dot{e}}' e^{j\gamma} \tag{17}$$

Setzt man die Gleichung (17) in Gleichung (15) ein, erhält man:

$$\underline{\dot{u}}' = -(D + jD\gamma)\,\underline{\dot{\psi}}' - R\,\underline{\dot{i}}' \tag{18}$$

Zur Ableitung der allgemeinen Gleichungen müssen die Hauptvektoren aus Gleichung (18) durch deren entsprechende Längs — und Querkomponenten ausgedrückt werden; es ist zu berücksichtigen, dass die allgemeinen Gleichungen im Grenzfalle die Sollbetriebsgleichungen darstellen müssen.

Gleicht man, unter Bezug auf Bild 6 die Ebene d, q einer komplexen Ebene $(+1, +j)$ an, so können die Beziehungen

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}}' &= u_d + j\, u_q \\ \underline{\dot{\psi}}' &= -\psi_d + j\, \psi_d \\ \underline{\dot{\imath}}' &= i_d + j\, i_q \end{aligned} \tag{19}$$

niedergeschrieben werden, welche nach Trennung der Real — und Imaginäranteile in Gleichung (18) eingesetzt

$$\begin{aligned} u_d &= D\psi_d + \psi_q D\gamma - R\, i_d \\ u_q &= -D\psi_q + \psi_d D\gamma - R\, i_q \end{aligned} \tag{20}$$

ergeben.

Um die Sollbetriebskleichungen zu erhalten, müssen die Bedingungen

$$D = 0 \; ; \quad pD\gamma = \omega$$

erfüllt werden.

Wie weiter oben ersichtlich, begrenzt die Sollbetriebsart der Maschine die Möglichkeiten einer willkürlichen Wahl der Zählpfeilrichtungen für die Längs — und Querkomponenten der Spannungen, Flüsse, Ströme, gegenüber dem angenommenen d, q — Koordinatensystem.

Es kann unschwer bewiesen werden, dass die Schreibweise des Induktionsgesetzes die Gleichungen nicht beeinflusst (20).

So wird in vielen Arbeiten für das elektromagnetische Induktiongesetz folgende Schreibart angewendet:

$$\underline{\dot{e}} = D\, \underline{\dot{\psi}}'' \tag{21}$$

worauf die Gleichung (15) zu

$$\underline{\dot{u}} = D\, \underline{\dot{\psi}}'' - R\, \underline{\dot{\imath}} \tag{22}$$

wird, folglich ist

$$\underline{\dot{\psi}}'' = -\underline{\dot{\psi}} \tag{23}$$

Der Hauptvektor $\underline{\dot{\psi}}''$ wird in bezug auf das d, q — Koordinatensystem $[\underline{\dot{\psi}}'']'$ und die Gleichung (22) umwandelt sich in

$$\underline{\dot{u}}' = [D + jD\gamma]\, [\underline{\dot{\psi}}'']' - R\, \underline{\dot{\imath}}' \tag{24}$$

worin

$$[\underline{\dot{\psi}}'']' = \psi_d - j\psi_q \,. \tag{25}$$

Wird $\underline{\dot{u}}', \underline{\dot{i}}'$ (19) und $[\dot{\psi}'']'$ (25) durch die Längs — und Querkomponenten ausgedrückt, so kommt man wieder auf die Gleichungen (20).

Hieraus folgt, dass die verschiedenen Schreibarten des Induktionsgesetzes die allgemeinen Betriebsgleichungen der Maschine nicht beeinflussen können, wenn die angenommenen Hypothesen konsequent beachtet werden.

b) *Die synchrone Maschine im Motorbetrieb.*

Der Parameter, der den Generator—, Motor—, Kompensatorbetrieb der Synchronmaschine abgrentz, ist der θ — Winkel zwischen der q-Achse (nach welchem der Zeiger der elektromotorischen Leerlaufspannung ausgerichtet ist) und der zeiträumliche Hauptvektor $\underline{\dot{i}}$.

Nimmt man als Sollbetrieb des Synchronmotors den übererregten stationären Betrieb an und dass die gleiche Maschine im Falle (a), bei gleicher Erregung in Motorbetrieb übergeht, so befindet sich der Hauptvektor $\underline{\dot{i}}'$ in der d, q — Ebene im IV-ten trigonometrischen Quadranten.

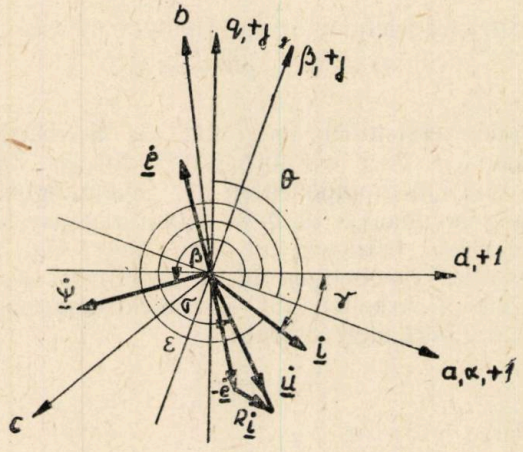


Fig. 7
Das Vektorendiagramm der Ständerspannungen im symmetrischen, sinusförmigen, übererregten Motorbetrieb (q-Achse um $+\pi/2$ el. Radiane gegeüber der d-Achse verschoben).

Die Betriebsgleichungen können, wie im Falle des Generators, aber durch entsprechende Anwendung des Verbraucher-Zählpfeilrichtungssystems, folgendermassen bestimmt werden:

— man schreibt für die Empfangsständerkreise im a, b, c — System die Gleichungen

$$u_n = -e_n + R\,i_n = D\,\psi_n + R\,i_n \qquad (26)$$

— man bestimmt die Beziehung zwischen den zeiträumlichen Hauptvektoren im *a, b, c* — System:

$$\underline{\dot{u}} = -\underline{\dot{e}} + R\,\underline{\dot{i}} = D\,\underline{\dot{\psi}} + R\,\underline{\dot{i}} \tag{27}$$

— man geht auf das *d, q* — System über

$$\underline{\dot{u}}' = (D + j\,D\gamma)\,\underline{\dot{\psi}}' + R\,\underline{\dot{i}}_a' \tag{28}$$

— man drückt die Vektoren $\underline{\dot{u}}'$, $\underline{\dot{i}}'$, $\underline{\dot{\psi}}'$, unter Berücksichtigung des Sollbetriebes (Bild 7) durch die Längs — und Querkomponenten aus

$$\underline{\dot{u}}' = u_d - j\,u_q \;;\; \underline{\dot{i}}' = i_d - j\,i_q$$
$$\underline{\dot{\psi}} = -\psi_d - j\,\psi_q \tag{29}$$

— man setzt die Ausdrücke (29) in (28) ein und trennt die realen und imaginären Teile

$$u_d = -D\,\psi_d + \psi_q\,D\gamma + R\,i_d$$
$$u_q = D\,\psi_q + \psi_d\,D\gamma + R\,i_q\,. \tag{30}$$

Der Einfluss der Ausrichtung der Querachse (q) gegenüber der Längsachse (d) auf die Schreibweise der Maschinengleichungen

Im Fachschrifttum wird die Wahl der positiven Richtungen der *d, q*-Achsen als einer der Faktoren, die die Schreibweise der Gleichungen der Synchronmaschinen beeinflussen, betrachtet.

Im Bild (6, 7) wird der Fall angenommen in welchem die *q*-Achse um $+\pi/2$ el. Rad. gegenüber der *d*-Achse verschoben ist.

In Bild (8) ist das Vektorendiagramm der Spannungen des Synchrongenerators entsprechend dem gewählten Sollbetrieb; die *q*-Achse ist um $-\pi/2$ el. Rad. gegenüber der *d*-Achse verschoben.

Es muss die Tatsache hervorgehoben werden, dass in Anbetracht der physikalischen Bedeutung der *q-d*-Achsen in der Synchronmaschine, bei der Analyse dieser Probleme die Wahl der positiven Richtung der *q-d*-Achsen, nicht mit dem gegenseitigen Vertausch dieser Achsen verwechselt werden darf [3].

Werden demnach auch in diesem Falle in die vektorielle Gleichung (18) die Ausdrücke entsprechend dem Diagramm (8) oder die dem Motorbetrieb entsprechenden Ausdrücke eingesetzt,

$$\underline{\dot{u}} = u_q - j\,u_d$$
$$\underline{\dot{i}} = i_q - j\,i_d \tag{31}$$
$$\underline{\dot{\psi}} = \psi_q + j\,\psi_d$$

erhält man letzten Endes die Gleichungen (20) bzw. (30), woraus ersichtlich ist, dass auch dieser Faktor, d, h, Wahl der Sollrichtung der q-Achse gegenüber der d-Achse, die Schreibart der Gleichungen im

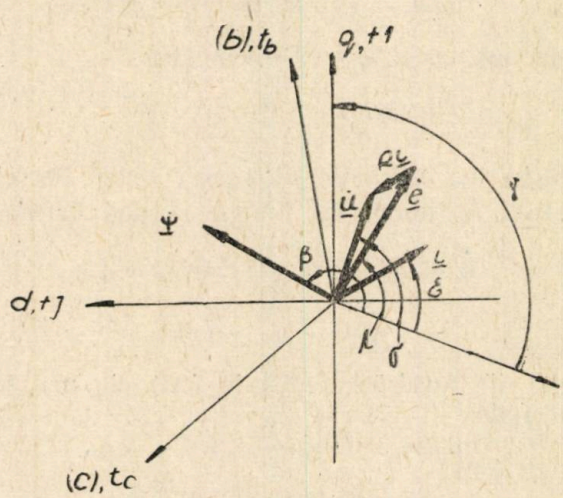


Fig. 8
Das Vektorendiagramm der Ständerspannungen im symetrischen, sinusförmigen, übererregten Generatorbetrieb (d-Achse um $-\pi/2$ el. Radiane gegenüber der d-Achse verschoben).

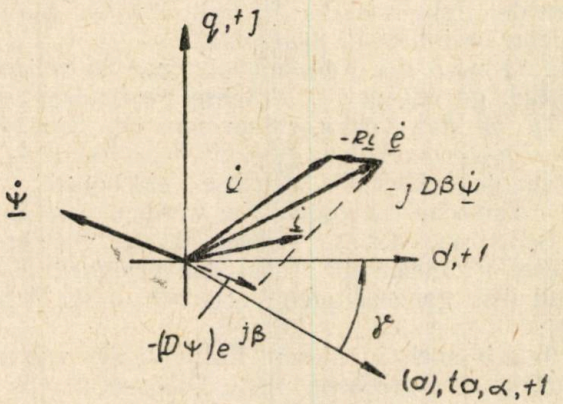


Fig. 9
Das allgemeine Vektorendiagramm der Ständerspannungen.

d, q, 0 — System in ψ — Koordinaten, nicht beeinflusst. In Bild (9) ist die vektorielle Gleichung dargestellt die der allgemeinen Maschinengleichung entspricht. Im Zusammenhang mit diesem Diagramm muss

hervorgehoben werden, dass die statische Komponente der e. m.-Spannung im Raume sich mit dem Hauptvektor des sich ergebenden verketteten Flusses deckt.

Zusammenfassung.

1. In vorliegender Arbeit wird der Begriff des zeiträumlichen Hauptvektors der Dreiphasen-Skalarsysteme mit simmetrischer und sinusförmiger Raumverteilung eingeführt. Es wird ausgeführt, dass durch Beziehen der Vektoren auf das Zeitachsensystem t_a, t_b, t_c, sowie auf das geometrische Koordinatensystem a, b, c die eindeutige Kennzeichnung des Verlaufs der Vorgänge in Zeit und Raum ermöglicht wird.

2. Die zeiträumlichen Vektoren ermöglichen die Abstimmung der zeitlichen Phasenverschiebungen zwischen den Momentangrössen, mit den räumlichen Verschiebungen zwischen den Drehgrössen; in den Vektorendiagrammen überlagern sich die beiden Winkelarten und rechtfertigen somit die Anwendung verschiedener symbolischer Grössen in der Theorie elektrischer Maschinen: komplexe oder umlaufende Zeiger, räumliche oder zeiträumliche Hauptvektoren.

3. Die allgemeinen Betriebsleichungen von Synchronmaschinen (Generator, Motor) im Koordinatensystem d, q, können mit Hilfe der vektoriellen Betriebshauptgleichung (Beziehung zwischeden den zeiträumlichen Hauptvektoren — Gl. 15) der Maschine abgeleitet werden.

Der Vorteil dieser Methode gegenüber den im Fachschrifttum enthaltenen, besteht in der Möglichkeit der eindeutigen Bestimmung der Zeichen für Längs — und Quergrössen, in Beziehung zu dem gewählten Sollbetrieb, der Ausrichtung der Achsen im Koordinatensystem d, q und dem angenommenen Zählpfeilrichtungsystem, gegenüber dem a, b, c — Koordinatensystem.

4. Durch Anwendung dieser Methode können die Betriebsgleichungen der Maschine in jedwedem anderen Koordinatensystem unschwer abgeleitet werden.

5. Aus der Voraussetzung dass im Grenzfalle die vektorielle Gleichung der Maschine der Gleichung des stationären symmetrischen Sollbetriebs entspricht, ergibt sich:

a) die Schreibart des Gesetzes der elektromagnetischen Induktion;

b) dass die Wahl der positiven Richtung der q, d,-Achsen die Schreibart der Gleichungen im d, q-System in ψ Veränderlichen nicht beeinflusst.

6. Demzufolge ist die Gesamtzahl aller Abarten dieser Gleichungen die die Bedingung 5 erfüllen, acht: vier für den Generator-Betrieb, vier für den Motorbetrieb, entsprechend den stationären symmetrischen unter- und übererregten Betrieben.

Lehrstuhl für elektrische Maschinen
des Polytechnischen Institutes Bukarest.

ANHANG I

Werden als Sollbetriebe die stationären symmetrischen übererregten Betriege angenommen, arhält man die Gleichungen:

a) Synchrongenerator (Bild 10):

$$\left.\begin{aligned} u_d &= D\psi_d + \psi_q D\gamma + R i_d \\ u_q &= -D\psi_q + \psi_d D\gamma - R i_q ; \end{aligned}\right\}$$

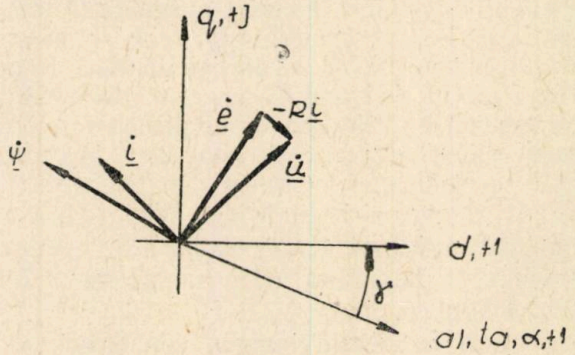


Fig. 10
Das Vektorendiagramm der Ständerspannungen im symmetrischen, sinusförmigen, untererregten Generatorbetrieb.

b) Synchronmotor (Bild 11):

$$\left.\begin{aligned} u_d &= -D\psi_d + \psi_q D\gamma - R i_d \\ u_q &= D\psi_q + \psi_d D\gamma + R i_q . \end{aligned}\right\}$$

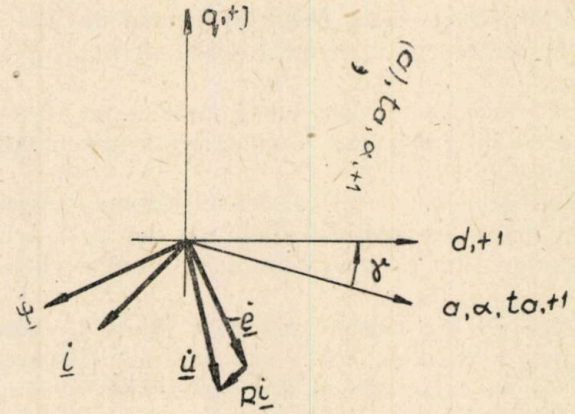


Fig. 11
Das Vektorendiagramm der Ständerspannungen im symmetrischen, sinusförmigen, untererregten Motorbetrieb.

Anhang II

Im Folgenden werden im Lichte der Schlussfolgerungen der vorliegenden Arbeit, die in den Arbeiten [9, 10, 12] angewandten Synchronmaschinengleichungen in den d, q — Koordinaten analysiert.

In Arbeit [9].

Die Gleichungen (1) für Dauerbetrieb (stationärer Betrieb) führen zu folgender Beziehung zwischen den Vektorengrössen

$$\underline{\dot{u}} = j\underline{\dot{\psi}} - r\underline{\dot{i}} \tag{1'}$$

Es wird $\underline{\dot{e}} = j\underline{\dot{\psi}}$ geschrieben. Aus dem Vektorendiagramm der Abbildungen 6 und 7 und der Läuferdrehrichtung folgt, dass der Vektor $\underline{\dot{\psi}}'$ im IV-ten Quandranten dargestellt verden muss, also

$$\underline{\dot{\psi}} = \psi_d - j\psi_q . \tag{2'}$$

Andererseits ergibt sich aus den Gleichungen (54), nach Multiplizierung von u_q mit dem Operator j und nach Summierung

$$\underline{\dot{u}}' = j(\psi_d + j\psi_q) - r\underline{\dot{i}}'$$

woraus ersichtlich ist, dass das Zeichen ψ_q nicht gerechtfertigt ist. Folglich bestätigen auch die allgemeinen Gleichungen (32) die Sollbetriebsgleichungen in den Koordinaten d, q nicht.

In Arbeit [10].

Der Verfasser gibt das angenommene Zählpfeilrichtungssystem, die Schreibart des Induktionsgesetzes, zwar nicht an, jedoch können diese aus den Vektorendiagrammen der Abb. 3, 4 und den Gleichungen (2—3, 4) (stationärer Sollbetrieb) entnommen werden.

Multipliziert man die zweite Gleichung des Systems (2—4) mit j und summiert man die zwei Gleichungen, so erhält man:

$$\underline{\dot{u}} = \underline{\dot{e}}' - R\underline{\dot{i}}' = -j\omega\underline{\dot{\psi}}' - R\underline{\dot{i}} \tag{1'}$$

worin

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}}' &= u_d + j\,u_q \quad ; \quad \underline{\dot{\psi}}' = \psi_d + j\psi_q \\ \underline{\dot{i}}' &= i_d + j\,i_q \quad ; \quad \underline{\dot{e}}' = -j\omega\underline{\dot{\psi}}' \end{aligned} \tag{2'}$$

Wie sich aus Gleichung (2') ergibt, müssen alle Vektoren aus Gleichung (1') im ersten trigonometrischen Quadranten der komplexen d, q-Ebene dargestellt werden.

Dies ist jedoch nicht möglich, da sich die Vektoren $\underline{\dot{e}'}$, $\underline{\dot{\psi}'}$ im Quadratur befinden. Wird $\underline{\dot{\psi}'}$ im ersten Quadranten dargestellt, so erbigt sich der Vektor $\underline{\dot{e}'}$ im vierten Quadranten und folglich muss das Vektorendiagramm der Spannungen — in der Annahme dass auch i' sich im ersten Quadranten befindet —, im vierten Quadranten dargestellt werden.

Der Verfasser hat diesses Diagramm völlig willkürlich im ersten Quadranten dargestellt (Bild 4).

Hieraus folgt, dass auch die allgemeinen Gliechungen (4—20) kein zusammenhängendes System bilden, somit im Grenzfalle nicht den Sollbetrieb darstellen auf welchen sich der Verfasser bezieht.

In Arbeit [12].

Für den stationären Sollbertrieb kann die Beziehung zwischen den Hauptvektoren, von den Gleichungen (37a, 37b) ausgehend, abgeleitet werden.

Wird der Index j der Gleichung (37b) zugefügt und beide Gleichungen summiert, erhält man

$$\underline{\dot{e}'} = j\omega_s \underline{\dot{\psi}'} - r\underline{\dot{i}'} \tag{1'}$$

worin

$$\begin{aligned} \underline{\dot{e}'} &= -e_d - j\,e_q \\ \underline{\dot{\psi}'} &= \psi_d + j\,\psi_q \\ \underline{\dot{i}'} &= -i_d - j\,i_q \end{aligned} \tag{2}$$

Auf dem, in Bild 31 dargestellten Vektorendiagramm muss der Vektor $\underline{\dot{\psi}'}$, unter Berücksichtigung der Läuferdrehirchtung, im zweiten Quadranten (gegenüber der angenommenen komplexen Ebene d, q $(+1, +j)$, dargestellt werden, folglich:

$$\underline{\dot{\psi}'} = -\psi_d + j\,\psi_q\,. \tag{3'}$$

Vergleicht man die Ausdrucksarten für $\underline{\dot{\psi}'}$ in den Gleichungen (2') und (3'), ist auch in diesem Falle das Zeichen ψ_d unbegründet. Auch hier bestätigen die Gleichungen (34a, 34b) die Einheitsgleichunge der vektoriellen Grössen nicht.

Lehrstuhl für electrotechnik
Technischen Hochschule Bukarest

LITERATUR

1. *R. H. Park*: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines. Part I, TAIEE, 48 (1929), 716—727.

2. *Л. П. Веретенников, Д. В. Вилесов:* К вопросу о различном написании дифференциальных уравнений Горева-Парка (в переменных ψ) Электричество, 1959, 11, 7—12.

3. *Л. П. Веретенников:* Классификация дифференциальных уравнений Горева-Парка. Электричество, 1959, 11, 13—19.

4. *М. И. Алябьев:* К вопросу о классификации и выборе методов исследования электрических машин. Электричество, 1959, 11, 1—7.

5. *C. Concordia, S. B. Craray, G. Kron:* The Doubly Fed Machine. TAIEE, 61 (1942), 286—289.

6. *А. А. Янко-Триницкий:* К статье Е. Я. Казовского... Электричество, 1948, 10, 57—58.

7. *Е. Я. Казовский:* К замечаниям А. А. Янко-Триницкого... Электричество, 1948, 10, 58—61.

8. *А. А. Янко-Триницкий:* Уравнения переходных электромагнитных процессов и их решения. Электричество, 1951, 3, 18—26.

9. *Ч. Конкордиа:* Синхронные машины. ГЭИ, 1959.

10. *Т. Лайбль*: Теория синхронной машины при переходных процессах. ГЭИ. 1957.

11. *K. P. Kovacs:* Symmetrische Komponenten der Momentanwerte, oder Vektoren der elektrischen Größen? Arhiv für Elektrotechnik, 45(1960), 2, 99—117.

12. *А. И. Важнов:* Основы теории переходных процессов синхронной машины, ГЭИ. 1960.

НОВЫЙ МЕТОД ВЫВОДА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ СИНХРОННЫХ МАШИН

(Резюме)

В работе, после того как определяется понятие „обощающий пространственно-временой вектор“ трехфазных скалярных величин, с симметричным и синусоидальным распределением в пространсвте, устанавливается единое векторное уравнение напряжений статора. При условии что это уравнение должно удовлетворить уравнению исходного режима (симметричного, стационарного) работы указывается, что число вариантов этих уравнений (уравнения Park'a) сводится к восьми: четыре для генератора и четыре для двигателя, соответствующих перевозбужденному и недовозбужденному режимам работы машины.

A NEW METHODE FOR ESTABLISHING THE SYNCHRONOUS MACHINE EQUATIONS

(Summary)

After having introduced the notion of the „space-time representative vector" of the systems of triphase scalar quantities associated with the circuits symmetrically and sinusoidally distribuited in space, in established the vectoial unique equation of the stator voltages. Under the condition that this equation should satisfy at the limit the equations of the reference (steady state, symmetrical) regime, it is shown that the total number of these aquations, in *d, q, o* system of coordinates and in ψ variables (Park equations), is of 8, out of which: 4 for the generator regime and 4 for the motor regime, corresponding to under and over excitations.

UNE NOUVELLE METHODE POUR LA DEDUCTION DES EQUATIONS GENERALES DE FONCTIONNEMENTS DE LA MACHINE SYNCHRONE

(Résumé)

Après avoir introduit la notion de vecteur „éspacetemps" representatif des systèmes de grandeurs scalaires triphasées associées aux circuits vectorielle unique des tensions électromotrices dans le statur. En posant la condition qu'à la limite l'équation établie plus haut doit satisfaire à symétriques et sinusoidaux repartis dans l'éspace on établit l'équation l'equation du régime de référence (symetrique stationnaire) l'on montre que le nombre total des équations différentielles générales, dans le système de coordonnés *d, q, o,* et en variables ψ (équations de Park) se réduit à 8, dont 4 pour le régime de générateur et 4 pour le régime de moteur correspondant respectivement aux régimes surexcités et sousexcités.

EINE NEUE METHODE ZUR ABLEITUNG ALLGEMEINER BETRIEBSGLEICHUNGEN VON SYNCHRONMASCHINEN.

(Zusammenfassung)

In der Arbeit wird, nach Einführung des Begrieffes des zeiträumlichen Hauptvektors der, mit den symmtrischen und sinusförmigen im Raum verteilten Stromkreise assozierten, skalaren Dreiphasendrehgrössen, die vektorielle Einheitsgleichung des Betriebes der Maschine (Gleichung der Spannungen) aufgestellt. Unter der Bedingung, dass diese Gleichung die Gleichung des (symmetrisch stationären) Sollbetriebes bestätigt, wird ausgeführt, dass die Gesamtzhal der Abarten der allgemeinen Differenziallgliechungen im *d, q,* O-Koordinaten — und ψ — Veränderlichen-ziallgliechungen im d, q, O-Koordinaten — und ψ — Veränderlichen-System (Park'sche Gleichungen), sich auf acht verringert und zwar: vier für den Generatorbetrieb und vier für den Motorbetrieb, entsprechend dem über-, bezw. untererregte Betrieb.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 3

UNE MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DES RÉACTANCES SYNCHRONES DES MACHINES AUX POLES SAILLANTS

EUGEN POTOLEA

Les méthodes expérimentales connues pour déterminer d'une part la réactance synchrone longitudinale et d'autre part la réactance synchrone transversale présentent la particularité qu'elles sont basées sur des principes différents et par conséquence utilisent des montages et appareillages de mesure qui posent des difficultés différentes. Aussi, si pour déterminer la réactance longitudinale (B_1, B_2) l'utilisation de certains appareils de mesure simples comme les ampèremètres et voltmètres est suffisante, par contre pour déterminer la réactance transversale il est nécessaire de réaliser des montages spéciales (B_3, B_4, B_5) ou d'utiliser soit un oscilographe, soit un dispositif pour mesurer le décalage entre la force électromotrice et la tension aux bornes.

Dan ce qui suit on exposera une méthode pour la détermination simultanée des réactaces longitudinale et transversale à l'aide d'un montage simple qui ne nécessite comme apareils de mesure que des voltmètres et des ampèremètres.

1. Exposé de la méthode

La méthode proposée emploie les résultats expérimentales obtenus au relèvement des caracteristiques externes dans les conditions particulières les suivantes :

— Le générateur débite sur une charge symétrique formé de simples résistances, ainsi que le facteur de puissance est cos $\varphi=1$.

— L'exercitation du générateur peut être réduite de sorte que les courants de charge puissent etre plus petits que le courant nominal.

La caractéristique externe ainsi obtenue (fig. 1) permet la détermination simultanée des réactances longitudinale et transversale comme suit :

a) Par le point M_0 de l'ordonnée $\sqrt{2}V_0$ on trace quelques droites D_1 qui intersectent la caractéristique externe dans des couples à deux points (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) etc.

Par l'origine des axes de coordonnées on trasse la droite D_2 ayant le coefficient angulaire — R (la résistance du bobinage statorique).

b) On détermine les valeurs relatives des segments $P_1P'_1$, $Q_1Q'_1$... comprises entre la caractéristique externe et la droite D_2.

$$X_1 = \frac{P_1P'_1}{OM_0}\ ; \qquad X_2 = \frac{P_2P'_2}{OM_0} \ldots$$
$$Y_1 = \frac{Q_1Q'_1}{OM_0}\ ; \qquad Y_2 = \frac{Q_2Q'_2}{OM_0} \ldots \tag{1}$$

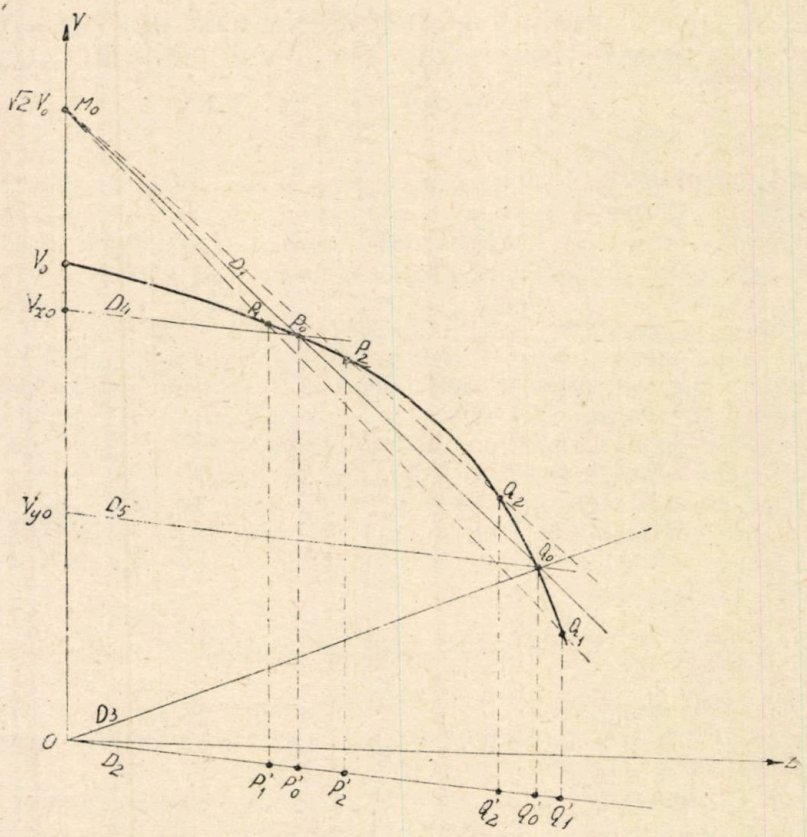


Fig. 1. Construction grafique pour la determination des reactonces synchrones de la maschine a poples saillants.

c) Dans un système d'axes XY (fig. 5) on trasse une courbe 1 déterminée par les coordonnées (1) ainsi que la fonction $y = f(x)$:

$$y = x\,\frac{2x^2 - 1}{6x^2 - 6x + 1}\,. \tag{2}$$

L'intersection de la courbe 1 avec la courbe $f(x)$ détermine le point C_0 $(x_0,\ y_0)$ auquel correspond, sur la caractéristique externe, le couple

des points P_0Q_0 de coordonnées (V_{p_0}, I_{p_0}) et (V_{q_0}, I_{q_0}). Ces points se détermine sur la fig. 1 en construisant les droites D_4 et D_5 parallèles à D_2 et ayant comme ordonnées à l'origine

$$\begin{aligned} V_{x0} &= \sqrt{2}\, V_0 x_0 \\ V_{y0} &= \sqrt{2}\, V_0 y_0 \end{aligned} \tag{3}$$

d) Les réactances synchrones X_d et X_q sont données par les relations :

$$\begin{aligned} X_d + R &= \frac{\sqrt{2}\, V_0 - V_{p0}}{I_{p0}} \\ X_q - R &= \frac{V_{q0}}{I_{q0}} \end{aligned} \tag{4}$$

e) Pour vérifier les déterminations faites om vérifie la relation :

$$\frac{X_q}{X_d} = \frac{y_0}{1 - y_0}. \tag{5}$$

OBSERVATION. Si la réactance longitudinale X_d de la machine est connue, la méthode présentée permet de déterminer la réactance transversale comme suit :

— On construit la droite D_1 qui passe par le point M_0 et qui possède le coefficient angulaire égal à $-(X_d + R)$. Cette droite intersectera la caractéristique externe en deux points P_0 et Q_0.

— On détermine la réactance transversale par la relation :

$$X_q = \frac{V_{c0}}{I_{q0}} + R$$

où I_{q0}, V_{q0} sont coordonnées au point Q_0.

2. La justification théorétique de la méthode

La méthode exposée est basée sur l'observation que les équations de de fonctionnement de la machine à pôles apparents, pour $\cos\varphi = 1$ (fig. 2)

$$\begin{aligned} V\cos\delta + R\,I\cos\delta + X_d\,I\sin\delta &= V_0 \\ V\sin\delta + R\,I\sin\delta - X_d\,I\cos\delta &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

obtient une forme simplifiée dans le cas particulier quant l'angle $\delta = 45°$.

$$\left.\begin{aligned} V + R\,I + X_d\,I &= \sqrt{2}\, V_0 \\ V + R\,I - X_q\,I &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

La méthode consiste à déterminer sur la caractéristique externe les points de fonctionnement où $\delta = 45°$ et après, en utilisant les rélations (7) de déterminer les réactances synchrones X_d et X_q.

On constate qu'il en a deux points de fonctionnement où $\delta=45°$. Ces points peuvent être déterminés graphiquement (fig. 1) en intersectant la caractéristique externe

$$V = f(I) \tag{8}$$

avec la droite :

$$D_1 = \sqrt{2}\, V_0 - (X_d + R)\, I\,. \tag{9}$$

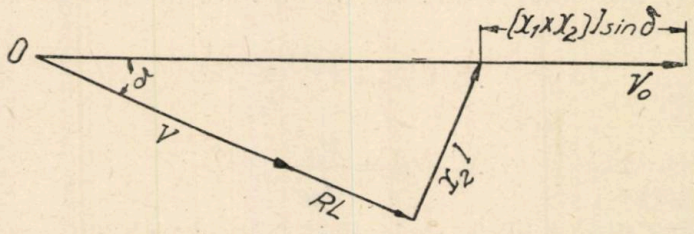


Fig. 2. La diagrame de fouchionement de la machine synchrone à polles saillonts pour $\cos\alpha = 1$.

Ces deux points d'interrsection P_0 et Q_0 peuvent être déterminés par voie analytique. Dans ce bût on emploie les relations (6) et la première relation de (7). Si on prend comme inconnue

$$Z = \frac{V}{I} + R \tag{10}$$

les relations mentionnées mènent à une equation de 4-e degre qui admet seulement deux racines réelles (voir annexe) correspondantes aux points P_0 et Q_0 :

$$\begin{aligned} \frac{V_{p0}}{I_{p0}} + R &= \alpha_0 X_d \\ \frac{V_{q0}}{I_{q0}} + R &= X_q\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Le coefficient α_0 est la solution réelle, unique, de la équation de 3-e degré (voir annexe)

$$\frac{X_q}{X_d} = \alpha\, \frac{1 + 2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha - 1}\,. \tag{12}$$

Des relations (7) et (11) on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_{p0} + R I_{p0}}{\sqrt{2}\, V_0 - (V_{p0} + R I_{p0})} &= \alpha_0 \\ \frac{V_{q0} + R I_{q0}}{\sqrt{2}\, V_0 - (V_{q0} + R I_{q0})} &= \frac{X_q}{X_d} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_{p0}+RI_{p0}}{\sqrt{2}\,V_0} &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0+1} = \lambda_0 = \frac{P_0P'_0}{OM_0} \\ \frac{V_{q0}+RI_{q0}}{\sqrt{2}\,V_0} &= \frac{\frac{X_q}{X_d}}{\frac{X_q}{X_d}+1} = y_0 = \frac{Q_0Q'_0}{OM_0}. \end{aligned}\right| \qquad (14)$$

En introduisant en (12) le changement de variable donnée par (14) on obtient la relation (2).

Evidemment que les relations (14) sont satisfaites seulement pour le couple de points P_0, Q_0. Pour les autres couples de points (P_1, Q_1), (P_2, Q_2) etc. les coordonnées relatives (1) déterminent dans le plan XY une courbe 1. L'intersection de la courbe 1 avec la courbe $f(x)$ de l'équation (2) détermine les coordonnées x_0y_0 qui satisfait les relations (14).

3. Les Résultats expérimentals

Pour illuster et vérifier la méthode exposée on a fait des déterminations sur une machine synchrone aux pôles saillants au Laboratoire de Machines Electriques de l'Institut Polytechnique de Bucarest.

Les caractéristiques de la machine sont :

$$P_n = 2{,}5 \text{ kW} ; \cos\varphi_n = 0{,}7 ; V_n = 120 \text{ V}.$$

Les paramètres R, X_d, X_q déterminés par les méthodes clasiques, ont les valeurs :

$$R = 0{,}87\ \Omega \ ; \quad X_d = 9{,}6\ \Omega \ ; \quad X_q = 6{,}3\ \Omega .$$

Le relèvement de la caractéristique externe a étét fait en utilisant un montage où le moteur antréneur du générateur a été un moteur asynchrone sychronisé et la charge du générateur a étét un rhéostat triphasé. Les résultats des mesures effectuées par des appareils de la classe 0,2 sont donnés dans les tablaux qui suivent et les caractéristiques externes correspondantes sont représentées par les diagrammes des fig. 3 et 4 où on a utilisé les échelles :

— pour tension : 1 cm = 2 V
— pour courants : 1 cm = 0,2 A

Caractéristique 1 (fig. 3)

V (V)	39,4	35,3	29,00	19,4	5,66
I (A)	0	1,46	2,60	3,46	4,00

Caractéristique 2 (fig. 3)

V (V)	50,9	48,5	44,9	39,9	34,6	22,6	12,5
L (l)	0	0,95	2,15	3,00	3,70	4,55	4,95

Caractéristique 3 (fig. 4)

$V(V)$	60	57,5	54,5	50,5	44	34	15
$I(A)$	0	1	2	3	4	5	6

Caractéristique 4 (fig. 4)

$V(V)$	74	72	69,5	55,8	60,2	49
$I(A)$	0	0,90	1,90	2,98	4,20	5,45

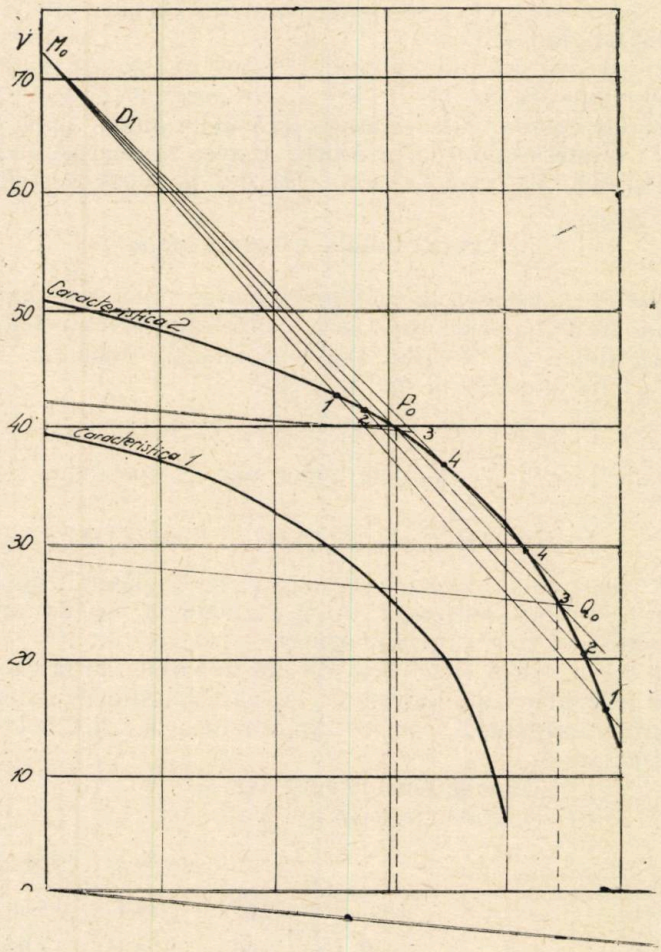


Fig. 3. Les caracteristiques externes 1 et 2.

On constate que les caractéristiques les plus indiquées pour être utilisées à la détermination des réactances sont les caractéristiques 2 et 3. En effet, la caractéristique 4 ne contient pas le point Q_0 et par conséquence il faudrait l'utiliser pour les courants plus grands que 6 amp. La caracté-

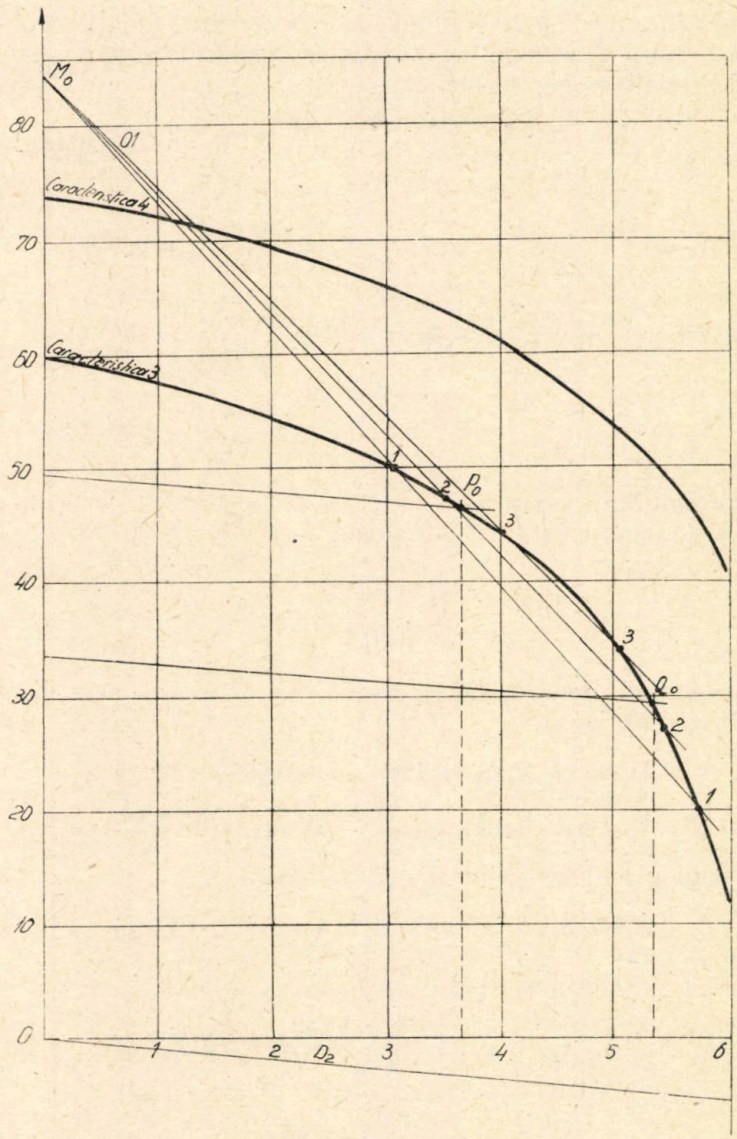


Fig. 4. Les caracteristiques externes 3 et 4.

ristique 1 pourrait être utilisée, mais étant donné les petites valeurs des courants et des tensions, la détermination des réactances se ferrait avec des erreurs trop grandes.

a) En utilisant le caractéristique 2 on a construit quatre droites de la famille D_1 et on a déterminé les couples des points 1, 2, 3, 4 ainsi que les coordonnées relatives correspondantes :

$$X_1 = \frac{43 + 2{,}2}{71{,}9} = 0{,}63 \qquad Y_1 = \frac{16 + 4{,}2}{7{,}19} = 0{,}282$$

$$X_2 = \frac{41{,}5 + 2{,}4}{71{,}9} = 0{,}612 \qquad Y_2 = \frac{21 + 4}{71{,}9} = 0{,}348$$

$$X = {}_3\frac{39 + 2{,}7}{71{,}9} = 0{,}58 \qquad Y_3 = \frac{25{,}9 + 3{,}8}{71{,}9} = 0{,}413$$

$$X_4 = \frac{37 + 2{,}9}{71{,}9} = 0{,}556 \qquad Y_4 = \frac{29 + 3{,}6}{71{,}9} = 0{,}454 .$$

En utilisent les coordonnées on a trassé la courbe 1 de la fig. 5 et on a déterminé le point C_0 de coordonnées :

$$x_0 = 0{,}588$$

$$y_0 = 0{,}4$$

On a construit dans la fig. 3 les droites paralelles avec D_2 et ayant les ordonnées à l'origine

$$V_{xo} = 2 \cdot V_0 X_0 = 1{,}41 \cdot 50{,}9 \cdot 0{,}588 = 42{,}2 \ V$$

$$V_{y0} = 2 \cdot V_0 \cdot Y_0 = 1{,}41 \cdot 50{,}9 \cdot 0{,}4 = 28{,}7 \ V .$$

Les coordonnées des points P_0 et Q_0 sont :

$$P_0(39{,}8 \ V \ ; \ 3{,}02 \ A) \ ; \quad Q_c(24{,}8 \ V \ ; \ 4{,}43 \ A)$$

ainsi que des relations (4) il en résulte :

$$X_d + R = \frac{71{,}9 - 39{,}8}{3{,}02} = 10{,}63 \ \Omega$$

$$X_q - R = \frac{24{,}8}{4{,}43} = 5{,}59 \ \Omega$$

ou :

$$X_d = 10{,}63 - 0{,}87 = 9{,}76 \ \Omega$$

$$X_q = 5{,}59 + 0{,}87 = 6{,}46 \ \Omega$$

La vérification du rapport :

$$\frac{X_q}{X_d} = \frac{6,46}{9,76} = 0,663$$

$$\frac{X_q}{X_d} = \frac{Y_0}{1 - 40} = \frac{0,4}{0,6} = 0,666 .$$

On constate que les erreurs sur les déterminations de X_d et X_q sont respectivement 1,6% et 2,5%.

b) En utilisant la caractéristique 3 on a construit 3 droites de la famille D_1 et on a déterminé des points 1, 2, 3 ainsi que les coordonnées relatives correspondantes :

$$X_1 = \frac{50,2 + 2,7}{84,6} = 0,625 \qquad Y_1 = \frac{19,7 + 5}{84,6} = 0,292$$

$$X_2 = \frac{47,5 + 3}{84,6} = 0,597 \qquad Y_2 = \frac{27,5 + 4,6}{84,6} = 0,379$$

$$X_3 = \frac{44,2 + 3,5}{84,6} = 0,563 \qquad Y_3 = \frac{33,6 + 4,4}{84,6} = 0,449 .$$

En utilisant ces coordonnées on a trassé la corube 2 de la fig. 5 et on o déterminé le point de coordonnées :

$$x_0 = 0,588$$

$$y_0 = 0,4$$

On a construit dans la fig. 4 les droites paralleles avec D_2 et ayant les ordonnées à l'origine :

$$V_{x0} = \sqrt{2}\, V_0 X_0 = 1,41 \cdot 60 \cdot 0,588 = 49,7 \ V$$

$$V_{y0} = \sqrt{2}\, V_0 Y_0 = 1,41 \cdot 60 \cdot 0,4 = 33,8 \ V .$$

Le coordonnées des points P_0 et Q_0 sont :

$$P_0(46,5 \ V \ ; \ 3,66 \ A) \ ; \ Q_0(29 \ V \ ; \ 5,33 \ A)$$

ainsi que des relations (4) il en résulte :

$$X_d + R = \frac{84,6 - 46,5}{3,66} = 10,41 \ \Omega$$

$$X_q - R = \frac{29}{5,33} = 544 \ \Omega$$

ou

$$X_d = 10,41 - 0,87 = 9,54 \ \Omega$$

$$X_q = 5,44 + 0,87 = 6,31 \ \Omega .$$

La verification du rapport :

$$\frac{X_q}{X_d} = \frac{6{,}31}{9{,}54} = 0{,}663$$

$$\frac{X_q}{X_d} = \frac{Y_0}{1 - y_0} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = 0{,}666 .$$

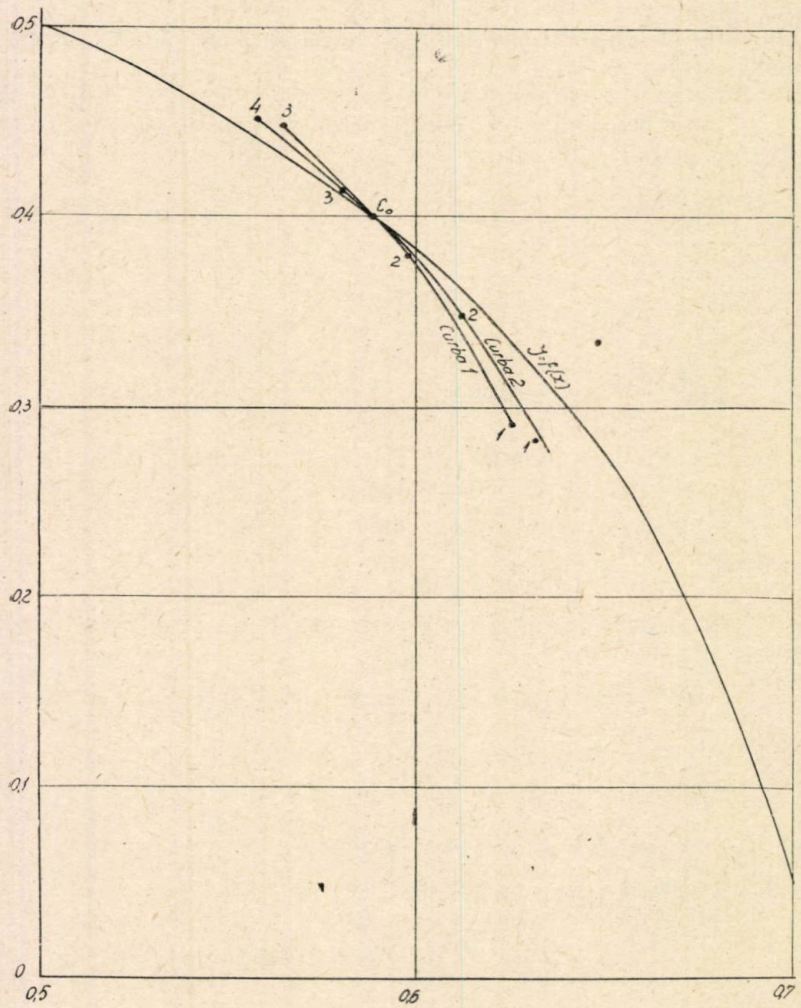


Fig. 5. Le grafique de la fonction (2) $y = f(x)$.

On constate que les erreurs sur les déterminations de X_d et X_q sont respectivement 0,62% et 0,16%.

En comparant les résultats obtenus à l'aide des deux caractéristiques externes il en résulte que la dernière permet de déterminer les réactances

avec une meilleure précision. Cela est dû, d'une part au fait que les tensions et courants utilisés sont plus grands et d'autre part la détermination du point C_0 de la fig. 5 se fait avec une meilleure précision étant donné que les deux courbes font intersection sous un angle plus grand que dans le cas de la courbe 1. En conclusion il est recommandable d'utiliser toujours la caractéristique externe correspondante à la tension de marche en vide égale aproximativement à 50% de la tension normale.

4. Conclusions

La méthode proposée pour la détermination simultanée des réactances X_d et X_q présente les avantages suivants par rapport aux méthodes utilisées d'habitude (B_1, B_2, B_3, B_4, B_5).

— Le montage utilisé est simple et nécessite comme appareils de mesures seulement des ampèremètres et voltmètres.

— Le relèvement de la caractéristique externe se fait dans des conditions particulièrement plus avantageuses par rapport au cas général, étant donné que la force électromotrice du générateur est réduite et de même les courants de charge sont aussi réduits.

— La détermination de réactances X_d et X_q se fait par une construction graphique simple, qui présente la possibilité de vérifier les résultats obtenus par l'aide de la relation 5.

Il faut mentionné que la méthode proposée est indiquée pour les machines des puissances relatives petites. Pour les grandes machines elle présente le desavantage qu-elle nécessite un rhéostat à liquide d'une puissance correspondante.

ANNEXE 1

Pour déterminer analitiquement les points d'intersection de la droite D_1 avec la caractéristique externe on procède comme suit :

On élimine l'angle entre les équations de fonctionnement (6) écrites sous la forme :

$$I \cos \delta \left(\frac{V}{I} + R + X_d \operatorname{tg} \delta \right) = V_0$$
$$\left(\frac{V}{I} + R \right) \operatorname{tg} \delta = X_d \qquad \text{(A1)}$$

et on obtient

$$\frac{Z^2 + X_d X_q}{\sqrt{Z^2 + x_q^2}} = V_0 \qquad \text{(A2)}$$

avec la notation :

$$Z = \frac{V}{I} + R. \qquad \text{(A3)}$$

La première relation de (7) peut être écrite sous la forme :

$$I(Z + X_d) = \sqrt{2}\, V_0 \tag{A4}$$

ainsi que de (A2) et (A4) il en résulte :

$$\frac{\sqrt{Z^2 + X_q}}{Z^2 + X_d X_q}(Z + X_d) = \sqrt{2} \tag{A5}$$

On constate que la relation (A5) conduit à une équation de 4-e degré :

$$(Z - X_q)\,\Phi(Z) = 0 \tag{A6}$$

où :

$$\Phi(Z) = Z^3 - (2X_d - X_q)\,Z^2 + X_d(2X_q - X_d)\,Z - X_d^2 X_q\,. \tag{A7}$$

On constate que l'écuation (A6) admet au moins deux racines réelles :

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_q \\ Z_2 &= \alpha_0 X_d \end{aligned} \tag{A8}$$

C'est facile à voir que la seconde racine Z_2 est plus grande que $Z_1 = X_q$ étant donné que la fonction $\Phi Z)$ change le signe dans l'intervalle $+\infty$ et X_q :

$$\begin{aligned} \Phi(\infty) &= +\infty > 0 \\ \Phi(X_q) &= 2X_q(X_q^2 - X_d^2) < 0\,. \end{aligned} \tag{A9}$$

Tenant compte de la relation (A3) il en résulte que la racine plus petite Z_1 correspond au point d'intersection P_0 (fig. 1).

Pour déterminer la racine Z_2 on fait un changement de variable :

$$Z = \alpha X_d \tag{A10}$$

ainsi que de (A7) il en résulte :

$$\alpha^3 - \left(2 - \frac{X_q}{X_d}\right)\alpha^2 + \left(2\frac{X_q}{X_d} - 1\right)\alpha - \frac{X_q}{X_d} = 0\,. \tag{A11}$$

Léquation (A11) admet une seule solution réelle quand le rapport X_q/X_d este compris dans des limites beuacoup plus larges que celles rencontrées dans la pratique. Pour démontrer ceci on substitue :

$$\alpha = \beta + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{X_q}{X_d}\right) \tag{A12}$$

ainsi que l'équation (A11) devient :

$$\beta^3 + p\beta + q = 0 \tag{A13}$$

où :

$$p = -\frac{1}{3}\left(\frac{X_q^2}{X_d^2} - 10\frac{X_q}{X_d} + 7\right)$$

$$q = \frac{2}{27}\left(\frac{X_q^3}{X_d^3} - 15\frac{X_q^2}{X_d^2} + 21\frac{X_q}{X_d} - 17\right) \tag{A14}$$

Calculant le discriminant de l'équation (A13).

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -2\left(\frac{X_q}{X_d}\right)^4 + 28\left(\frac{X_q}{X_d}\right)^3 - 11\left(\frac{X_q}{X_d}\right)^2 + 28\left(\frac{X_q}{X_d}\right) - 2 \tag{A15}$$

et l'égalant à zéro on obtient une équation réciproque qui admet deux racines imaginaires et deux racines réelles :

$$\left(\frac{X_q}{X_d}\right)_1 = 0{,}55\ ;\ \left(\frac{X_q}{X_d}\right)_2 = 13{,}68\,.$$

Pour les valeurs du rapport X_q/X_d compris entre les racines, c'est à dire entre les limites 0,055 et 13,68 le discriminant de l'équation (A13) obtient des valeurs positives et par suite les équations (A13) et (A11) admettent une seule racine réelle.

Connaissant que l'équation (A11) admet une seule racine réelle, celle-ci peut être déterminée relatif facilement si on utilise la circonstance que le rapport X_q/X_d s'exprime tout simplement en fonction de α :

$$\frac{X_q}{X_d} = \alpha\,\frac{1 + 2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2 + 2\alpha - 1} \tag{A16}$$

Faisant le changement de variable donnée par les relations (12)

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{x}{1-y} \\ \frac{X_q}{X_d} &= \frac{y}{1-y} \end{aligned}\right\} \tag{A17}$$

on obtient la fonction :

$$y = \frac{2x^2 - 1}{6x^3 - 6x + 1}\,. \tag{A18}$$

Dans le tableau d'en bas sont données les valeurs de α, x et y pour différentes valeurs du rapport X_q/X_d et dand la fig. 5 est représentée la fonction (A18) quand le rapport X_q/X_d varie entre les limites rencontrées dans la pratique.

$\frac{X_q}{X_d}$	1	1,908	0,828	0,755	0,685	0,618	0,551	0,485	0,419	0,353
	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
x	0,5	0,476	0,453	0,430	0,406	0,382	0,355	0,326	0,295	0,260
y	0,5	0,524	0,545	0,565	0,583	0,600	0,615	0,630	0,643	0,655

OBSERVATION 1. Si la machine étudiée est aux pôles lisses l'équation (A6) admet deux racines égales ; la droite D_1 devient tangente à la caractéristique externe. En construisant la tangente D_1 on peut déterminer par cette voie la réactance synchrone de la machine aux pôles lisses.

OBSERVATION 2. Si la tension de marche en vide V_0 est située sur la portion saturée de la caractéristique de marche en vide alors la méthode exposée conduit à la détermination de la réactance longitudinale saturée. Les deux points de l'intersection P_0 et Q_0 vont se rapprocher aboutissant à se confondre quand $X_{dsat} + R = X_q - R$. Dans le cas, non intéressant dans la pratique, quand $X_{dsat} + R < X_q - R$ il résulte que les deux points P_0 et Q_0 vont changer de rôle dans le sens que P_0 va déterminer X_q et Q_0 va déterminer X_{dsat}.

Chair de Reseaux éléctriques
Institut Polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *L. M. Piotrovschi,* — Electriceschie maşinî GOSENERGOIZDAT, 1950.
2. *W. Nürnberg,* — Iopîtanie electriceschih maşinî. GEL, 1959.
3. *K. P. Kovacs,* — Mässung der sinchronen Langs und Querreactasen im Stillstand E.u.M. 74 (1957) Nr. 21.
4. *E. B. Powell,* — Etude du comportement des turbo-alternateurs a vapeur par les méthodes stroboscopiques. Raport 101 C.I.G.R.E., 1956.
5. *O. Centea,* — Sur la détermination expérimentale de la réactance synchrone transversale de la machine synchrone. „Electrotehnica" 4 (1959) (en roumain).
6. *E. Potolea,* — La machine synchrone aux pôles apparents, élément asimétrique des réseaux électriques. „Electrotehnica" 11 (1958).

МЕТОД ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКТАНСОВ ЯВНОПОЛЮСНОЙ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ

(Краткое содержание)

В работе излагается новый (оригинальный метод) одновременного определения продольных и поперечных реактансов явнополюсной синхронной машины.

Метод использует внешнюю характеристику машины, найденную опытным путем в особых благоприятных условиях.

Доказывается, что обе точки пересечения внешней характеристики с данной прямой дают возможномность установит (определить) продольные и поперечные реактансы установить (зависимость) между ордонатами и абцисаами указанных точек.

AN ORIGINAL METHOD FOR THE SIMULTANOUS DETERMINATION OF THE LONGITUDINAL AND TRANSVERSAL REACTANCE OF THE SYNCRONIC MACHINE WITH SILENT POLES

(Summary)

The method uses an external characteristic of the machine experimentally increased in particularly favourable conditions.

It is proved that the two points of intersection of the external characteristic with a given straight line enable the determination of the longitudinal and transversal reactance by effectuating the relations between the ordinates and abscisses of the above mentioned point.

UNE METHODE POUR LA DETERMINATION DES RÉACTANCES SYNCHRONES DELA MACHINE AUX POLES SAILLANTS

(Résumé)

On presente une methode originale pour la determination de reactances synchrones des machines aux poles saillants. On trace la caracteristique externe de la machine dans les conditions particuliers. Les points d'interection de cette caracteristique avec une droite donnée permet la determination et transversale de la machine.

EINE ORIGINALE METHODE FÜR DIE GLEICHZEITIGE FESTSTELLUNG DIE DER LÄNGE NACH LANFENDEN UND DER QUER LANFENDEN REAKTANZEN DER SYNCRONISCHEN MASCHINE MIT AUSGEPRÄGTEN POLE

(Zusammenfassung)

Die Methode benützt eine auswertige Karakteristik der Maschine die auf experimentalen Wege im besouders günstigen Zuständen vergrössert wurde.

Es wird bewiesen dass die zwei Kreuzungspunkte der auswertigen Karakteristik mit einer gegebenen Linie, die Feststellung die der Länge nach laufenden und der quer lanfenden Reatanzen durch die Ausfürung der Verhältnissen zwischen den Ordinaten und den Abcissen der angezeigten Punkte ermöglichen.

Intreprinderea poligrafică „Grafica Nouă" II — București — c. 1430

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 4

IULIE — AUGUST

1963

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в шестых годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

MŰSZAKI KÖNYVTÁR
DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLY
1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 4

IULIE — AUGUST
1963

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academie R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Conf. *Gh. Hagymaș*, cand. St. Th.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Conf. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R.P.R.

SUMAR

MATEMATICĂ

G. SUDAN, C. BUCUR — Asupra aproximării formelor liniare ternare 13

I. M. MIU — Une nouvelle mèthode de sèparation des racines réelles des équations 19

FIZICA

G. MOISIL — Calculul potențialului electric produs în sol de o linie de tracțiune electrică 31

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. BLUM, FR. BARCA, E. CERNICA — Studiul condițiilor de brichetare a ligniților romînești 43

P. BALTĂ, V. VELEA — Proprietățile semiconductoare ale unor sticle din sistemul $V_2O_5 — P_2O_5 — As_2O_3$ . . 55

REZISTENȚA MATERIALELOR

M. RENERT, R. MARCU — Utilizarea mașinii de extrudere ca reometru 65

TERMOTEHNICA

B. GRÜNWALD — O ecuație a propagării flăcării turbulente în motorul cu aprindere prin scînteie . . . 81

ENERGETICA

S. CĂLIN — Sinteza rețelelor de corecție în serie prin metoda sistemului echivalent de ordinul II . . . 107

ELECTROTEHNICĂ

V. N. NEDELCU — К вопросу об определении понятия кажущейся мощности трехфазных несимметричных систем 123

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Г. СУДАН, К. БУКУР — О диафантических приближений тройных линейных форм 13

И. МИУ — Новый метод отделения реальных корней уравнений 19

ФИЗИКА

Г. МОИСИЛ — Расчёт электрического потенциала, возникающего в земле за счёт электрической тяги . 31

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

И. БЛУМ, Ф. БАРКА, Э. ЧЕРНИКА — Исследование условий брикетирования румынских лигнитов. . 43

П. БАЛТЭ, В. ВЕЛЯ — Полупроводниковые свойства некоторых стекол системы V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3 . 55

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

М. РЕНЕРТ, Р. МАРКУ — Применение экструзионных машин в качестве реометра 65

ТЕРМОТЕХНИКА

Б. ГРЮНВАЛД — Уравнение распространения турбулентного пламени в двигателях с искровым зажиганием 81

ЭНЕРГЕТИКА

С. КЭЛИН — Синтез последовательных корректирующих цепей методом эквивалентной системы 2-го порядка 107

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

В. Н. НЕДЕЛКУ — К вопросу об определении понятия кажущейся мощности трёхфазных несимметричных систем 123

CONTENTS

MATHEMATICS

G. SUDAN, C. BUCUR — On the diophantine aproximation of a linear ternary form 13

I. M. MIU — A new method for the separation of real roots of equations 19

PHISYCS

G. MOISIL — The calculus of the electrical potential produced by the two rails of an electrical railway . . 31

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. BLUM, FR. BARCA, E. CERNICA — A study on the conditions for manufacturing briquettes of Roumanian lignites 43

P. BALTĂ, V. VELEA — Semiconducting properties of some glasses from the system $V_2O_5 — P_2O_5 — As_2O_3$ 55

STRENGTH OF MATERIALS

M. RENERT, R. MARCU — On the utilisation of screw-extruders as viscometers 65

TERMODYNAMICS

B. GRÜNWALD — An equation of propagating the turbulent flame in a spark ignition engine 81

ELECTRIC POWER

S. CĂLIN — Correcting circuit synthesis using the method of the equivalent system of the II-nd order . . . 107

ELECTRICITY

V. N. NEDELCU — Concerning the definition of apparent power in asymetrical three-phase systems 123

SOMMAIRE

MATHÉMATIQUE

G. SUDAN, C. BUCUR — Sur l'approximation des formes linéaires ternaires 13

I. M. MIU — Une nouvelle méthode de séparation des racines réelles des équations 19

PHYSIQUE

G. MOISIL — Le calcul du potentiel électrique produit par une voie de traction électrique 31

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

I. BLUM, FR. BARCA, E. CERNICA — Etudes des conditions de briquettage des lignites roumains . . . 43

P. BALTĂ, V. VELEA — Les propriétés semiconductrices des verres du système V_2O_5 — P_2O_5 — As_2O_3 . . 55

RÉSISTANCES DES MATÉRIAUX

M. RENERT, R. MARCU — Sur l'utilisation des extrudeuses comme rhéomètre 65

TERMOTECHNIQUE

B. GRÜNWALD — Une équation de la propagation de la flamme turbulente dans le moteur à allumage par étincelle 81

ENERGETIQUE

S. CĂLIN — La synthèse des réseaux correctrices en série par la méthode du système equivalent du II-ème ordre 107

ELECTROTECHNIQUE

V. N. NEDELCU — La définition de la puissance apparente des systèmes triphasés non-symétriques . . 123

INHALT

MATHEMATIK

G. SUDAN, C. BUCUR — Uber einer diophantischen annaherung der liniaren ternären form 13

I. M. MIU — Eine neue Methode zur Trennung der reellen Wurzeln in Gleichungen 19

PHYSIK

G. MOISIL — Berechnung des elektrischen Potentials, von einer elektrischen Eisenbahnlinie in der Erde erzeugt 31

TEHNOLOGISCHE CHEMIE

I. BLUM, FR. BARCA, E. CERNICA — Untersuchung der Vorbedingungen für die Herstellung von Briketten aus Rumänischen Ligniten 43

P. BALTA, V. VELEA — Die halbleitenden Eigenschaften einiger Gläser des Systems $V_2O_5 — P_2O_5 — As_2O_3$. 55

FESTIGKEITSLEHRE

M. RENERT, R. MARCU — Über die Verwendung des Extruders als Viskosimeter 65

TERMOTECHNIK

B. GRÜNWALD — Eine Gleichung der Fortpflanzung der turbulenten Flamme im Motor mit Funkenzündung . 81

ENERGETIK

S. CĂLIN — Die synthese der Serienberichtigungsnetze durch die Methode des gleichwertigen Systems der Grösse II 107

ELECTROTECHNIK

V. N. NEDELCU — In Zusammenhang mit der Definitions der Scheinleistung nichtsymmetrischer Drehstromsysteme 123

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

MATEMATICĂ

ASUPRA APROXIMĂRII FORMELOR LINIARE TERNARE *)

G. SUDAN și C. D. BUCUR

În cele ce urmează vrem să arătăm, cu mijloace geometrice, că teorema lui Borel-Obrejcov, privind formele liniare ternare, este o consecință a teoremei lui Minkowski privind corpurile convexe cu centru de simetrie, din spațiul cu trei dimensiuni.

O teoremă a lui Borel [1]) are enunțul următor:

Dacă α și β sînt numere reale arbitrare iar N un număr natural atunci există numere întregi x, y, z nu toate nule și un număr θ, independent de numerele x, y, z și N, așa fel încît să avem

$$|\alpha x + \beta y + z| < \frac{\theta}{N^2}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2} \tag{1}$$

și

$$|x| \leqslant N \quad ; \quad |y| \leqslant N \quad ; \quad |z| \leqslant N. \tag{2}$$

Obrejcov [2]) a dat o nouă demonstrație analitică a acestei teoreme precizînd și valoarea lui θ și anume

$$\theta = 1$$

Vom arăta mai jos, că teorema precedentă se poate deduce imediat din teorema lui *Minkowski* privind corpurile convexe din spațiul cu trei dimensiuni avînd un centru de simetrie într-unul din punctele rețelei numerele întregi al acestui spațiu.

Pentru aceasta să considerăm trei axe rectangulare și rețeaua numerelor întregi corespunzătoare acestor axe, adică mulțimea formată de toate punctele din spațiu care au coordonatele numere întregi.

---

*) Lucrare prezentată la sesiunea științifică de comunicări a cadrelor didactice din IPB, 7—8 aprilie 1962.

1) **E. Borel**: „Contribution a l'analyse arithmetique du continuu" (Jour. de Matt. pures et. appel. vol. 9 1903 p. 239).

2) **N. Obrechkoff**: Sur une question de l'approximation diophantique des formes Lineaires" (C.R. de l'Acad. Bulgare Sci. 9 nr. 4 1956).

Dacă notăm cu P planul

$$\alpha x + \beta y + z = 0$$

teorema revine la a arăta că în interiorul sau pe frontiera cubului C, cu centrul în O, cu laturile paralele cu axele de coordonate și de lungime $2N$, există cel puțin un punct al rețelei numerelor întregi, pentru a cărui distanță d la planul P avem :

$$d \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

Să ducem la distanța $\frac{1}{N^2}$ de planul P, de o parte și de cealaltă a acestuia, cîte un plan paralel cu P, iar în toate punctele frontierei secțiunii făcute de planul P în cubul C, să ridicăm cîte o perpendiculară pe acest plan.

Se formează astfel un corp convex Q limitat de cele două plane paralele cu P și de suprafața generată de perpendicularele precedente, care are un centru de simetrie în O.

Însă aria unei secțiuni plane, făcută prin centrul cubului, este mai mare sau cel puțin egală cu aria unei fețe a acestui cub.

Într-adevăr există două tipuri de asemenea secțiuni plane : unele care intersectează patru laturi ale cubului, iar altele care intersectează șase laturi.

Pentru primele secțiuni, afirmația de mai sus se dovedește imediat prin proiectarea secțiunii pe o față a cubului. Pentru celelalte secțiuni,

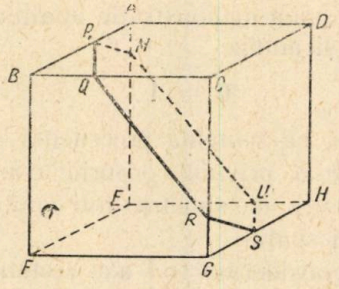


Fig. 1

lungimea laturii cubului fiind $2N$, iar perimetrul secțiunii plane fiind p avem :

$$p \geqslant 2 \cdot \sqrt{18}\, N$$

Pentru aceasta să remarcăm întîi că (fig. 1), în cazul considerat, fiecare latură a secțiunii plane taie două laturi concurente ale feței cubului, care conține acea latură a secțiunii.

Să desfășurăm cubul (fig. 2) și odată cu el și perimetrul secțiunii plane. Se constată că cea mai scurtă depărtare între cele două puncte P_1 inițial și P_1 final fiind linia dreaptă care le unește, iar latura cubului fiind $2N$, avem

$$p^2 \geqslant 4N^2 \cdot 18$$

adică

$$p \geqslant 2\sqrt{18}\, N$$

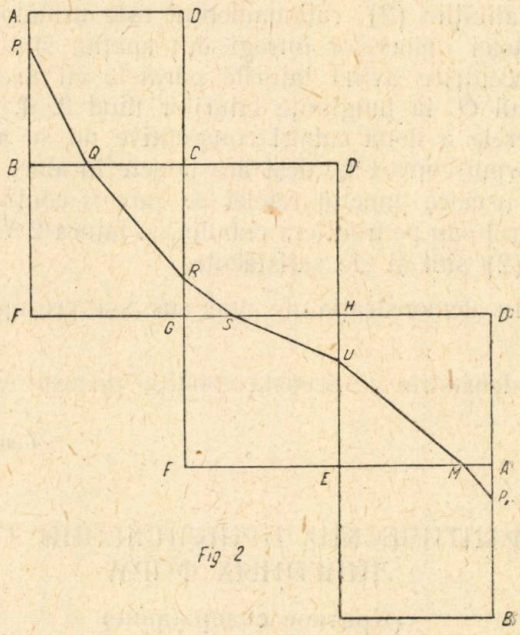


Fig. 2

Fig. 2

Deoarece aria secțiunii este S,

$$S \geqslant p \cdot \frac{N}{2}$$

urmează

$$S \geqslant \sqrt{18}\, N^2 > 4N^2$$

în consecință volumul V al corpului convex Q este

$$V \geqslant 8.$$

Semnul egal nu poate avea loc decît în cazul cînd planul P este paralel cu una din fețele cubului. În acest caz este însă evident că P conține puncte ale rețelei numerelor întregi diferite de O și teorema lui *Borel — Obrejcov* este justificată.

Dacă se exclude acest caz particular urmează

$$V > 8$$

și după teorema lui *Minkovski* [3]) orice corp convex cu volumul mai mare ca 8 și care are un centru de simetrie într-un punct al rețelei, mai conține în interiorul lui în afară de centrul său de simetrie, încă cel puțin un punct al rețelei. Coordonatele acestui punct sînt numere întregi care satisfac teorema lui *Borel-Obrejcov*.

În adevăr în ce privește inegalitatea (1), afirmația este evidentă. Pentru inegalitățile (2), raționamentul este următorul:

Punctele rețelei numerelor întregi din spațiu, sînt așezate pe fețele unor cuburi concentrice avînd laturile paralele cu axele de coordonate, centrul în punctul O, ia lungimile laturilor fiind 2, 4, 6, ...

Între frontierele a două cuburi consecutive nu se află nici un punct al rețelei. Ori corpul convex Q, deși are puncte în afara cubului cu latura $2N + 2$ și prin urmare punctul rețelei pe care îl conține în afară de O, se află în interiorul sau pe frontiera cubului cu latura $2N$, de unde urmează ca inegalitățile (2) sînt și ele satisfăcute.

Observare. În demonstrația de mai sus s-a presupus că N este un număr natural.

Obrejcov a demostrat că această condiție nu este esențială și ajunge să avem $N \geqslant 1$.

Catedra de matematică

О ДИАФАНТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТРОЙНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

(Краткое содержание)

В настоящей статье указывается, как теорема Бореля-Обрежкова об апроксимации линейной шернарной формы вытекает очень просто в случае натурального N, из теоремы Минковского.

ON THE DIOPHANTINE APPROXIMATION OF A LINEAR TERNARY FORM

(Summary)

It is shown how the Borel-Obrechkoff's theorem regarding the approximation of a ternary-linear form may be easly deduced form Minkovski's theorem in case N is a natural number.

[3] *H. Minkovski* „Diophantische Approximationen" Ed. B.G. Teubner 1927, p. 60.

SUR L'APPROXIMATION DES FORMES LINEAIRES TERNAIRES

(Résumé)

On montre comment le théorème de Borel-Obrechkoff concernant l'approximation d'une forme linéaire ternaire, peut étre deduite très simplement dans le cas où N est un nombre naturel, du théorème de Minkowski.

UBER EINER DIOPHANTISCHEN ANNAHERUNG DER LINIAREN TERNÄREN FORM

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie der Borel-Obrechkoffscher. Satz betreffend die Annäherung einer linearen ternären Form, aus dem Minkowskisher Satz abgeleitet werden kann, wenn N eine natürliche Zahl bedeutet.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE SÉPARATION DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS

I. M. MIU

En ce qui suit, nous donnerons des théorèmes qui permettent plusieurs applications. Ces applications se réfèrent notamment à la séparation des racines réelles des équations et à la discussions des équations.

La méthode que nous donnerons présente des avantages sur la méthode de Rolle.

Théorème I.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans le segment $[a, b]$ et dérivable dans (a, b), et $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions continues en $[a, b]$.

Si $f(a) = f(b) = 0$ et en $[a, b]$ la fonction $\varphi(x)$ n'a aucune racine, la fonction $\psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle (a, b), $(a < x < b)$.

Premiére demonstration.

Admettons initial $x = a$, $x = b$ des racines simples consécutives de l'equation $f(x) = 0$.

Nous avons :

$$f(x) = (x - a)(x - b) g(x)$$

où la fonction $g(x)$ est dérivable dans (a, b) et n'a aucune racine en $[a, b]$ Posons :

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x)$$

Il rezulte

$$\Phi(x) = (x - a)(x - b)[\psi(x) g(x) + \varphi(x) g'(x)] + (2x - a - b)\varphi(x) g(x)$$

Pour $x = a$, $x = b$ la fonction $\Phi(x)$ devient :

$$\Phi(a) = (a - b)\varphi(a) g(a)$$

$$\Phi(b) = (b - a)\varphi(b) g(b)$$

Comme les fonction $\varphi(x)$ et $g(x)$ n'ont aucune racine dans le segment $[a, b]$ il résulte que $\Phi(a)$ et $\Phi(b)$ sont de signes contraires, par conséquent la fonction $\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x)$ a au moins une racine en (a, b) et quand elle en a plusieurs, leur nombre est toujours impaire. Si a et b ne sont pas des racines consécutives de $f(x)$ nous pouvons prendre

deux racines consécutives a', b' de sorte que $a \leqslant a' < b' \leqslant b$ et nous procédons de la même manière.

Dans le cas des racines multiples, ces racines peuvent être considérés comme limite des plusieurs racines simples.

Deuxième démonstration :

Supposons maintenant que $x=a$, $x=b$ sont des racines consécutives respectivement d'ordre p et q de l'équation $f(x) = 0$.

Nous avons :

$$f(x)=(x-a)^p\,(x-b)^q\,g(x),$$

où la fonction $g(x)$ est aussi dérivable en (a, b) et n'a aucune racine en $[a, b]$.

Avec la notation précédente, resulte :

$$\Phi(x)=(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}\{(x-a)(x-b)[\psi(x)g(x)+\varphi(x)g'(x)]+$$
$$+(px+qx-pb-qa)\,\varphi(x)\,g(x)\}=(x-a)^{p-1}\,(x-b)^{q-1}\,\Phi_1(x).$$

L'equation $\Phi(x) = 0$ a les racines $x = a$, $x = b$ respectivement d'ordre $p-1$ et $q-1$. Pour trouver si cette équation a d'autres racines en $[a, b]$ on fait successivement $x = a$, $x = b$ et on obtient :

$$\Phi_1(a) = p(a-b)\,\varphi(a)\,g(a)$$

$$\Phi_1(b) = q(b-a)\,\varphi(b)\,g(b)$$

Les fonction $\varphi(x)$ et $g(x)$ n'ayant pas des racines dans l'intervalle $[a, b]$, il résulte que $\Phi_1(a)$ et $\Phi_1(b)$ sont des signes contraires, donc la fonction :

$$\Phi(x) = \psi(x)\,f(x) + \varphi(x)\,f'(x)$$

a au moins une racine en (a, b).

Pour obtinier le cas des racines simples on fait $p = 1$ respectivement $q = 1$.

§ 2. Théorème II.

Soit l'équation :

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Les hyppotèses du théorème I étant remplies relativement à la continuité et à la dérivabilité, alors les racines réelles des èquations :

$$\left.\begin{aligned}\psi(x)\,f(x)+\varphi(x)\,f'(x)&=0\\ \varphi(x)&=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

séparent les racines réelles de l'équation (1).

Démonstration.

Si nous considérons deux racines réelles consécutives de l'équation (1), conformément au théorème I, entre elles se trouve au moins une racine des équations (2).

Nous disposons les racines des équations (2) dans une suite croissante. Soit x_i, x_{i+1} deux racines consécutives de cette suite. Entre x_i et x_{i+1} se trouve tout au plus une racine de l'équation $f(x) = 0$.

Si nous supposons qu'il existe deux racines de l'équation $f(x) = 0$, conformément au théorème I, il résulte qu'entre elles se trouve au moins une racine des équations (2), mais cette chose est impossible parceques les racines x_i, x_{i+1} sont termes consécutifs de la suite croissante formée avec les racines des équations (2).

Si nous supposons qu'à l'extérieur de la suite formée avec les racines des équations (2) existent deux racines de l'équation (1), on démontre de la même manière qu'il est impossible et que à gauche et à droite de la suite il existe tout au plus une racine.

Il résulte alors que les racines réelles des équations (2) séparent les racines réelles de l'équation (1).

La séparation des racines réelles de l'équation (1) se fait pratiquement de cette manière :

On résolut les équations (2) et les racines trouvées se disposent en ordre croissant et on détermine pour chacune le signe de $f(x)$, etc....

Des cas particuliers des théorèmes

Nous pouvons particulariser les théorèmes en prenant pour $\psi(x), \varphi(x)$ de diverses fonctions.

Voici quelques cas particuliers du théorème II.

a) Les racines réelles de l'équation $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f'(x) = 0$ séparent les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

b) Les racines réelles de l'équation $\lambda f(x) + (x - x_0) f(x) = 0$ et x_0 séparent les racines de l'équation $f(x) = 0$, λ et x_0 étant des nombres réels arbitraires.

c) Les racines réelles des équations :

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1 x + \lambda_2) f(x) + (x^2 + px + q) f'(x) = 0 \\ x^2 + px + p = 0\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

séparent les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, p, q$ sont réels arbitraires.

d) En général pour les équations algébriques il est avantageux de prendre dans l'équation (2) pour $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ des polynomes, dont les coefficients se déterminent de sorte que les équations (2) soient résolubles aisément.

§ 3. Applications sur les équations algébriques

Dans les applications nous allons utiliser les cas exposés plus haut :

α) Considérons l'équation

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (4)$$

Les racines réelles de l'équation

$$\lambda f(x) + f'(x) = 0 \tag{5}$$

séparent les racines réelles de l'équation (4).

En (5) nous prendrons $\lambda = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ou $\lambda = -n$, parceque por ces valeurs le degré de l'équation (5) est plus petit d'une unité.

Application 1. On demande de séparer les racines de l'équation :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Pour $\lambda = 2$, l'équation (5) devient

$$2x^3 + x^2 - 6x = 0.$$

Avec ces racines nous formons le tableau :

x	$-\infty$	-2	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

L'équation donnée a toutes les racines réelles comprises dans les intervalles :

$$(-2, 0)\ ,\ \left(0, \frac{3}{2}\right)\ ,\ \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Avec le théorème réciproque de Rolle nous obtenons :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 2 = 0$$

qui donne $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$.

Nous avons dans ce cas le tableau

x	$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$	$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Il résulte d'ici les intervalles où se trouvent les racines de l'équation, mai les calculs sont plus laborieux.

β). En cas b) nous pouvons obtenir des avantages plus grands. Nous avons vu que les racines réelles de l'équation :

$$\lambda f(x) + (x - x_0) f'(x) = 0 \tag{6}$$

et x_0 séparent les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Considérons l'équation (4) et l'équation (6) devient :

$$\begin{aligned} &\lambda(x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) + \\ &+ (x - x_0)[n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}] = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Nous pouvons réduire le degré de deux unités et dans ce but nous avons plusieurs possibilités.

Par exemple, nous pouvons prendre en (7) $\lambda = -n$, $x_0 = -\frac{a_1}{n}$.

Application 2. On demande de séparer les racines de l'équation

$$x^4 + 2x^3 - \sqrt{2}\,x - 10 = 0.$$

Pour

$$\lambda = -n = -4, \quad x_0 = -\frac{a_1}{n} = -\frac{1}{2}$$

l'équation (7) devient :

$$3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 40 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Cette équation a ses racines complexes.

Nous avons dans ce cas le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

L'équation donnée a deux racines réelles situées dans les intervalles

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

La séparation des racines réelles par le théorème réciproque de Rolle aurait présenté des difficultés.

γ) Les avantages que nous pouvons obtenir dans les cas de la particularisation c) sont les plus grands.

Dans ce cas les racines réelles des équations (3) séparent les racines réelles de l'équation (4).

La première équation (3) s'écrit :

$$\begin{aligned}(\lambda_1 x + \lambda_2)(x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) + \\ + (x^2 + px + q)[nx^{n-1} + (n-1)\,a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}] = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Nous avons plusieurs possibilités de réduire le degré de cette équation par le choix des coefficients.

Ainsi nous pouvons reduire à zéro les coefficients des x^{n+1}, x^n, x^{n-1}, x^{n-2} ou des x^3, x^2, x, x^0 ou des x^{n+1}, x^2, x, x^0, etc.

En conséquence, l'équation (8) peut être réduiae en général à une équation du degré $n-3$ et cette chose présente un grand avantage dans la discussion des équations.

Si nous posons les conditions de faire disparaitre les termes en x^{n+1}, x^n, x^{n-1}, x^{n-2} des équations (8) les coefficients λ_1, λ_2, p, q sont donnés par le système :

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = -n \\ &\lambda_2 + np - a_1 = 0 \\ &a_1\lambda_2 + (n-1)\,a_1 p + nq - 2a_2 = 0 \\ &a_2\lambda_2 + (n-2)\,a_2 p + (n-1)\,a_1 q - 3a_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Pour les valeurs des λ_1, λ_2 p et q données par ce système, l'équation (8) devient du degré $n-3$.

Application 3. On demande de séparer les racines de l'équation

$$x^5 + 5x^4 - 15x^3 - 115x^2 - \frac{28\,160}{583}x + \frac{75\,108}{583} = 0.$$

Le système (9) pour l'équation considérée donne :

$$\lambda_1 = -5\,,\ \lambda_2 = 10\,,\ p = -1\,,\ q = -12$$

et l'équation (8) devient $3x^2 - 461x - 464 = 0$.

Les deux équations (3) dont ses racines réelles séparent les racines de l'équation donnée, sont :

$$x^2 - 9x - 10 = 0\ ,\ x^2 - x - 12 = 0$$

qui ont les racines $-3\,;\ 4\,;\ -1\,;\ 10$.

Nous formons avec ces racines le tableau suivant :

x	$-\infty$	-3	-1	4	10	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Il résulte d'ici que l'équation a trois racines réelles situées dans les intervalles :

$$(-3,\ -1)\,,\ (-1,\ 4)\,,\ (4,\ 10).$$

Applications à la discussions de l'àquation du troisième degré

Soit donc l'équation :

$$x^3 + px + q = 0.$$

Les racines des équations :

$$\lambda(x^3 + px + q) + x(x^3 + px + q)' = 0\ ,\ x = 0$$

pour $\lambda = -3$ sont :

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = -\frac{3q}{2p}.$$

Nous formons le tableau en deux cas :

I. $pq > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{3q}{2p}$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-$		$-\frac{q}{p^3}(4p^3+27q^2)$		q		$+$

Considérons :

α) $q < 0$, $(p < 0)$

Si $4p^3 + 27q^2 > 0$, l'équation a une racine réelle comprise dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, l'équation a trois racines réelles, chacune comprise dans les intervalles :

$$\left(-\infty, -\frac{3q}{p}\right), \ \left(-\frac{3q}{p}, 0\right), \ (0, +\infty).$$

β) $q > 0$, $(p > 0)$

Dans ce cas, nous avons seulement $4p^3 + 27q^2 > 0$ et l'équation a une seule racine réelle située dans l'intervalle $\left(-\frac{3q}{2p}, 0\right)$.

II. $pq < 0$

x	$-\infty$		0		$-\frac{3q}{2p}$		$+\infty$
$f(x)$	$-$		q		$-\frac{q}{p^3}(4p^3+27q^2)$		$+$

Considérons :

α) $q < 0$, $(p > 0)$

Dans ce cas nous avons seulement $4p^3 + 27q^2 > 0$ et l'équation a une seule racine réelle située dans l'intervalle $\left(0, -\frac{3q}{2p}\right)$.

β) $q > 0$, $(p < 0)$

Si $4p^3 + 27q^2 > 0$, l'équation a une seule racine réelle dans l'intervalle $(-\infty, 0)$.

Si $27p^2+4q^3<0$, l'équation a trois racines réelles comprises dans les intervalles :

$$(-\infty, 0), \left(0, -\frac{3q}{2p}\right), \left(-\frac{3q}{2p}, +\infty\right).$$

Pour que l'équation du troisième degré considéré, ait ses trois racines réelles, on voit que la conditon nécessaire et suffisante est que $4p^3+27q^2<0$.

On peut considérer aussi d'autres applications, par exemple l'équation $x^n+ax^2+bx+c=0$, dont le cas particulier est l'équation du 4-ème degré, etc.

§ 4. Le degré des équations dont les racines séparent les racines réelles d'une équation algébrique

Les avantages de la méthode donnée pour la séparation des racines réelles d'une équation, en comparaison avec la méthode de Rolle sont nombreux :

1) On peut obtenir une infinité d'équations qui séparent les racines réelles d'une équation donnée et en conséquence il y a beaucoup de possibilités de les résoudre.

2) Quand le premier membre d'une équation (2) conserve le même signe, alors on trouve seulement les racines réelles de l'autre équation (2).

Aussi on peut examiner les racines réelles situées dans un intervalle.

3) Pour les équations algébriques les équations qui séparent les racines réelles des équations considérées peuvent avoir le degré plus petite que le degré de la dérivée, comme nous verrons immédiatement :

Considérons le cas où le premier nombre de l'équation (1) est un polynome de degré n, qui n'a pas de racines multiples :

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0. \qquad (1')$$

Soient les polynomes :

$$P(x)=x^m+\lambda_1x^{m-1}+\lambda_2x^{m-2}+\ldots+\lambda_{m-1}x+\lambda_m$$

$$Q(x)=\mu_0x^{m+1}+\mu_1x^m+\mu_2x^{m-1}+\ldots+\mu_mx+\mu_{m+1}$$

Il résulte que les racines réelles des équations :

$$\left.\begin{aligned} P(x)f(x)+Q(x)f'(x)&=0\\ Q(x)&=0\end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

séparent les racines réelles de l'équation (1').

Si nous considérons les coefficients des polynomes $P(x)$, $Q(x)$ comme indéterminés, il résulte que la première équation (2') a le degré $m+n$ et dépend de $2m+2$ paramètres.

Posons les conditions que les équations (2') aient le même degré minimum ou des degrés approchés.

Comme la première équation (2′) a $2m + 2$ paramètres, il résulte qu'on peut dimineur son degré. Le degré ainsi diminué doit être égal au degré de l'autre équation (2′). Nous avons :

$$m + n - (2m + 2) = m + 1$$

Il résulte $m = \dfrac{n-3}{2}$.

Le degré de l'équation (2′) est :

$$m + 1 = \frac{n-1}{2}. \tag{4'}$$

Considérons deux cas :

a) n, nombre impaire : $n = 2p + 1$

Il résulte de la formule (4′) que les degrés des équations (2′) peuvent être diminués au moins jusqu'à p.

b) n, nombre pair : $n = 2p$.

Il résulte que les degrés des équations (2′) peuvent être diminués au mois jusqu'à p.

Dans ce cas, on peut diminuer le degré d'une équation de (2′) jusqu'à p, et le degré de l'autre équation jusqu'à $p - 1$.

On observe qu'en général on peut déterminer les coefficients des polynomes $P(x)$, et $Q(x)$, ainsi que les degrés $n_1 + n_2 = n - 1$.

Observation. Quand on étudie les racines réelles d'une équation dans un intervale $[\alpha, \beta]$, alors il faut mettre dans la suite aussi les valeurs de $f(x)$ pour $x = \alpha$, $x = \beta$.

§ 5 Théorème III

Si l'on écrit abrégées les équations (2) ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

cinsodérons la fonction $\Phi(x)$ dérivable en $[a, b]$ et les fonction $\psi_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_2(x)$ continues en $[a, b]$, on a le théorème :

Les racines réelles des équations :

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x)\Phi(x) + \varphi_1(x)\Phi'(x) = 0 \\ \varphi_1(x) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \psi_2(x)\varphi(x) + \varphi_2(x)\varphi'(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

séparent les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ dans un autre sens.

Cela signifie qu'en considérant toutes les racines réelles des équations (11) ordonnées croissant, entre deux racines consécutives on trouve tout au plus trois racines de l'équation (1).

La démonstration de ce théorème résulte du théorème II.

Applications aux equations algébriques

En considérant l'équation (1'), conforme au théorème précédent, on peut déterminer quatre équations·

$$Q_1(x) = 0 \ , \ Q_2(x) = 0 \ , \ Q_3(x) = 0 \ , \ Q_4(x) = 0 \qquad (5')$$

où les premiers membres sont en général des polynomes de degrés $\frac{n-3}{4}$.

Les racines réelles des équations (5') séparent dans le sens indiqué dans le théorème III, les racines réelles de l'équation (1').

En considérant les polynomes $P(x)$, $Q(x)$, on peut déterminer ses coefficients ainsi que les degrés n_1, n_2 des équations (10) qui s'écrivent:

$$\left.\begin{aligned} S(x) = P(x) f(x) + Q(x) f'(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

satisfassent la relation : $n_1 + n_2 = n - 1$

Avec les équations (6') se forment les équations (11) :

$$\left.\begin{aligned} Q_1(x) = P_1(x)\, S(x) + Q_2(x)\, S'(x) = 0 \\ Q_2(x) = 0 \\ Q_3(x) = P_2(x)\, Q(x) + Q_4(x)\, Q'(x) = 0 \\ Q_4(x) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Les racines réelles de ces équations séparent, dans le sens indiqué, les racines réelles de l'équation (1').

En général il est possible de déterminer les coefficients des polynomes $P_1(x)$, $Q_2(x)$, $P_2(x)$, $Q_4(x)$, de telle manière que les degrés n_1', n_2', n_3', n_4 des équations (7') satisfassent à la condition :

$$n_1' + n_2' + n_3' + n_4' = n - 3 .$$

Observations :

On peut donner encore des théorèmes relatifs aux racines réelles des équations :

a) Pour ce but, nous pouvons utiliser des racines de la dérivée. Ainsi, si nous avons $f'(x) = g_1(x) g_2(x)$ alors — avec les conditions spécifiées plus haut — les racines réelles des équations :

$$\varphi(x) f(x) + \psi(x)\, g_2(x) = 0$$

$$\psi(x) = 0 \ , \ g_1(x) = 0$$

séparent les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$

b) Si $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ sont fonctions continues, et $|h| < |\delta|$, δ étant la distance minimum entre deux racines réelles consécutives de l'équation $f(x) = 0$, alors les racines reelles des équations :

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) f(x) + \varphi(x) f(x + h) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{aligned}\right.$$

séparent les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Dans le cas où la fonction $f(x)$ et dérivable, pour h suffisament petit on obtient le théorème étudié plus haut.

(Dans ce cas nous pouvons prendre $f(x+h) \sim f(x) + hf'(x)$, $\psi(x) + \varphi(x) = \psi_1(x)$, $h\varphi(x) = \varphi_1(x)$).

Observation. Nous pouvons donner à la théorème I un plus grande generalité ainsi :

Théorème :

Considerons les fonctions :

1° $f(x)$ continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b).

2° $\psi(x)$ continue dans l'intervalle $[a, b]$.

3° $\varphi(x)$ continue sur l'intervalle $[a, b]$, et $\varphi(x)$, $f(x)$ n'ont pas des racines communes.

Entre deux racines consecutives réelles de l'equation $f(x) = 0$ situées dans $[a, b]$ se trouvent au total un nombre de racines des équations:

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) = 0$$

$$\varphi(x) = 0.$$

La chaire de mathématique

НОВЫЙ МЕТОД ОТДЕЛЕНИЯ РЕАЛЬНЫХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ

(Краткое содержание)

В работе устанавливаются теоремы, позволяющие отделить реальные корни уравнений.

Выдвинутый метод представляет много преимуществ в сравнении со старым классическим методом, использующим взаимную теорему Ролля.

Самым значительным преимуществом является тот факт, что отделение реальных корней может быть осуществлено посредством уравнений, степени которых даже в крайнем случае не превышают половины степени данного уравнения.

A NEW METHOD FOR THE SEPARATION OF REAL ROOTS OF EQUATIONS

(Summary)

In this work are established theoremes which permit the separation of real roots of equations.

The described method shows a lot of advantages against the known classic method with the help of the reciprocal theoreme of Rolle.

The most important advantage consists in the fact that separation of real roots can be made with equations the grade of which is allmost equal with the half of the considered equation's grade.

UNE NOUVELLE METHODE DE SÉPARATION DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS

(Résumé)

Dans ce travail on établit des théorèmes qui permettent de séparer les racines réelles des équations.

La méthode exposée présente de nombreux avantages en comparaison avec la méthode classique connue avec le théorème réciproque de Rolle.

Le plus grand avantage est que la séparation des racines réelles se fait avec les équations dont les degrés sont tout au plus égaux avec le demi-degré de l'équation considérée.

EINE NEUE METHODE ZUR TRENNUNG DER REELLEN WURZELN IN GLEICHUNGEN

(Zusammenfassung)

Im Beitrag werden Regeln festgelegt, die die Trennung der reellen Wurzeln in Gleichungen, gestatten.

Die angeführte Methode besitzt unzählige Verteile gegenüber der klassischen Methode mit Hilfe der reziproken Regel von Rolle.

Der Hauptvorteil besteht darin, dass die Trennung der reellen Wurzeln mit dieser Regel deren Grad höchstens gleich ist mit der Hälfte des Grades der angewandten Gleichung, möglich ist.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

FIZICĂ

CALCULUL POTENȚIALULUI ELECTRIC PRODUS IN SOL DE O LINIE DE TRACȚIUNE ELECTRICĂ *)

G. MOISIL

1. Introducere

Lucrările referitoare la calculul potențialului produs în sol și în construcțiile metalice învecinate, de către curenții care dispersează din liniile de tracțiune electrică în curent continuu, se pot grupa în trei categorii, după apartenența lor la una din teoriile următoare: teoria convențională [1—17] ilustrată mai ales de lucrările lui Mc. Collum [4] și ale cercetătorilor sovietici Mihailov [8, 9], Ersov [11] și Strijevschi și Tomlianovici [14], teoria lui Noether-Gibrat [19—23] și teoria lui Sunde [24—28], dezvoltată și de cercetătorii sovietici Aronzon [25] și Razumov [28].

Formulele deduse din teoria convențională prin integrarea ecuațiilor asemănătoare cu ecuația telegrafiștilor, se bazează pe ipoteze suficient de arbitrare. Metoda Noether-Gibrat, deși mult mai riguroasă, este însă aplicabilă numai în cazul în care construcțiile subterane se găsesc în contact perfect cu solul. În sfîrșit, metoda Sunde deși conduce la expresii formale riguroase, efectuarea calculelor concrete implică folosirea aproximațiilor succesive.

În lucrarea de față, ne propunem să determinăm potențialul electric produs de curenții de dispersie, prin integrarea ecuației cu derivate de tipul Laplace-Poisson, folosind formalismul funcției Dirac.

Această metodă, bazată pe teoria clasică a cîmpului, în sensul lui Ivanenko și Sokolov [29], a fost folosită de autor și într-o lucrare anterioară [30], pentru rezolvarea unei probleme înrudite cu cea de față.

2. Punerea problemei

Vom considera următorul model (vezi figura 1):

Pe suprafața plană care separă aerul de sol, considerat omogen linear și izotrop și de conductivitate constantă λ se află o cale de tracțiune simplă, asimilată cu un sistem de doi electrozi (1) și (2), semiîngropați,

*) Comunicare prezentată la sesiunea științifică de electrotehnică organizată de Ministerul Învățămîntului, la 18 Decembrie 1962, în București.

cilindric circulari, de rezistență liniară w, de rază a și de lungime infinită, distanța dintre axele lor, paralele fiind D_{12}. În sol, se găsește îngropată la adîncimea constantă h, o construcție metalică subterană (3), asimilată unui electrod cilindric circular, de rezistență lineară w_3, de rază a_{03} și de lungime infinită, a cărei axă, paralelă cu axele electrozilor (1) și (2) este situată de acestea la distanțele D_{13} și D_{23}. Construcția este acoperită cu

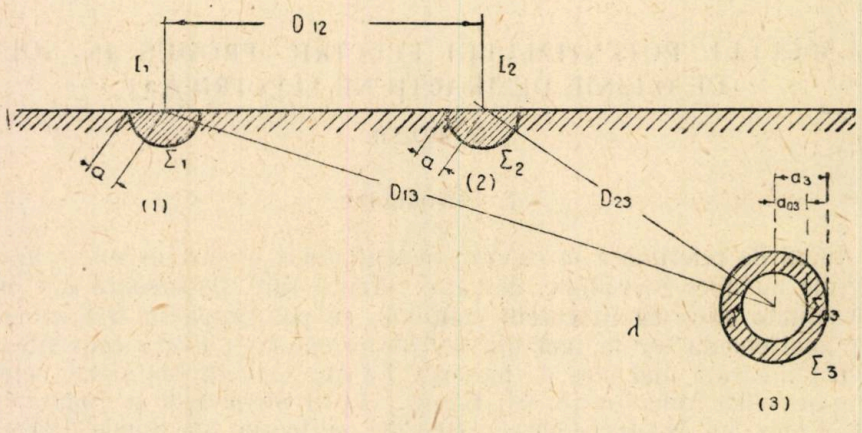


Fig. 1

un înveliș cuasi-izolant omogen, linear și izotrop de conductivitate λ*. Suprafața de separație înveliș-sol, este de asemeni cilindric-circulară, de rază a_3 și coaxială cu suprafața electrodului (3).

Poziția unui punct de observație se raportează la un sistem rectangular de coordonate, a cărui axă x este orientată după direcția de paralelism a electrozilor.

Pe șinele (1) și (2), se aplică un sistem de n perechi de surse de curent continuu, cuasi-punctiforme, de intensitate $I_j^{(1)}$, respectiv $I_j^{(2)}$, în puncte de abscisă $X_j = X_{oj} + v_j t$. Aceste perechi de surse, pot fi situate în punctele de contact ale roților vagoanelor automotoare cu șina, în acest caz ele fiind surse mobile care se deplasează cu viteza v_j, sau în punctele de conexiune la șine ale cablurilor de întoarcere, în care caz ele sînt fixe, viteza lor fiind nulă.

Așa cum a arătat Kirchhoff, încă în 1880, datorită liniarității mediului, potențialul electric este funcție lineară de intensitățile surselor aplicate. În ipoteza neglijării cîmpurilor imprimate, potențialul în sol este:

$$V(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(1)}(x_j,y,z)\, I_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} p_j^{(2)}(x_j,y,z)\, I_j^{(2)} \qquad (1)$$

în care $x_j = X_j - x$.

Se poate arăta ușor, că întrucît $\nabla\lambda = 0$ și deci V ascultă de ecuația Laplace-Poisson, funcțiile $p_j^{(k)}$ $(k=1,2)$ satisfac în sol ecuațiile:

$$\nabla^2 p_j^{(k)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \varrho_v^{(k)}}{\partial t} \tag{2}$$

iar în învelișul cuasi-izolant, ecuațiile:

$$\nabla^2 p_j^{*(k)} = \frac{1}{\lambda^*}\frac{\partial \varrho_v^{*(k)}}{\partial t} \tag{3}$$

În afară de aceasta, $p_j^{(k)}$ și $p_j^{*(k)}$, trebuie să satisfacă și anumite condiții de frontieră, pe care le vom formula mai jos.

3. Calculul funcțiilor $p_j^{(k)}$ și $p_j^{*(k)}$.

Expresiile funcțiilor $p_j^{(k)}$ într-un punct din sol sînt determinate de intensitatea și poziția relativă a sursei $I_j^{(k)}$ situată pe electrodul (k) și de sarcinile superficiale dezvoltate pe suprafețele Σ_1, Σ_2 și Σ_3 care separă solul de electrozii (1) și (2) și de învelișul cuasi-izolant ai construcției. Distribuția de sarcini de pe planul de separație aer-sol, poate fi eliminată, aplicînd teorema imaginilor.

Exprimînd pe $\frac{\partial \varrho_v^{(k)}}{\partial t}$ prin intermediul funcției lui Dirac, din (2) rezultă soluția formală:

$$p_j^{(k)} = -\frac{1}{\lambda}\nabla^{-2}\left\{2\delta(R_j^{(k)}) + 2F_1^{(k)}(x_j)\frac{\delta(r_1-a)}{2\pi a} + \right.$$
$$\left. + 2F_2^{(k)}(x_j)\frac{\delta(r_2-a)}{2\pi a} + \Psi_3^{(k)}(x_j)\left[\frac{\delta(r_3-a_3)}{2\pi a_3} + \frac{\delta(r_3'-a_3)}{2\pi a_3}\right]\right\} \tag{4}$$

$F_1^{(k)}(x_j)$ și $F_2^{(k)}(x_j)$, sînt funcțiile de distribuție corespunzătoare densităților lineare de sarcină, de pe suprafețele Σ_1 și Σ_2 iar $\Psi_3^{(k)}(x_j)$, cea corespunzătoare densității lineare de sarcină de pe suprafața Σ_3 sau de pe imaginea ei, densități dezvoltate sub acțiunea unei sarcini unitare, plasate în locul sursei $I_j^{(k)}$. $R_j^{(k)} = \sqrt{x_j^2 + R_j^{(k)2}}$ este distanța de la punctul de observație la sursa $I_j^{(k)}$, iar r_1, r_2, r_3 și r_3' distanțele de la punctul de observație la axele electrozilor (1), (2), (3) respectiv la axa imaginei electrodului (3). Folosind metoda de calcul dată de autor în lucrarea [30], se obține:

$$p_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi^2\lambda}\int_0^\infty \{2K_0(qR_j^{(k)}) + 2I_0(qa)[K_0(qr_1)f_1^{(k)}(q) + $$
$$+ K_0(qr_2)f_2^{(k)}(q)] + I_0(qa_3)[K_0(qr_3) + K_0(qr_3')]\psi_3^{(k)}(q)\} \times \tag{5}$$
$$\times \cos x_j q\, dq.$$

$f_1^{(k)}$, $f_2^{(k)}$ și $\psi_3^{(k)}$ sînt imaginile Fourier ale funcțiilor $F_1^{(k)}$, $F_2^{(k)}$ și $\Psi_3^{(k)}$.

În mod similar se găsește că în învelișul construcției:

$$p_j^{*(k)} = \frac{1}{2\pi^2 \lambda^*} \int_0^\infty [K_0(q a_3)\, I_0(q r_3)\, \psi_3^{*(k)} + \tag{6}$$

$$+ K_0(q r_3)\, I_0(q a_{03})\, f_3^{(k)}] \cos x_j\, q \cdot d q .$$

Funcțiile $\psi_3^{(k)}$ și $\psi_3^{*(k)}$ pot fi determinate în funcție de $f_1^{(k)}$, $f_2^{(k)}$ și $f_3^{(k)}$, aplicînd pe suprafața Σ_3 condițiile de continuitate:

$$p_j^{(k)}\Big|_{\Sigma_3} = p_j^{*(k)}\Big|_{\Sigma_3} \tag{7}$$

$$\lambda \frac{\partial p_j^{(k)}}{\partial n}\Big|_{\Sigma_3} = \lambda^* \frac{\partial p_j^{*(k)}}{\partial n}\Big|_{\Sigma_3} \tag{8}$$

Înlocuind valorile astfel obținute ale lui $\psi_3^{(k)}$ și $\psi_3^{*(k)}$ în (5) și (6) obținem:

$$p_j^{(k)} = \frac{1}{2\pi^2 \lambda} \int_0^\infty [G_0^{(k)}(R_j^{(k)}, r_3, r_3') + G_1(r_1, r_3, r_3')\, f_1^{(k)} + \tag{9}$$

$$+ G_2(r_2, r_3, r_3')\, f_2^{(k)} + G_3(r_3, r_3')\, f_3^{(k)}] \cos x_j\, q \cdot d q .$$

$$p_j^{*(k)} = \frac{1}{2\pi^2 \lambda^*} \int_0^\infty [G_0^{*(k)}(r_3) + G_1^*(r_3) f_1^{(k)} + G_2^*(r_3) f_2^{(k)} + \tag{10}$$

$$+ G_3^*(r_3)\, f_3^{(k)}] \cos x_j\, q \cdot d q .$$

Particularizînd relația (9) pentru un punct de abscisă x, de pe suprafața Σ_1 ($r_1 = a$, $r_2 = D_{12}$, $r_3 = r_3' = D_{13}$), funcțiile de poziție $G_0^{(k)}$, G_1, G_1, G_3 capătă valorile constante $L_0^{(k)}$ L_1, L_2, L_3 determinînd astfel funcția de repartiție $P_{1j}^{(k)}(x)$ a potențialului șinei (1) sub acțiunea sursei $I_j^{(k)}$. Particularizînd aceiași relație pentru un punct de abscisă x, de pe suprafața Σ_2 ($r_1 = D_{12}$, $r_2 = a$, $r_3 = r_3' = D_{23}$), $G_0^{(k)}$, G_1, G_2, G_3, capătă valorile constante $M_0^{(k)}$, M_1, M_2, M_3, care determină funcția $P_{2j}^{(k)}$.

În sfîrșit particularizînd relația (10) pentru un punct de pe suprafața Σ_{03} a metalului construcției ($r_3 = a_{03}$), funcțiile $G_0^{*(k)}$, G_1^*, G_2^*, G_3^*, capătă valorile constante $N_0^{(k)}$, N_1, N_2, N_3 obținîndu-se astfel funcția $P_{3j}^{(k)}(x)$, de repartiție a potențialului pe construcție, sub acțiunea sursei $I_j^{(k)}$.

$P_{1j}^{(k)}$, $P_{2j}^{(k)}$ și $P_{3j}^{(k)}$ sînt date de relațiile:

$$P_{1j}^{(k)}(x_j) = \frac{1}{2\pi^2\lambda}\int_0^\infty [L_0^{(k)} + L_1 f_1^{(k)} + L_2 f_2^{(k)} + L_3 f_3^{(k)}] \cos x_j q \cdot dq. \quad (11)$$

$$P_{2j}^{(k)}(x_j) = \frac{1}{2\pi^2\lambda}\int_0^\infty [M_0^{(k)} + M_1 f_1^{(k)} + M_2 f_2^{(k)} + M_3 f_3^{(k)}] \cos x_j q \cdot dq. \quad (12)$$

$$P_{3j}^{(k)}(x_j) - \frac{1}{2\pi^2\lambda^*}\int_0^\infty [N_0^{(k)} + N_1 f_1^{(k)} + N_2 f_2^{(k)} + N_3 f_3^{(k)}] \cos x_j q \cdot dq. \quad (13)$$

Pentru determinarea funcțiilor $f_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3$), ne bazăm pe observația lui Noether [19], că densitatea lineară a curentului de schimb între un electrod (i) și mediul înconjurător e dată de relația:

$$j_i(x) = \frac{1}{w_i}\frac{d^2 V_i}{dx^2} \quad (14)$$

Pe de altă parte însă $j_j^{(k)}(x_j) = F_i^{(k)}(x_j)\, I_i^{(k)}$. Ținînd seama că în general $V_{ij}^{(k)} = P_{ij}^{(k)} I_j^{(k)}$ și că $F_i^{(k)}(x_j)$ este funcție originală a funcției $f_i^{(k)}(q)$, prin aplicarea formulei lui Meslin-Fourier se obține:

$$P_{ij}^{(k)}(x) = -\frac{w_i}{\pi}\int_0^\infty \frac{f_i^{(k)}}{q^2} \cos x_j q \cdot dq. \qquad (i = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Introducînd relațiile (15) în (11), (12) și (13) se capătă un sistem de ecuații în $f_i^{(k)}$ prin a cărui rezolvare rezultă următoarele expresii explicite:

$$f_1^{(k)} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} L_0^{(k)} & L_2 & L_3 \\ M_0^{(k)} & \frac{2\pi w\lambda}{q^2} + M_2 & M_3 \\ N_0^{(k)} & N_2 & \frac{2\pi w_3\lambda^*}{q^2} + N_3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$f_2^{(k)} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{2\pi w\lambda}{q^2} + L_1 & L_0^{(k)} & L_3 \\ M_1 & M_0^{(k)} & M_3 \\ N_1 & N_0^{(k)} & \frac{2\pi w_3\lambda^*}{q^2} + N_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

$$f_3^{(k)} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{2\pi w\lambda}{q^2} & L_2 & L_0^{(k)} \\ M_1 & \frac{2\pi w\lambda}{q^2} + M_2 & M_0^{(k)} \\ N_1 & N_2 & N_0^{(k)} \end{vmatrix} \tag{18}$$

în care:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{2\pi w\lambda}{q^2} + L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & \frac{2\pi w\lambda}{q^2} + M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & \frac{2\pi w_3\lambda^*}{q^2} + N_3 \end{vmatrix} \tag{19}$$

Expresiile explicite ale lui $L_0^{(k)}$, $M_0^{(k)}$, $N_0^{(k)}$ și L_i, M_i, N_i sînt date în anexă, formulele (A1)—(A15).

4. Expresia potențialului produs de sistemul de surse

Din relațiile (15), (16), (17) și (18) se obține:

a) Potențialul șinei (1) și al șinei (2):

$$V_1(x) = -\frac{w}{\pi}\left\{\sum_{j=1}^{n} I_j^{(1)} \int_0^{\infty} \frac{f_1^{(1)}}{q^2}\cos x_j\, q\cdot d\,q + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} I_j^{(2)} \int_0^{\infty} \frac{f_1^{(2)}}{q^2}\cos x_j\, q\cdot d\,q\right\} \tag{20}$$

$$V_2(x) = -\frac{w}{\pi}\left\{\sum_{j=1}^{n} I_j^{(1)} \int_0^{\infty} \frac{f_2^{(1)}}{q^2}\cos x_j\, q\cdot d\,q. + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} I_j^{(2)} \int_0^{\infty} \frac{f_2^{(2)}}{q^2}\cos x_j\, q\cdot d\,q.\right\} \tag{21}$$

b) Potențialul unui punct de pe suprafața metalică a construcției subterane:

$$V_3(x) = = \frac{w_3}{\pi}\left\{\sum_{j=1}^{n} I_j^{(1)} \int_0^{\infty} \frac{f_3^{(1)}}{q^2}\cos x_j\, q\cdot d\,q. + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} I_j^{(2)} \int_0^{\infty} \frac{f_3^{(2)}}{q^2}\cos x_j\, q\cdot d\,q.\right\} \tag{22}$$

5. Expresia densității lineare a curentului de schimb dintre construcția subterană și sol

Ținînd seama de relația (14), rezultă ușor următoarea expresie a densității lineare a curentului de schimb dintre construcția metalică și mediul înconjurător :

$$j_3(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} I_j^{(1)} \int_0^{\infty} f_3^{(1)} \cos x_j\, q \cdot d\, q. + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} I_j^{(2)} \int_0^{\infty} f_3^{(2)} \cos x_j\, q + d\, q. \tag{23}$$

6. Formele aproximative de calcul

Dacă a, a_3, a_{03} sînt mici în comparație cu D_{12}, D_{13}, D_{23} și h în expresiile lui $L_0^{(k)}$, $M_0^{(k)}$, $N_0^{(k)}$ și L_i, M_i, N_i se pot introduce aproximațiile :

$$\begin{array}{lll} I_0(qa) \approx 1 & I_1(qa) \approx 0 & a_3/D_{13} \approx 0 \\ I_0(qa_3) \approx 1 & I_1(qa_3) \approx 0 & a_3/D_{23} \approx 0 \\ I_0(qa_{03}) \approx 1 & a_3/D_{12} \approx 0 & a_3/2h \approx 0 \end{array} \tag{24}$$

Expresiile simplificate ale coeficienților în acest caz, sînt date în anexă formulele (A—16) — (A—23).

În sfîrșit, în cazul în care construcția metalică nu este acoperită cu un înveliș cuasi-izolant ($\lambda^* \equiv \lambda$), se regăsesc pentru coeficienții $P_{ij}^{(k)}$ valori identice cu cele stabilite anterior de autor [22] prin folosirea metodei lui Gibrat.

Anexă

Expresiile explicite ale coeficienților L, M, N sînt :

$$L_0^{(1)} = 2\left\{ K_0(qa) - \frac{2}{\Delta_0} \left[K_0(q D_{13})\, I_1(qa_3) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0(qa_3)\, K_1(q D_{13}) \frac{a_3}{D_{13}} \right] K_0(q D_{13}) \right\} \tag{A 1}$$

$$L_0^{(2)} = 2\left\{ K_0(q D_{2}) - \frac{2}{\Delta_0} \left[K_0(q D_{23})\, I_1(qa_3) + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0(qa_3)\, K_1(q D_{23}) \frac{a_3}{D_{13}} \right] K_0(q D_{13}) \right\} \tag{A 2}$$

$$L_1 = 2 I_0 (qa) \left\{ K_0 (qa) - \frac{2}{\Delta_0} \left[K_0 (q D_{13}) I_1 (qa_3) + \right.\right. \tag{A 3}$$
$$\left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0 (qa_3) K_1 (q D_{13}) \frac{a_3}{D_{13}} \right] K_0 (q D_{13}) \right\}$$

$$L_2 = 2 I_0 (qa) \left\{ K_0 (q D_{12}) - \frac{2}{\Delta_0} \left[K_0 (q D_{23}) I_1 (qa_3) + \right.\right. \tag{A 4}$$
$$\left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0 (qa_3) K_1 (q D_{23}) \frac{a_3}{D_{23}} \right] K_0 (q D_{13}) \right\}$$

$$L_3 = \frac{2}{\Delta_0} \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0 (qa_{03}) \left[K_0 (qa_3) I_1 (qa_3) + I_0 (qa_3) K_1 (qa_3) \right] K_0 (q D_{13}) \tag{A 5}$$

$$M_0^{(1)} = 2 \left\{ K_0 (q D_{12}) - \frac{2}{\Delta_0} \left[K_0 (q D_{13}) I_1 (qa_3) + \right.\right. \tag{A 6}$$
$$\left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0 (qa_3) K_1 (q D_{13}) \frac{a_3}{D_{13}} \right] K_0 q D_{23}) \right\}$$

$$M_0^{(2)} = 2 \left\{ K_0 (qa) - \frac{2}{\Delta_0} \left[K_0 (q D_{23}) I_1 (qa_3) + \right.\right. \tag{A 7}$$
$$\left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0 (qa_1) K_1 (q D_{23}) \frac{a_3}{D_{23}} \right] K_0 (q D_{23}) \right\}$$

$$M_1 = 2 I_0 (qa) \left\{ K_0 (q D_{12}) - \frac{2}{\Delta_0} \left[K_0 (q D_{13}) I_1 (qa_3) + \right.\right. \tag{A 8}$$
$$\left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0 (qa_3) K_1 (q D_{13}) \frac{a_3}{D_{13}} \right] K_0 (q D_{23}) \right\}$$

$$M_2 = 2 I_0 (qa) \left\{ K_0 (qa) - \frac{2}{\Delta_0} \left[K_0 (q D_{23}) I_1 (qa_3) + \right.\right. \tag{A 9}$$
$$\left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0 (qa_3) K_1 (q D_{23}) \frac{a_3}{D_{23}} \right] K_0 (q D_{23}) \right\}$$

$$M_3 = \frac{2}{\Delta_0} \frac{\lambda}{\lambda^*} I_0 (qa_{03}) \left[K_0 (qa_3) I_1 (qa_3) + \right. \tag{A 10}$$
$$\left. + I_0 (qa_3) K_1 (qa_3) \right] K_0 (q D_{23})$$

$$N_0^{(1)} = - \frac{2}{\Delta_0} I_0 (qa_{03}) \left\{ \left[K_0 (qa_3) + K_0 (2qh) \right] K_1 (q D_{13}) \right] \frac{a_3}{D_{13}} - \tag{A 11}$$
$$\left. - \left[K_1 (qa_3) + K_1 (2qh) \frac{a_3}{2h} \right] K_0 (q D_{13}) \right\}$$

$$N_0^{(2)} = -\frac{2}{\Delta_0} I_0(qa_{03}) \left\{ [K_0(qa_3) + K_0(2qh)]\, K_1(qD_{23}) \frac{a_3}{D_{23}} - \right.$$
$$\left. - \left[K_1(qa_3) + K_1(2qh) \frac{a_3}{2h} \right] K_0(qD_{23}) \right\} \quad \text{(A 12)}$$

$$N_1 = -\frac{2}{\Delta_0} I_0(qa_{03})\, I_0(qa) \left\{ [K_0(qa_3) + K_0(2qh)]\, K_1(qD_{13}) \frac{a_3}{D_{13}} - \right.$$
$$\left. - \left[K_1(qa_3) + K_1(2qh) \frac{a_3}{2h} \right] K_0(qD_{13}) \right\} \quad \text{(A 13)}$$

$$N_2 = -\frac{2}{\Delta_0} I_0(qa_{03})\, I_0(qa) \left\{ [K_0(qa_3) + K_0(2qh)]\, K_1(qD_{23}) \frac{a_3}{D_{23}} - \right.$$
$$\left. - \left[K_1(qa_3) + K_1(2qh) \frac{a_3}{2h} \right] K_0(qD_{23}) \right\} \quad \text{(A 14)}$$

$$N_3 = I_0(qa_{03}) \left\{ K_0(qa_{03}) + \frac{1}{\Delta_0} I_0(qa_{03}) \left[[K_0(qa_3) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + K_0(2qh)]\, K_1(qa_3) - \frac{\lambda}{\lambda^*} \left[K_1(qa_3) + K_1(2qh) \frac{a_3}{2h} \right] K_0(qa_3) \right] \right\} \quad \text{(A 15)}$$

$$\Delta_0 = \left[K_0(qa_3) + K_0(2qh) \right] I_1(qa_3) + \frac{\lambda}{\lambda^*} \left[K_1(qa_3) + K_1(2qh) \frac{a_3}{2h} \right] I_0(qa_3)$$

Dacă se admit aproximațiile (24) expresiile de mai sus capătă formele simplificate:

$$L_0^{(1)} = L_1 = M_0^{(2)} = M_2 = 2K_0(qa) \quad \text{(A 16)}$$

$$L_0^{(2)} = L_2 = M_0^{(1)} = M_1 = 2K_0(qD_{12}) \quad \text{(A 17)}$$

$$L_3 = M_3 = 2K_0(qD_{13}) \quad \text{(A 18)}$$

$$N_0^{(1)} = 2\frac{\lambda^*}{\lambda} K_0(qD_{13}) \quad \text{(A 19)}$$

$$N_0^{(2)} = 2\frac{\lambda^*}{\lambda} K_0(qD_{23}) \quad \text{(A 20)}$$

$$N_1 = \frac{\lambda^*}{\lambda} K_0(qD_{13}) \quad \text{(A 21)}$$

$$N_2 = \frac{\lambda^*}{\lambda} K_0(qD_{23}) \quad \text{(A 22)}$$

$$N_3 = K_0(qa_{03}) + \left(\frac{\lambda^*}{\lambda} - 1 \right) K_0(qa_3) + K_0(2qh). \quad \text{(A 23)}$$

Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. *Ulbricht R.*, ETZ. *11* pag. 212—215 (1902).
2. *Michalke C.*, Die vagabundierende Ströme elektrischer Bahnen. Vieweg u. Sohn. (1904) Braunschweig.
3. *Michalke C.*, Arch. der Math. u. Phys. seria 3 *12* (1907) p. 51.
4. *Mc. Collum B.* și *Logan K. H.*, Techn. Paper nr. 63, 1916. Bureau of Standards of U.S.A.
5. * * * Extraits des 1-er et 2-ème Rapports de la Commission Suisse de Corrosion CMI Doc. 32—22.
6. *Lefèvre F.*, Bull. Assoc. Ing. electr. Montefiori *10* (1932) p. 33.
7. *Gibrat R.*, Rev. Gén. El. *35* (1934) nr. 7 și 8.
8. *Mihailov M. I.* și *Azbuchin P. A.*, Vozdușnie i kabelnie sviazi i ih zașcita. Partea III-a Sviazizdat (1940).
9. *Mihailov M. I., Akulionok V. N. și Marcenko A. F.*, Protecția împotriva coroziunii a cablurilor de telecomunicații interurbane. Ed. Energetică de Stat Buc. 1955 (Traducere după ediția rusă din 1953).
10. *Korzeniowski Jos*, Przegl. telekom. nr. 1 (1956) p. 21—25.
11. *Erșov I. M.* Opredelenie opasnosti electrokorozii podzemnih kabelei. Transjeldorizdat. Moscova 1957.
12. *Lomazov D. B.*, Electricestvo Nr. 9 (1954) p. 59—63.
13. *Lortkipanidze B. G.*, Electricestvo Nr. 9 (1954) p. 64—65.
14. *Strijevschi I. V. și Tomlianovici D. R.*, Zașcita podzemnih metalliceschih truborprovod i kabelei ot korrozii. Izd. MKH R.S.F.S.R. sub redacția lui V. I. Millștein Moscova 1954.
15. * * * Trudi vsesoiuznovo sobeșciania po korrozii i zașcite metallov (Teoria i praktika protivokorrozionnoi zașcita podzemnih soorujenii). Izd. A.N.S.S.R. 1958 Moscova.
16. *Riedel H.*, ETZ — A *77* Nr. 5 (1956).
17. *Markvardt G. Gr.*, Electricestvo Nr. 6 iunie 1955 p. 59.
18. *Lichtenstein L.*, ETZ *42* Nr. 31 p. 841 (1921).
19. *Noether F.*, Wiss. Veröff. aus der Siemens-Konzern *1* Nr. 3 (1922) pag. 35—60.
20. *Noether Fr.*, Handbuch der Physik *13*, Berlin J. Springer 1928. p. 76—93.
21. *Gibrat R.*, Bul. Soc. Fr. Électr. (1934) pag. 749.
22. *Moisil Gh.*, An. Transporturilor nr. 3 (1951) pag. 161—170.
23. *Moisil Gh.*, Electrotehnica *3*, Nr. 12 (1955) p, 530—535.
24. *Sunde E. D.*, Earth conduction effects in transmission systems. Van Nostrand 1949 New-York — Toronto — London.
25. *Aronzon G. S.*, Electricestvo Nr. 9 (1954) p. 66—70.

26. *di Mario P.R.*, Ingegneria Ferroviaria *10* Nr. 12 (1955) p. 903—916.
27. *di Mario P.R.*, Ingegneria ferroviaria *14* Nr. 6 (1959) p. 257—539.
28. *Razumov L. D.*, Electricestvo Nr. 9 (1956) pag. 67.
29. *Ivanenko D. și Sokolov A.*, Teoria clasică a cîmpului Ed. tehnică 1955 București (traducere din limba rusă).
30. *Moisil Gh.*, Bull. Inst. pol. Buc. *24* Nr. 4 p. 23 (1962).

РАСЧЁТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ЗЕМЛЕ ЗА СЧЁТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ТЯГИ

(Краткое содержание)

Производится расчёт электрического потенциала, созданного электрической тягой (рис. 1) в земле поблизости от подземного сооружения с покрытем по репьсам, предусматриваемым с отсасывающим кабелем, перемещается большое число поездов с данными скоростями.

Потенциалы рельсов и сооружения выражены формулами (20), (21), (22), а линейная плотность тока, проходящего от сооружения в землю, — (23).

Функции $f_i^{(k)}$ даны формулами (16), (17), (18), а коэффициенты L, M, N — ($A1 - A15$) в приложении.

Приближённые выражения этих коэффициентов также даны в приложении ($A16 — A23$).

THE CALCULUS OF THE ELECTRICAL POTENTIAL PRODUCED BY THE TWO RAILS OF AN ELECTRICAL RAILWAY

(Summary)

The calculation has been made of the electrical potential produced by the two rails of an electrical railway situated in the vicinity of a metallic buried structure coated with insulating materials.

On these rails, provided with negative feeders, travel many trains, with definit velocities.

The potential of the rails and of the structure is given by (20), (21), (22), while the density of the curent leaked from the structure is given by (23). Functions $f_i^{(k)}$ are determined by (16) (17) (18).

Rigourus and approximatl expressions for L, M, N are intabulated in the appendix (formulas $A1—A15$) and ($A16—A23$) respectively).

LE CALCUL DU POTENTIEL ÉLECTRIQUE PRODUIT PAR UNE VOIE DE TRACTION ÉLECTRIQUE

(Résumé)

On calcule le potentiel électrique produit par une voie de traction électrique posée près d'une structure souterraine, protéjée par une gaine quasi-isolante. Sur les rails, pourvus de conducteurs de retour, se déplacent plusieurs trains, avec des vitesses déterminées.

Le potentiel sur les rails et sur la structure est donné par les formules (20) (21) et (22), et la densité linéaire du courant qui s'enfuit de la structure, par la formule (23), les fonctions $f_i^{(k)}$ étant calculées avec les formules (16), (17) et (18). Les expressions exactes ($A1$—$A15$) ou approchées ($A16$—$A23$) de L, M et N se trouvent dans l'annexe.

BERECHNUNG DES ELEKTRISCHEN POTENTIALS, VON EINER ELEKTRISCHEN EISENBAHNLINIE IN DER ERDE ERZEUGT

(Zusammenfassung)

Das, von einer elektrischen Eisenbahnlinie, an einer unterirdischen umhüllten Rohr — oder — Kabelleitung erzeugte Potential, wird errechnet.

Auf den Schienen, die auch Rückkabelleitungen besitzen, fahren Züge, mit bestimmten Geschwindigkeiten. Die Formeln (20), (21), (22) drücken das Potential an den Schienen bzw. an der Leitung aus. Im Anhang findet man die genauen Formeln ($A1$—$A15$), und ebenso die Annäherungsformeln ($A16$—$A23$) mit welchen Koeffizienten L, M, N berechnet werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

STUDIUL CONDIȚIILOR DE BRICHETARE A LIGNIȚILOR ROMÎNEȘTI *)

I. BLUM, Fr. BARCA și E. CERNICA

Influența punctului de înmuiere al liantului asupra caracteristicilor brichetelor obținute din lignitul de Rovinari

Această notă completează lucrările privind inobilarea ligniților romînești prin brichetare, abordînd una din problemele principale, problema liantului, ce constituie o preocupare actuală atît pentru țara noastră cît și pentru alte țări (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Ea își propune să studieze variația calității brichetelor obținute din lignitul de Rovinari cu bitum petrolier parafinos, înainte și după tratament termochimic oxidativ, în funcție de procentul de liant și de punctul de înmuiere al liantului.

Bitumul petrolier parafinos a fost ales datorită susceptibilității sale mai mari de îmbunătățire a calității brichetelor confecționate prin post tratament termochimic, cum s-a arătat în lucrările noastre anterioare (4).

Caracteristicile chimico-tehnice ale lignitului de Rovinari sînt prezentate în tabela Nr. 1.

În vederea brichetării lignitul de Rovinari a fost uscat pînă la umiditatea de 10% și măcinat într-o moară cu discuri. El a fost utilizat cu rețeta granulometrică prezentată în tabela 2.

Drept lianți s-au folosit pentru brichetarea lignitului astfel preparat, bitumuri petroliere parafinoase, preparate de noi, ale căror caracteristici sînt prezentate în tabela 3.

a — Influența punctului de înmuiere și a procentului de liant asupra calității brichetelor crude, obținute din lignitul de Rovinari.

Materiile prime a căror caracteristici au fost prezentate, au servit la efectuarea de brichete, de 30—100 g greutate, în condiții de laborator (presiune 300 kg/cm^2), brichete ce au fost folosite pentru urmărirea influenței punctului de înmuiere al liantului și a cantității de liant asupra calității lor.

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București — 7-8 Aprilie 1962.

Tabela Nr. 1

Caracteristicele chimico-tehnice ale cărbunelui utilizat

Nr. crt.	Specificație	Analiza tehnică								
		Raportată la proba de analiză			Raportată la masa anhidră				Raportată la masa combustibilă	
		Umiditate	Cenușă	Materii volatile	Putere calorică	Cenușă	Materii volatile	Putere calorică	Materii volatile	Putere calorică
		W^a	A^a	V^a	Q^a	A^{anh}	V^{anh}	Q^{anh}	V^{mc}	Q^{mc}
		%	%	%	kcal/kg	%	%	kcal/kg	%	kcal, kg
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	Lignit de Rovinari	36,17	23,26	23,75	2.207	36,60	37,30	3455	58,54	5385

Tabela 2

Analiza granulometrică a lignitului de Rovinari

Fracțiunea granulometrică	Cantitatea	
	Simplu	Cumulat
mm	%	%
1	2	3
0 — 0,25	9,5	9,5
0,25 — 0,05	10,5	20,0
0,50 — 1	15,0	35,0
1 — 2	22,0	57,0
2 — 5	27,0	84,0
5 — 10	16,0	100,0
Total	100,0	—

Tabela 3

Caracteristicile lianților utilizați

Nr. crt.	Specificație	Simbol	Unități	Valori				
				Bitum 1	Bitum 2	Bitum 3	Bitum 4	Bitum 5
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Umiditate	W^a	%	0,70	0,80	0,50	0,40	0,60
2	Cenușă	A^a	%	0,40	0,60	0,70	0,80	0,80
3	Materii volatile	V^a	%	92,50	90,10	88,40	86,00	83,00
4	Carbon liber	C_l	%	0,52	0,73	0,87	0,85	0,96
5	Punct de înmuiere	t_{IB}	°C	35,50	54,90	67,20	75,40	89,50

Calitatea brichetelor crude a fost apreciată prin:

— variația rezistenței la încovoiere a brichetelor din cărbunii de Rovinari, în raport cu punctul de înmuiere și cantitatea de liant — rezultate prezentate în diagrama 1 —

— variația îmbibației cu apă a acelorași brichete crude, funcție de parametrii menționați mai sus — rezultate prezentate în diagrama 2 —

Brichetelor cu rezistență la încovoiere peste 12 kg/cm² li s-a cercetat și comportarea în foc. Lucrările au arătat că această comportare este acceptabilă și permite o utilizare mulțumitoare a lor.

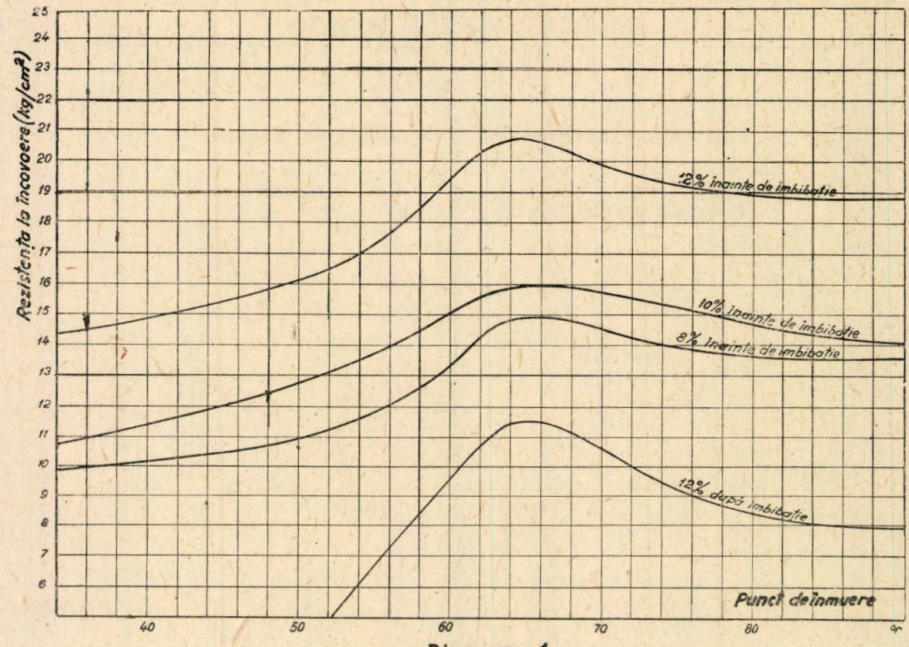


Diagrama 1

Variația rezistenței la încovoiere în funcție de punctul de înmuiere și procentul de liant pentru brichete crude.

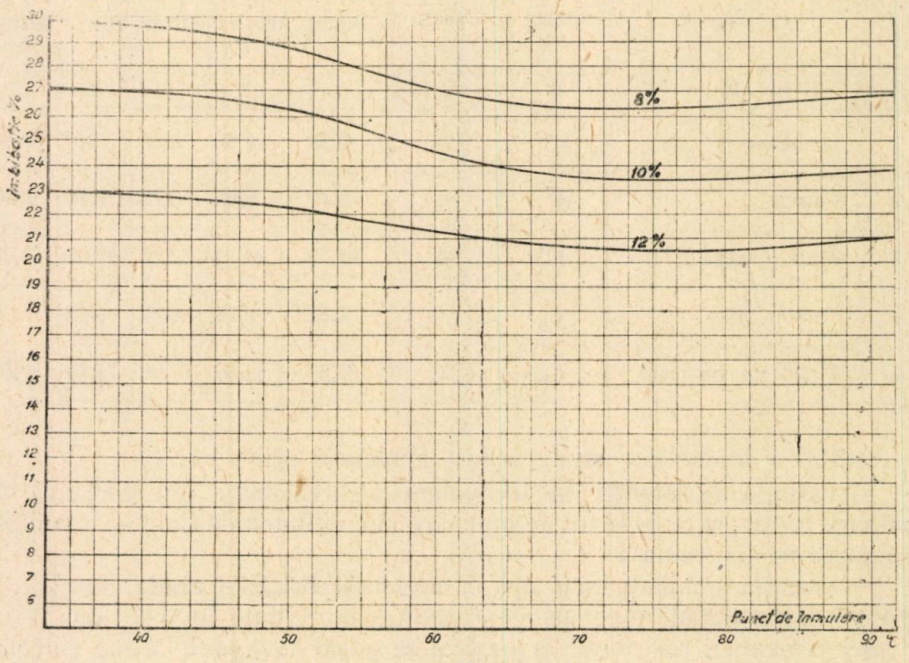


Diagrama 2

Variația îmbibației cu apă a brichetelor crude în funcție de procentul de liant și punctul de înmuiere.

Din cercetarea graficelor pentru brichetele crude rezultă că :

— oricare ar fi procentul de liant există un optim pentru punctul de înmuiere al liantului situat în intervalul 60—70°C, înaintea căruia și după care rezistența mecanică a brichetelor scade.

— creșterea procentului de liant aduce o îmbunătățire a rezistenței la încovoiere a brichetelor crude.

— îmbibația în apă a acelorași brichete scade cu creșterea punctului de îmuiere al liantului pînă la un punct de înmuiere de 60—70°C. Utilizînd lianți cu puncte de înmuiere mai coborîte, îmbibația cu apă crește.

— rezistența la încovoiere a brichetelor crude efectuată după îmbibația cu apă este sub limitele acceptabile în cazul folosirii a 8—10% liant și destul de scăzută chiar cînd se folosește 12% liant.

Calitatea destul de limitată a brichetelor obținute din cărbunii de Rovinari folosind între 8—12% liant, indică necesitatea îmbunătățirii lor prin utiiizarea unor cantități mai mari de liant. Pentru o bună comportare în foc se impune însă și un postratament termochimic oxidativ de finisaj.

b — Influența punctului de înmuiere al liantului și a procentului de liant asupra calității brichetelor obținute din cărbunii de Rovinari, finisate prin postratament termochimic oxidativ.

Problema îmbunătățirii calității brichetelor prin postratament termochimic oxidativ, în atmosferă de gaze arse, problemă de care se preocupă literatura de specialitate (3, 4) și de care ne-am ocupat și noi, necesită a fi extinsă și asupra brichetelor de lignit crud în scopul obținerii unor combustibili de calitate.

De aceea, în acest studiu în continuarea unor cercetări anterioare, brichetele obținute din lignit de Rovinari și bitum industrial parafinos, au fost supuse unui postratament termochimic oxidativ, în laborator, cu gaze arse rezultate din arderea gazului metan și diluate cu aer, într-o instalație adecvată construită special pentru acest scop.

Anlazia gazelor arse a arătat un conținut de : 2,6% CO_2 și 7% O_2. Durata tratamentului a fost de 2—4 ore la temperaturi de 240—280°C.

Calitatea brichetelor finisate prin postratament termochimic oxidativ a fost apreciată prin :

— variația rezistenței la încovoiere, înainte și după îmbibație cu apă, a brichetelor obținute din lignit de Rovinari în raport cu procentul de liant și cu punctul de înmuiere al liantului — prezentată în diagramele 3, 4, și 5. —

— variația comportării la îmbibația cu apă — prezentată în graficele 6, 7 și 8. —

Comportarea în foc s-a urmărit la toate brichetele cărora li s-a aplicat acest postratament termochimic oxidativ.

Din cercetarea rezultatelor și a graficelor rezultă următoarele :

— postratamentul termochimic oxidativ aplicat brichetelor de lignit are ca efect o îmbunătățire simțitoare a calității brichetelor (rezistență la încovoiere, înainte și după îmbibație cu apă, absorbția de apă, etc.).

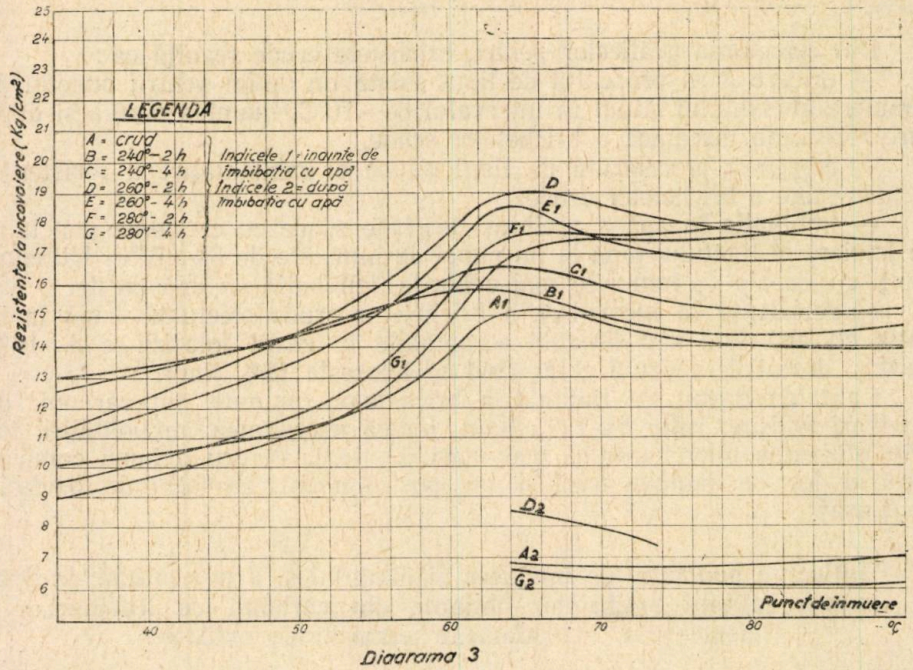


Diagrama 3

Variaţia rezistenţei la încovoiere înainte şi după imbibaţie a brichetelor crude şi oxidate obţinute în diverse condiţii din cărbuni de Rovinari cu 8% liant.

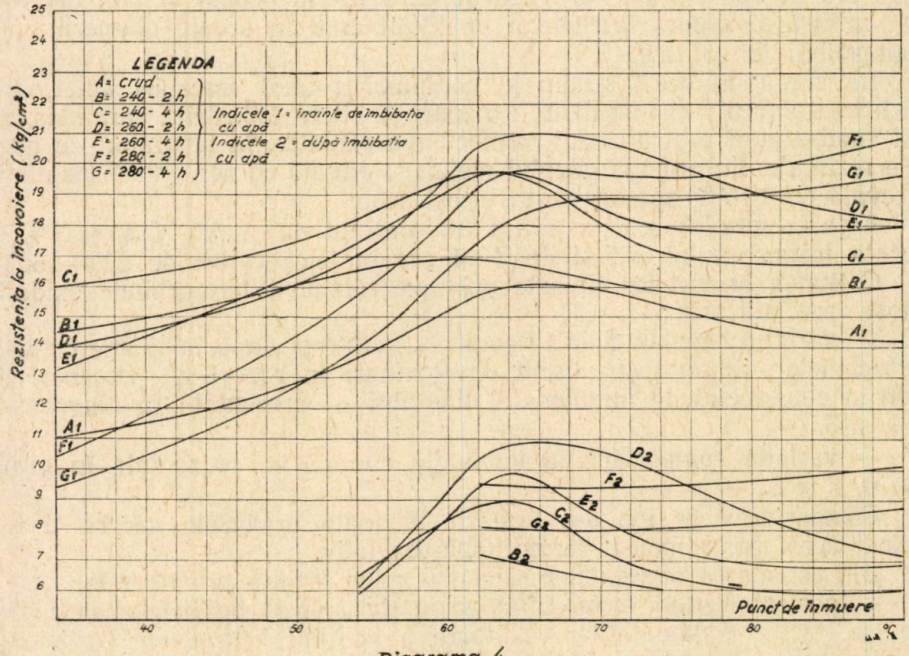


Diagrama 4

Variaţia rezistenţei la încovoiere înainte şi după îmbibaţie a brichetelor crude şi oxidate obţinute în diverse condiţii din cărbuni de Rovinari cu 10% liant.

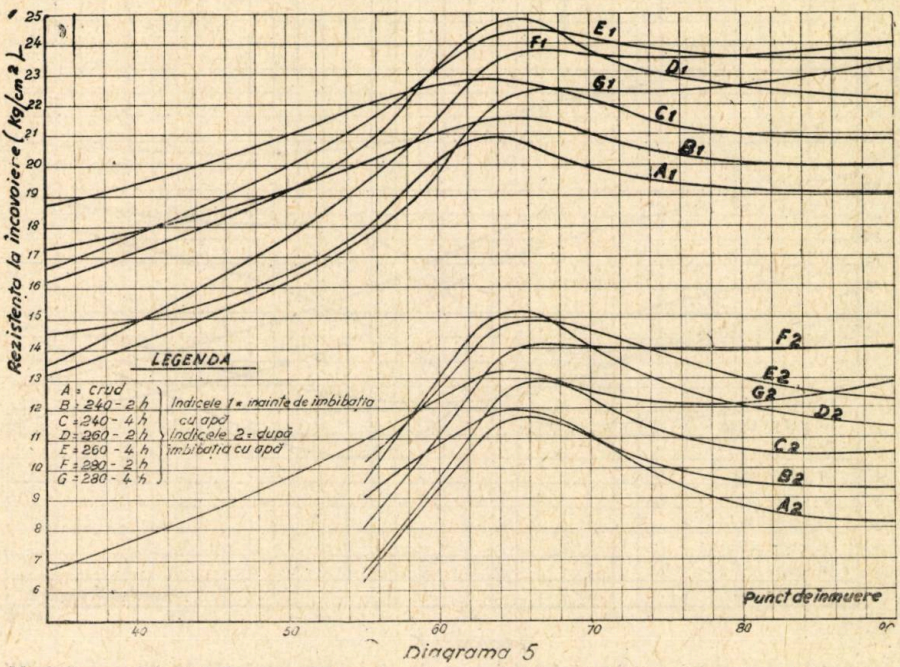


Diagrama 5

Variația rezistenței la încovoiere înainte și după îmbibația cu apă a brichetelor crude și oxidate obținute în diverse condiții din cărbuni de Rovinari cu 12% liant.

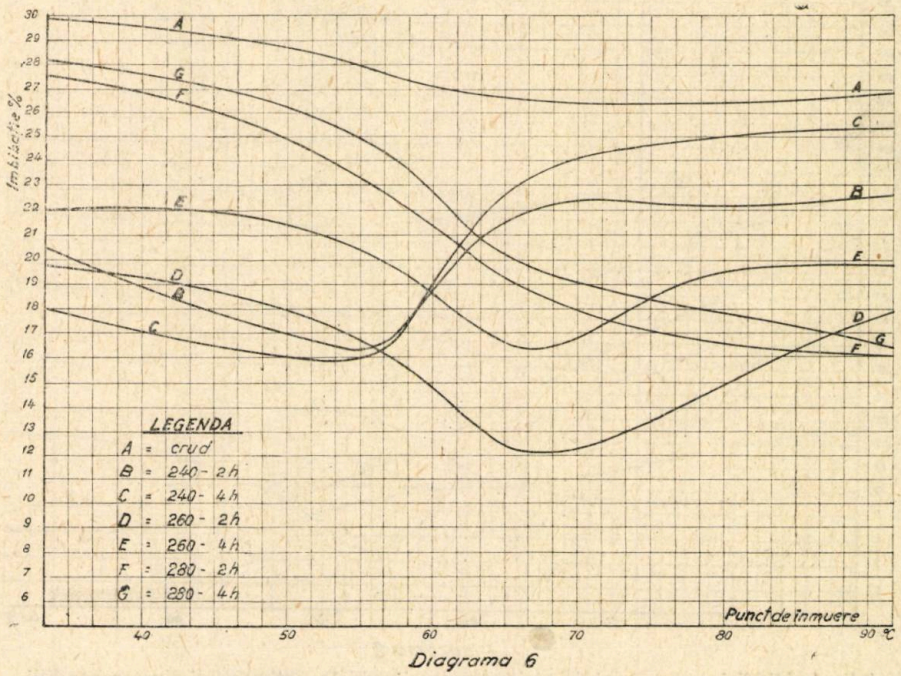


Diagrama 6

Variația îmbibației cu apă a brichetelor crude și oxidate obținute în diverse condiții din cărbuni de Rovinari cu 8% liant.

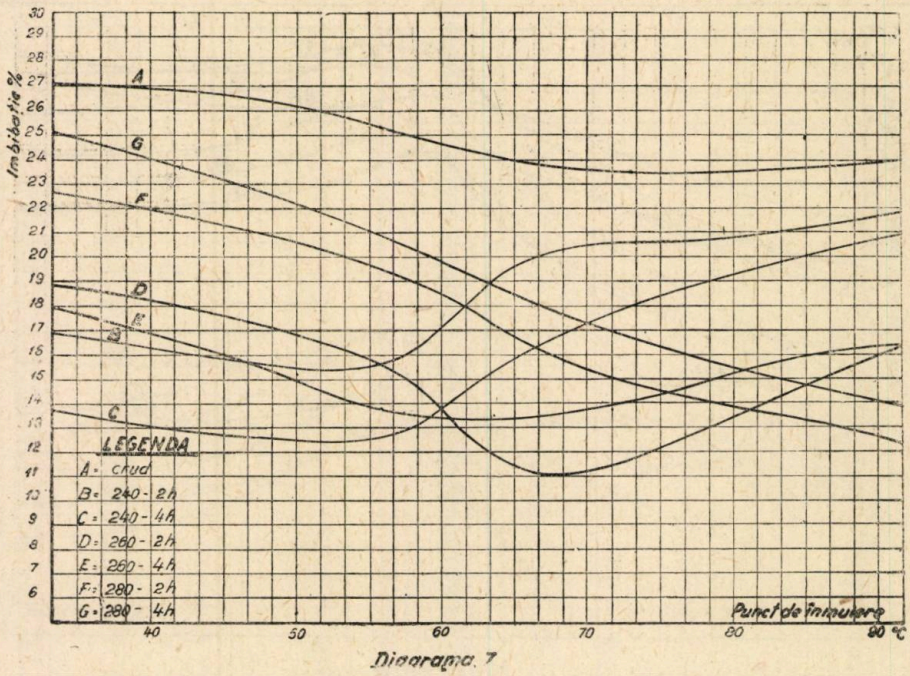


Diagrama 7

Variația îmbibației cu apă a brichetelor crude și oxidate obținute în diverse condiții din cărbunii de Rovinari cu 10% liant.

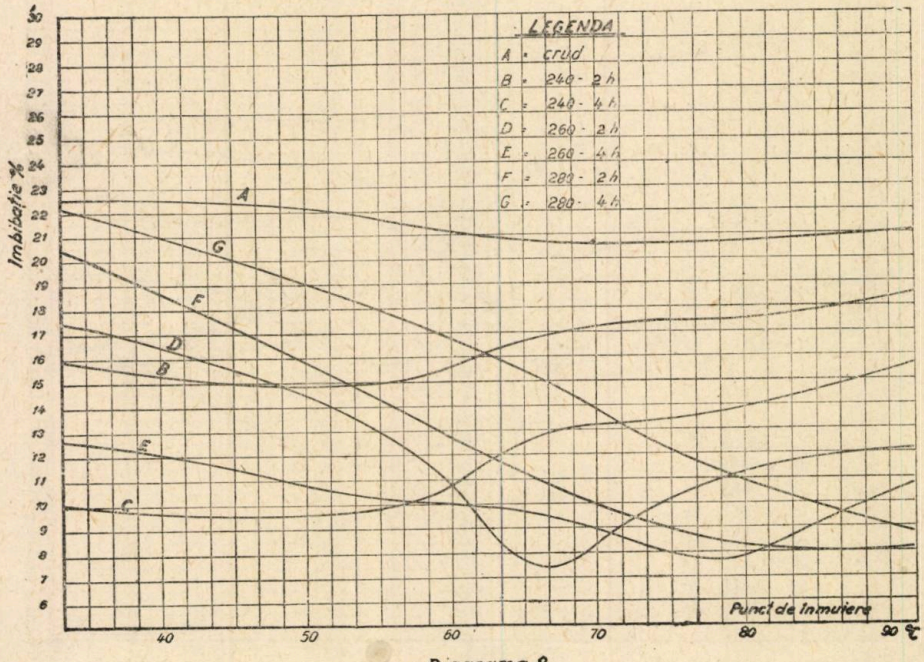


Diagrama 8

Variația îmbibației cu apă a brichetelor crude și oxidate obținute în diverse condiții din cărbuni de Rovinari cu 12% liant.

— temperatura indicată pentru acest tratament este variabilă între 240°—280°, fiind mai favorabil lucrul la temperaturi mai mici în cazul folosirii bitumului cu punct de înmuiere mai scăzut și la temperaturi mai mari în cazul bitumului cu punct de înmuiere mai ridicat.

— durata tratamentului variază între 2 și 4 ore, timpul mai lung fiind mai ridicat pentru bitumul cu punct de înmuiere mai scăzut, iar timpul mai scurt pentru bitumul cu punct de înmuiere mai ridicat.

— punctul de înmuiere al liantului de 60—70°C apare ca favorabil în toate cazurile.

Concluzii.

1. În brichetarea ligniților, folosirea bitumurilor parafinoase cu punctele de înmuiere 60—70°C s-a dovedit indicată.

2. Procentul de liant de 12% — în cazul bitumului petrolier parafinos — se soldează cu brichete crude, acceptabile la limita inferioară a cerințelor de rezistență mecanică. Ele prezintă un moment critic de înmuiere în foc, datorită liantului bituminos.

3. Este posibilă îmbunătățirea calității brichetelor de lignit, a rezistenței lor mecanice, fie prin utilizarea unor cantități mai mari de liant, fie prin tratament termochimic ulterior. Postratamentul termochimic oxidativ aduce o îmbunătățire a comportării la foc. Deci postratamentul termochimic oxidativ constitue o cale de ameliorare a calității brichetelor.

4. Și în cazul postratamentului termochimic este indicat ca punctul de înmuiere al liantului să fie cuprins între 60—70°C; tempeartură. Durata postratamentului necesar pentru obținerea unor brichete bune variază în funcție de punctul de înmuiere al liantului și cantitatea de liant.

5. Degazarea prealabilă parțială sau totală a cărbunelui va permite obținerea unor brichete avînd canitatea dorită de materii volatile, în raport cu obiectivul de utilizare.

Catedra de tehnologie chimică organică și combustibili

BIBLIOGRAFIE

1. *Reering W. M. Goecke F.* — Brikettpeche unde ihre Bedeutung fur den Brikettierungsvorgang „Glueckauf", 1935.
2. *Ionescu M., Floarea O.* — Cîteva aspecte ale brichetării ligniților. Rev. Minelor ASIT 11/1957, pag. 532—537.
3. *Zielinski H.* — Prace Instytutu Chemiznej Przerobki Wegla nad otrzymyaniem Koksu metalurgicznego z Wegli niekoksujacych, Koks — Smola — Gaz, (1957), nr. 6—285.
4. *Blum I.* și *Nistor I.* — Cocs-brichete din cărbuni neaglutinanți sau slab aglutinanți prin tratament termochimic I — Cercetări în fază de laborator — Studii și cerctări de Energetică 2/1961 — pag. 307—409 Buc.

5. *Blum I., Rosemberg M.* — Aanalyse der tehnischer Verarbeitungsmöglichkeiter der rumänischen holzigen Braunkohlen. Weltkraftkonferenz, Beograd 1957, Abteilung B. 2 Bericht 29.

6. *Blum I.* şi *Rosenberg M.* — Cu privire la unele aspecte tehnico-economice ale prelucrării şi valorificării cărbunilor bruni lemnoşi din R.P.R. — V. Brichetarea cu liant a ligniţilor. Rev. Minelor ASIT nr. 11/1959, pag. 525—531.

7. *Blum I. şi colaboratorii.* — Studiul posibilităţilor de valorificare a mixtelor de cărbuni din Valea Jiului Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti 3/1959, pag. 121—137.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ БРИКЕТИРОВАНИЯ РУМЫНСКИХ ЛИГНИТОВ

Влияние точки размягчения связующего вещества на характеристики брикетов полученных из лигнитов из Ровинари

(Резюме)

Настоящее сообщение дополняет цикл работ относящихся к установлению оптимальных условий брикетирования лигнитов.

В работе указывается новый метод улучшения качества лигнитных брикетов последующей окислительной термообработкой, этот метод представляет особый интерес для промышленности переработки и комплексного энерго-химического использования лигнитов.

Быявляется влияние количества и качества связующего вещества на характеристики брикетов, полученных до и после окислительной термообработки.

Выявляются также новые возможности получения высококачественных брикетов из лигнита, которые могли бы заменить высококачественное горючее и в особенности древесину во многих областях применения, используя важные рессурсы нашей страны.

A STUDY ON THE CONDITIONS FOR MANUFACTURING BRIQUETTES OF ROUMANIAN LIGNITES

Influence of the softening point of the binder on the characteristics of briquettes made of Rovinari lignite.

(Summary)

This note completes the account on a working cycle intended to determine optimal conditions for making briquettes of lignites.

A new method is shown for improving the quality of lignite-briquettes by an additional oxydative thermo-chemical treatment. The method is of

great interest for the complex energo-chemical transformation and a profitable turning lignites to account.

An accent is put on the influence of the quality and quantity of the binder on the characteristics of the briquettes before and after the additional oxydative thermo-chemical treatment.

New aspects are made evident on producing briquettes of a good quality that could replace high class fuels and special wood in many fields of use, thus making possible a lucrative turning to account of these important riches of our country.

ETUDES DES CONDITIONS DE BRIQUETTAGE DES LIGNITES ROUMAINS

L'influence du point d'amollissement du liant sur les caractéristiques des briquettes fabriquées avec le lignite de Rovinari.

(Résumé)

La présente note complète un cycle de travaux sur la détermination des conditions optimales pour la confection des briquettes de lignites.

Une nouvelle méthode est indiquée d'améliorer la qualité des briquettes de lignite par un post-traitement thermo-chimique oxydatif, méthode d'un intérêt particulier pour l'industrie de transformation et pour la mise en valeur complexe énergo-chimique des lignites.

L'influence de la qualité et de la quantité du liant sur les caractéristiques des briquettes obtenues, avant et après le traitement thermo-chimique oxydatif, est mise en évidence.

Des aspects nouveaux sont mis en évidence sur les possibilités d'obtenir des briquettes de qualité susceptibles de remplacer des combustibles supérieurs et notamment du bois à brûler dans bien des domaines d'utilisation, et permenttant de mettre en valeur très efficacement cette importante source de richesse de notre pays.

UNTERSUCHUNG DER VORBEDINGUNGEN FÜR DIE HERSTELLUNG VON BRIKETTEN AUS RUMÄNISCHEN LIGNITEN.

Einfluss des Erweichungspunktes des Bindemittels auf die Eigenschaften der Press kohlen aus Rovinai Lignit

(Zusammenfassung)

Vorliegende Notiz ergänzt den Zyklus von Arbeiten für die Bestimmung der Bedingungen für die Herstellung von Briketten aus Ligniten.

Eine neue Methode wird gezeigt für die Verbesserung der Qualität dieser Brikette durch eine oxydative thermo-chemische Nachbehandlung.

Die Methode ist von besonderem Interesse für die Industrie für die komplexe Verarbeitung und Verwertung der Lignite.

Der Einfluss der Qualität und der Quantität des Bindemittels auf die Eigenschaften der Brikette vor und nach der oxydativen thermo-chemischen Nachbehandlung wird hervorgehoben.

Neue Ausblicke werden eröffnet im Hinblick auf die Möglichkeit, Qualitätsbriketten herzustellen, die hochwertige Brennstoffe und besonders das Brennholz auf vielen Verwendungsgebieten ersetzen und dadurch eine nutzbringende Verwendung dieser wichtigen Bodenschätze Rumäniens ermöglichen könnten.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

PROPRIETĂȚILE SEMICONDUCTOARE ALE UNOR STICLE DIN SISTEMUL V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3. *)

PETRU BALTĂ și VALERIU VELEA

Semiconductorii oxidici vitroși au fost descoperiți și studiați în decursul ultimilor zece ani (1—5). În aceste materiale se îmbină proprietățile stării vitroase cu cele ale semiconductorilor și de aceea ele prezintă un deosebit interes teoretic și practic.

Din punct de vedere teoretic studiul lor poate contribui cu elemente noi la cunoașterea structurii sticlelor și de asemenea aduce în discuție un mecanism interesant de conducție a curentului electric în materia cu un grad redus de ordonare. (6).

Din punct de vedere practic producerea industrială a semiconductorilor vitroși ar beneficia de o tehnologie simplă și de condiții mai puțin rigide în ceea ce privește puritatea materiilor prime.

Sticlele semiconductoare se obțin prin procedee tehnologice clasice (1, 5, 8) și au drept component de bază unul din oxizii : V_2O_5, WO_3, MoO_3. Conductivitatea cea mai ridicată se obține la sticlele cu V_2O_5, dintre care cele mai studiate sînt sticlele din sistemul binar V_2O_5—P_2O_5.

În conducerea curentului electric un rol important îl are pentoxidul de vanadiu. Se consideră că purtătorii de curent apar ca urmare a prezenței unor ioni de vanadiu cu valență diferită de cea a majorității (7, 8). Conductivitatea este atribuită atît electronilor cît și lacunelor, predominînd în majoritatea cazurilor conductivitatea electronică.

Ținînd seama de interesul pe care-l prezintă aceste noi materiale semiconductoare, la laboratorul de tehnologia sticlei din Inst. Politehnic București a fost inițiat studiul sistematic al sticlelor oxidice semiconductoare.

În această lucrare se prezintă proprietățile semiconductoare ale sticlelor din sistemul ternar V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3, în domeniul compozițiilor cu peste 60% V_2O_5. Limitarea domeniului studiat s-a făcut pe baza proprietăților electrice, oprindu-ne la compoziții cu rezistențe de ordinul megohmilor.

---

*) Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic București, 7—8 aprilie 1962.

Metoda de lucru. Drept materii prime au fost utilizaţi oxizi de calitate p.a. Amestecurile au fost topite în creuzete de porţelan la temperatura de 800°C într-un cuptor electric cu rezistenţă, durata menţinerii în cuptor fiind de 15—20 minute. Din sticla topită au fost confecţionaţi cilindrii de 0,8 cm diametru şi circa 1 cm lungime, prin turnare în forme metalice. Probele au fost tratate termic la 200—300°C timp de 15—20

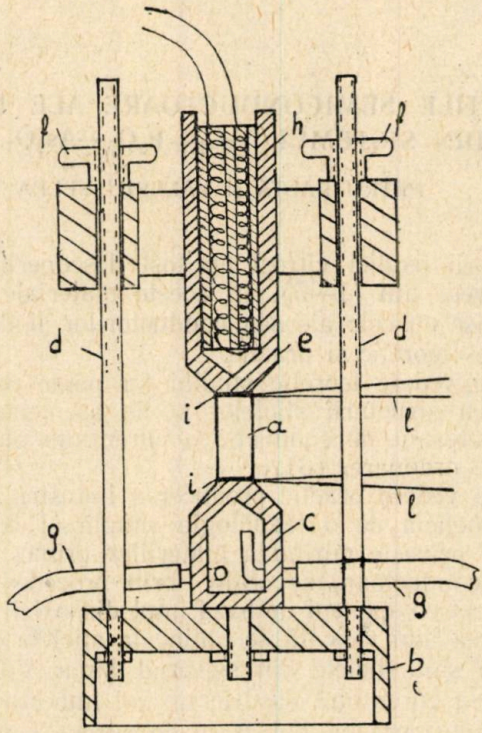


Fig. 1

minute şi apoi au fost şlefuite la ambele capete. Pe suprafeţele şlefuite s-a aplicat un strat de grafit pentru a asigura contacte electrice bune. Rezistenţa electrică a sticlelor a fost măsurată cu ajutorul unei punţi electronice de tip RFT-221, legătura la borne făcîndu-se prin fixarea probei între contactele unui dispozitiv special (9).

Forţa termoelectromotoare diferenţială a fost măsurată cu ajutorul unui potenţiometru cu compensaţie.

Proba (a) este montată în dispozitivul schiţat în figura 1. Acesta este compus dintr-un postament din textolit (b), pe care este fixată piesa (c) (contactul rece), şi, prin intermediul a două tije filetate parţial (d), piesa (e) (contactul cald), care poate fi ridicată sau coborîtă pe probă. Presiunea necesară asigurării unor contacte electrice bune se realizează cu ajutorul piuliţelor (f). Piesele (c) şi (e) sînt confecţio-

nate din cilindrii de cupru cu diametrul de circa 20 mm. În interiorul piesei (c) se trimete prin tuburile de cauciuc (g) apă dintr-un termostat a cărui temperatură nu variază cu mai mult de $\pm 0{,}1°C$ în jurul temperaturii alese. Piesa (e) este încălzită cu ajutorul unei rezistsențe de cromnichel introdusă în corpul ceramic (h). Rezistența este alimentată cu curent alternativ stabilizat cu ajutorul unui stabilizator ferorezonant, iar temperatura contactului cald se reglează cu ajutorul unui reostat introdus în circuitul rezistenței. Suprafețele de contact (i) sînt acoperite cu un aliaj de Pb și Sn care, după cum se știe, au potențialele de contact practic nule. Temperatura celor două extremități ale probei se măsoară cu termocuplele cupru-constantan (1) ale căror suduri se află chiar pe suprafețele de contact. Sudurile „reci" ale termocuplelor sînt introduse într-un recipient de sticlă aflat în termostatul care alimentează cu apă piesa (c). Ca aparat de măsură a temperaturii se folosește un galvanometru cu spot luminos. Pentru măsurarea FTEM se folosesc drept conductori ramurile de cupru ale celor două termocuple.

Instalația descrisă permite măsurarea, la o diferență de temperatură de circa 50°C, o forță termoelectromotoare de circa 0,5 m V/°C, cu o precizie de $\pm 2\%$. Această limită este determinată de sensibilitatea potențiometrului cu compensație.

Metoda de lucru folosită ne-a permis să obținem o bună reproductibilitate a proprietăților măsurate, abaterile nedepășind $\pm 5\%$ și fiind deobicei sub $\pm 2{,}5\%$.

Partea experimentală

a) *Sticlele semiconductoare din sistemul* V_2O_5—P_2O_5.

În acest sistem binar de bază au fost studiate compozițiile bogate în V_2O_5 pînă la un conținut de 25% P_2O_5. Este de remarcat că în condițiile de lucru arătate mai sus nu au putut fi obținute sub formă de sticlă decît compozițiile cu cel puțin 7,5% P_2O_5. Pentoxidul de vanadiu topit cristalizează foarte repede la răcire, sub formă de cristale aciculare orientate spre interiorul formei de turnare. Probele cristalizate au fost studiate în același mod ca și cele vitroase.

Variația rezistivității și a energiei de activare cu compoziția sînt redate în figura 2. La compozițiile bogate în V_2O_5 care au cristalizat la răcire, cu creșterea procentului de P_2O_5 are loc creșterea rezistivității și a energiei activare. În cazul compozițiilor mai sărace în V_2O_5, obținute sub formă de sticlă, curba variației rezistivității cu compoziția prezintă o inflexiune la 15% P_2O_5. Pînă la această compoziție rezistivitatea variază puțin fiind practic constantă, iar apoi crește, pe măsură ce crește conținutul în P_2O_5.

Curba energiei de activare prezintă de asemenea o discontinuitate vizibilă la trecerea de la probele cristalizate la cele vitroase. Energia de activare crește pe măsură ce scade conținutul în V_2O_5 pînă la circa 85%, cînd curba prezintă o inflexiune. Mai departe în domeniul studiat de noi

energia de activare scade uşor odată cu scăderea conţinutului în V_2O_5. Alura curbei de variaţie a energiei de activare cu compoziţia corespunde destul de bine cu rezultatele prezentate de Nador într-o lucrare recentă (10). În aceeaşi lucrare se dă şi diagrama de echilibru termic a sistemului V_2O_5—P_2O_5, din care am reprodus *în figura 2* (linia punctată) curba

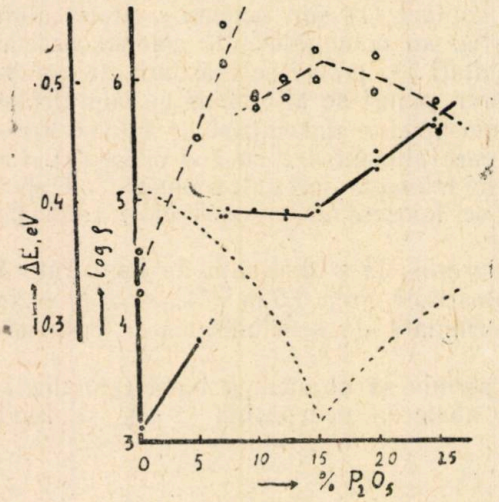


Fig. 2

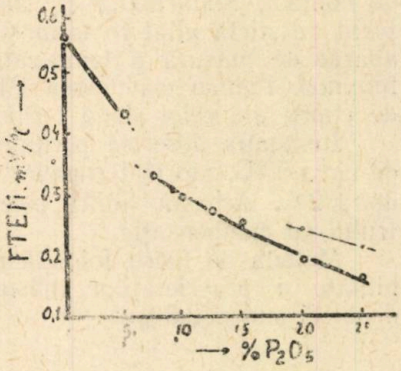


Fig. 3 ○ = Valorile iniţiale
● = după 6 luni

liquidus. Inflexiunile de pe curbele proprietăţilor corespund cu eutecticul sistemului. Un asemenea paralelism între variaţia proprietăţilor cu compoziţia şi curbele de echilibru termic a mai fost observat la sticle şi este pus în legătură cu structura intimă a sticlei (11), care variază cu compoziţia.

Forţa termoelectromotoare diferenţială scade odată cu scăderea conţinutului în V_2O_5 prezentînd de asemenea o discontinuitate la trecerea de la masele cristalizate la cele vitroase (*fig. 3*). Sensul FTEM arată că purtătorii de curent sînt electronii.

b) *Sticlele semiconductoare din sistemul* V_2O_5—As_2O_3.

Compoziţiile bogate în V_2O_5 cristalizează la răcire şi nu pot fi obţinute în stare vitroasă. Variaţia rezistivităţii şi a energiei de activare în funcţie de conţinutul de As_2O_3 sînt redate în figura 4. Se pune în evidenţă discontinuitatea curbelor la trecerea de la probele cristalizate la cele vitroase. Între variaţia celor două proprietăţi există un paralelism remarcabil. La probele vitroase atît rezistivitatea cît şi energia de activare cresc odată cu creşterea conţinutului în As_2O_5.

FTEM scade pe măsură ce creşte conţinutul în As_2O_3 (fig. 5), anulîndu-se la circa 23% As_2O_3 iar apoi devenind negativă. Aceasta indică

scăderea contribuției electronilor la conducerea curentului pînă ce, la compoziții cu peste 23% As_2O_3, devine predominantă conductivitatea lacunară.

În cursul topirii sticlelor din sistemul binar V_2O_5—As_2O_3 s-a constatat că anhidrida arsenioasă se volatilizează parțial cînd conținutul ei în sticle depășește 25%. La răcirea probelor turnate din topituri cu peste

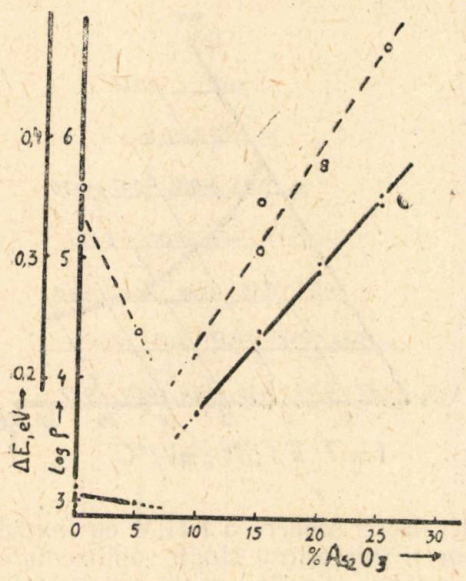


Fig. 4 ● — log ρ
○ – – Δ E

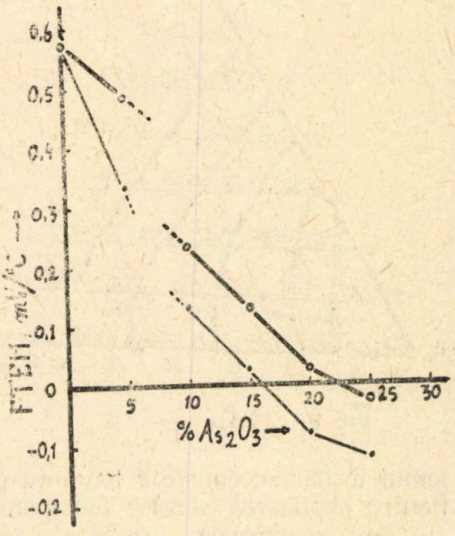


Fig. 5 ○ = valorile inițiale
● = valorile după 6 luni

25% As_2O_3 apar tensiuni interne puternice care produc desagregarea probei. Obținerea sticlelor mai bogate în anhidridă arsenioasă este legată de dificultăți greu de înlăturat în condițiile obișnuite de lucru.

c) *Sticlele semiconductoare din sistemul ternar* V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3.

Compozițiile studiate sînt indicate pe diagrama sistemului ternar, în figura 6. În vecinătatea punctelor ce indică compoziția sînt trecute valorile log ρ. Pe porțiunea studiată s-au trasat curbe de egală valoare a rezistivității.

Se constată că la același conținut de V_2O_5 sticlele cu As_2O_3 au rezistivități mai reduse decît cele cu P_2O_5. Sticlele ternare din vecinătatea medianei unghiului V_2O_5, au, la un conținut egal de pentoxid de vanadiu, rezistivități mai mici decît sticlele binare.

Rezistivitățile cresc pe măsură ce scade conținutul în V_2O_5.

Energia de activare crește în general cu scăderea conținutului de V_2O_5 în sticle.

Valorile forței termoelectromotoare diferențiale sînt indicate pe diagrama din figura 7. FTEM scade o dată cu scăderea conținutului în pen-

toxid de vanadiu. În figură se indică printr-o curbă regiunea în care FTEM este nulă, după care devine negativă.

În cursul determinărilor s-a remarcat faptul că FTEM nu este constantă în timp. În figura 3 se arată că în cazul compozițiilor cu peste 15% P_2O_5 din sistemul binar V_2O_5—P_2O_5 FTEM crește cu timpul. În sistemul binar V_2O_5—As_2O_3 (*fig. 5)* valorile FTEM scad cu timpul, în sis-

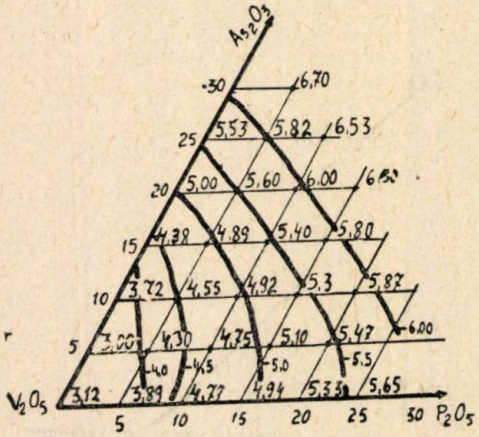


Fig. 6 log ρ_{20}

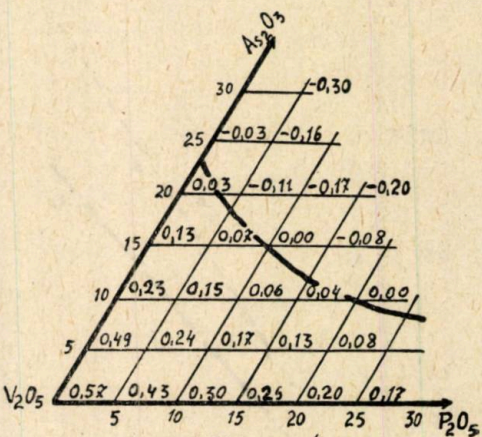


Fig. 7 FTEM, mV/°C

temul ternar se constată tendința generală de scădere a FTEM cu timpul. Pentru explicarea acestor fenomene vor fi întreprinse studii suplimentare.

Atît rezultatele prezentate cît și datele din literatură indică o dependență strînsă a conductivității și a celorlalte proprietăți semiconductoare de conținutul în pentoxid de vanadiu.

Se consideră că structurile stratificate (8, 12, 13) formate din tetraedrii de pentoxid de vanadiu au rolul cel mai important în conducerea curentului, admițîndu-se că și în cazul sticlelor semiconductoare este valabil așa numitul mecanism a lui Verwey, admis pentru explicarea conductivității semiconductorilor oxidici policristalini. Conform acestei ipoteze electronii trec de la ionii de vanadiu cu valență mai redusă (V^{4+}) la cei cu valență mai mare (V^{5+}), iar lacunele invers.

Ceilalți oxizi influențează în primul rînd ca diluanți, acțiunea lor avînd un efect asemănător asupra rezistivității ca și micșorarea secțiunii unui conductor. În sprijinul acestei ipoteze, în figura 8 se prezintă variația log ρ în funcție de log $\frac{V_2O_5}{ROx}$ Se constată că punctele corespunzătoare diferitelor compoziții se plasează în mod evident de-a lungul unei drepte. O astfel de dependență există și între rezistivitate și secțiunea unui conductor.

Dispersarea punctelor deoparte și de alta a dreptei ne arată că este vorba de o regulă foarte largă, în interiorul ei existînd variații datorită unor factori legați de natura oxizilor componenți. După cum am mai

arătat, în sistemul binar V_2O_5—P_2O_5 se manifestă în mod pregnant influența structurilor vitroase din sticlă, care variază în funcție de relațiile de echilibru termic ale sistemului. E posibil ca variația rezistivității sticlelor din interiorul sistemului ternar să se datoreze unei cauze asemănătoare. Faptul că, în general, rezistivitatea sticlelor din sistemul ternar este mai mică, la un conținut egal de pentoxid de vanadiu, decît a celor din

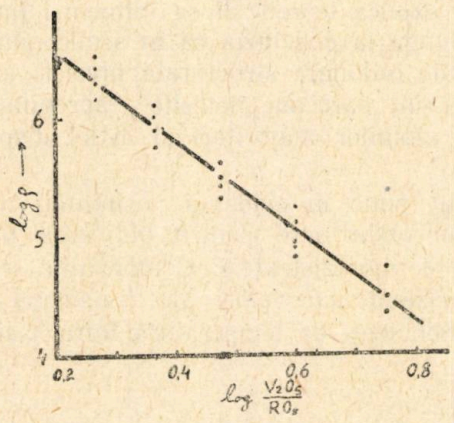


Fig. 8

sistemul V_2O_5—P_2O_5 poate fi explicat eventual prin cunoscuta proprietate a anhidridei arsenioase de a lega oxigenul din mediul înconjurător (la temperaturi sub 1200°C) care, în cazul sticlelor noastre, ar favoriza apariția ionilor de vanadiu cu valență redusă.

Modul cum variază energia de activare în funcție de compoziție este explicat în literatură (5,8) pe baza aceleași concepții asupra mecanismului conductivității. Se consideră că pe măsură ce scade conținutul în pentoxid de vanadiu, ionii străini înconjurători împiedică din în ce mai mult deplasarea purtătorilor de curent.

O particularitate a semiconductorilor vitroși, în general, care se regăsește și la cei oxidici vitroși, este inexistența influenței impurităților. După cum se știe, influența nivelelor energetice introduse de impurități se manifestă la semiconductorii cristalini printr-o variație bruscă a conductivității și prin apariția unor inflexiuni pe curba $\log \rho = f\left(\frac{10^3}{T}\right)$. Niciuna din aceste manifestări nu apare la semiconductorii vitroși.

În scazul semiconductorilor vitroși studiați, determinările făcute pînă aproape de temperatura de înmuiere nu au pus în evidență nici o inflexiune care să indice o conductivitate de impurități. Au fost deasemenea sintetizate sticle binare cu adause mici din al treilea component (0,5—2,5%). Valorile rezistivității măsurate se încadrează perfect pe curbele obținute anterior pentru variații mai mari ale compoziției. Rezul-

tatele acestor determinări ne permit să confirmăm datele din literatură care atestă lipsa influenței oxizilor străini introduși în proporție de impuritate.

Se consideră (5) că posibilitatea apariției formațiunilor structurale corespunzătoare donorilor și acceptorilor este cu atît mai mică cu cît structura este mai depărtată de cea cristalină, așa încît în sticle nu acționează mecanismul conductivității prin impurități. Gubanov (14) a făcut unele încercări de a explica teoretic lipsa influenței impurităților pe baza teoriei zonale. El ajunge la concluzia că în semiconductorii vitroși, datorită gradului redus de ordonare structurală nivelele energetice ale donorilor și acceptorilor sînt oarecum „netezite", apropiindu-se pînă la confundare de nivelele atomilor majoritari și astfel dispărînd influența lor specifică.

Studiul prezentat pune în evidență posibilități interesante de utilizare a sticlelor semiconductoare pentru obținerea unor semiconductori industriali cum sînt termorezistențele. Compozițiile studiate permit obținerea unor termorezistențe cu valori ale rezistenței cuprinse între 10^4 și 10^6 ohmi și cu coeficienți de temperatură între 3 și 4,5—5%/°C..

Concluzii

— Au fost studiate sticlele semiconductoare din sistemele binare V_2O_5—P_2O_5, V_2O_5—As_2O_3, și din sistemul ternar V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3, în domeniul compozițiilor bogate în pentoxid de vanadiu, cu rezistențe electrice nedepășind valori de ordinul megohmilor.

— Au fost determinate: rezistivitatea, energia de activare și forța termoelectromotoare diferențială; prezentîndu-se diagrame cu variația unora din proprietăți cu compoziția sticlelor.

— Pe baza datelor din literatură privind modul de structurare a ionilor de vanadiu în sticle precum și pe baza rezultatelor obținute s-a emis ipoteza că, în primă aproximație, oxizii prezenți în sticle alături de V_2O_5, acționează ca niște diluanții avînd aceeași influență asupra rezistivității ca și reducerea secțiunii conductorului.

— Se pune în evidență existența unei interdependențe între proprietățile semiconductoare și echilibrele termice ale sistemului, indicînd influența sensibilă a structurilor vitroase existente în sticle.

— Se confirmă datele existente în literatură privind lipsa influenței impurităților asupra conductivității sticlelor semiconductoare, aducîndu-se date experimentale noi.

— Se pune în evidență posibilitatea folosirii unora din sticlelele studiate pentru fabricarea termorezistențelor.

Catedra de chimia și tehnologia materialelor

BIBLIOGRAFIE

1. P. *L. Baynton, H. Rawson, J. V. Stanworth,* Nature 104, Nr. 4—1957.
2. P. *L. Baynton, H. Rawson, J. E. Stanworth,* Journ. Electrochem, Soc t. 104, Nr. 4—1958.
3. *V. A. Ioffe, I. A. Patrina, S. V. Poberovscaia,* „Electriceskie svoistva necotorih oxidnih poluprovodnicovih stecol". In volumul „Steclo-obraznoe sostoianie „M.—L., 1960, 454.
4. *I. I. Kitaigorodskii, V. G. Karpecenco,* Steclo i Keramica, Nr. 6—1958, pag. 8.
5. L. *A. Grecianic, N. V. Petrovih, V. F. Karpecenco,* Fiz. Tverdogo Telo, Tom II, Nr. 9—1960, pag. 2131.
6. *B. T. Kolomiet,* „Poluprovodnicoviie stecla". In volumul „Stecloobraznoe sostoianie „M—L, 1960, 449.
7. *I. I. Kitaigorodskii, V. K. Frolov, Go-Cijen,* Steclo i Keramika, Nr. 12—1960, pag. 5.
8. *V. A. Ioffe, I. V. Patrina, S. V. Poberovscaia,* Fiz. Tverdogo Telo Tom. II, Nr. 4—1960, pag. 656.
9. *F. Oprea, P. Baltă,* „Cercetări experimentale asupra unor semiconductori din oxizi metalici" Bul. I.P.B., Tom. XXI, Oct.—Dec.—1959, pag. 73.
10. *B. Nador,* Steklo i Keramika, Nr. 10—1960, pag. 18.
11. *L. I. Demkina,* „Isledovanie zavisimosti svoistv stecol ot ih sostava" Moscova 1958.
12. *Iu. M. Golutvin,* „Teploti obrazovania i tipi himicescoi sviazi v neorganiceskih cristalah" Moscova 1962 pag. 24, 71.
13. *V. Tarasov,* „Novie voprosi fiziki stecla" Moscova 1959, pag. 133, 144, 145.
14. *A. I. Gubanov,* Fiz. Tverdogo Telo Tom. III Nr. 8—1961, pag. 2336.

ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СТЕКОЛ СИСТЕМЫ $V_2O_5 — P_2O_5 — As_2O_3$

(Краткое содержание)

Представляется систематическое изучение полупроводниковых свойств стекол системы $V_2O_5 — P_2O_5 — As_2O_3$ содержащие более чем 60% пятиокиси ванадия.

В диаграммах дается изменение некоторых из свойств ($\lg \rho$, ΔE, Т. Э. Д. С.) с составом.

На базе полученных результатов и литературных данных предполагается что, в первом приближении, присутствующие в стеклах, вместе с V_2O_5, окислы, действуют как разбавляющие имея то же самое влияние на удельную электропроводность как и уменьшение сечения проводника.

Выражается чувствительное влияние витроструктур стекол на полупроводниковые свойства особенно в системе $V_2O_5 — P_2O_5$

Описывается прибор примененный для измерения Т. Э. Д. С.

SEMICONDUCTING PROPERTIES OF SOME GLASSES FROM THE SYSTEM V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3

(S u m m a r y)

It presents a systematic study of the semiconducting properties (log ϱ, ΔE, T.E.M.F.) of the glasses from the system V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3, with a content of V_2O_5 over 60%.

Is describe the technique usited for determining the thermoelectromotive force.

LES PROPRIÉTÉS SEMICONDUCTRICES DES VERRES DU SYSTÈME V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3

(R é s u m é)

On présente une étude systématique des propriétés semiconductrices des verres du système V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3, ayant un contenu de plus de 60% V_2O_5.

Dans les diagrames on donne la variation des propriétés (log ϱ, ΔE, F.T.E.M.) avec la composition.

En partant des résultats obtenus et des données fournies par la littérature on émet l'hypothèse que, dans la première approximation, les oxides presénts dans les verres, à côte de V_2O_5, se comportent comme des diluants, ayant la même influence sur la resistence. On met en évidence l'influence sensible des structures vitreuses, qui existent dans les verres, sur les propriétés semiconductrices, spécialement dans le système V_2O_5—P_2O_5.

On décrit l'appareillage utilisé pour la détermination de la force thermoélectromotrice.

DIE HALBLEITENDEN EIGENSCHAFTEN EINIGER GLÄSER DES SYSTEMS V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3

(Z u s a m m e n f a s s u n g)

Es wird ein systematisches Studium der Eigenschaften von halbleitenden Gläsern des System V_2O_5—P_2O_5—As_2O_3 mit einem Inhalt von über 60% V_2O_5 vorgeführt.

Im Diagram wird die variation einiger Eigenschaften (log. ϱ, ΔE, TEMK) mit Zusammensetzung der Gläsern angegeben.

Auf Grund der erhaltenen Ergebnisse und Daten aus der Literatur, wird die Hypothese aufgestelt dass, beiläufig, die in den Gläsern neben dem V_2O_5 gefundenen Oxyde als Verdünnungstoffe arbetein und den gleichen Einfluss auf die Wierderstands-fähigkeit wie die Verringerung der Durchschnittoberfläche des Leiters haben. Man hebt den empfindlichen Einfluss der Witrostrukturen der Gläser auf die halbleitenden Eigenschaften hervor insbesondere im System V_2O_5—P_2O_5.

Es wird die Aparatur fur die Bestimmung der thermoelektromotorischen Kraft beschrieben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

REZISTENȚA MATERIALELOR

UTILIZAREA MAȘINII DE EXTRUDERE CA REOMETRU

M. RENERT, R. MARCU

Pentru caracterizarea cantitativă a comportării materialelor termoplastice în procesul de prelucrare din topitură, este necesară cunoașterea dependenței.

$$\tau = \tau(\mathcal{R}) \tag{1}$$

sau

$$\eta_a = \eta_a(\mathcal{R}), \tag{2}$$

la temperatura, la care se efectuează prelucrarea [4], [6]. Topiturile multora dintre materialele termoplastice utilizate în mod curent, sînt fluide nenewtoniene, a căror comportare este reflectată apropiat de relația Ostwald — de Waele

$$\tau = m\,\mathcal{R}^{\nu}. \tag{3}$$

Pentru aceste materiale, de regulă, $\nu < 1$ (viscozitate de structură). Cînd $\nu = 1$, fluidul este newtonian, în care caz constanta m devine identică cu viscozitatea η. Valorile constantelor reologice m și ν depind de natura materialului termoplastic supus prelucrării, de temperatura de lucru și pot fi diferite pe diferite domenii de valori ale reopantei.

În laborator, determinarea constantelor reologice nu se poate face, întotdeauna, în condiții apropiate de cele ce se întîlnesc la prelucrare — de exemplu pe mașina de extrudere sau de injecție [6], [7], [8]. Pe de altă parte, pregătirea corectă din punct de vedere științific a fabricației, este posibilă numai cu condiția cunoașterii acestor constante reologice. Apare indicat, în consecință, să se urmărească utilizarea mașinii de lucru însăși, ca reometru. În lucrarea de față, care are în vedere în mod special extruderea, se indică o metodă a cărei aplicare în producție nu prezintă dificultăți. Relațiile de calcul stabilite într-o lucrare anterioară pentru filiere de extrudere a țevilor [5], permit utilizarea mașinilor de extrudere echipate cu astfel de filiere în scopul efectuării măsurătorilor. Se menționează că sortimentul „țevi" are o pondere mare în producția fabricilor prelucrătoare de materiale termoplastice.

*
* *

Debitul filierei din capul de extrudere reprezentat în fig. 1 poate fi exprimat prin relația [5]:

$$Q_R = \frac{\pi R_1^3}{\frac{1}{\nu}+2}\left(\frac{R_1}{2m}\right)^{1/\nu}\frac{(k\,\Delta p_F)^{1/\nu}}{L_{cil}^{1/\nu}}(1-\varkappa_1)^{\frac{1}{\nu}+2} \tag{3}$$

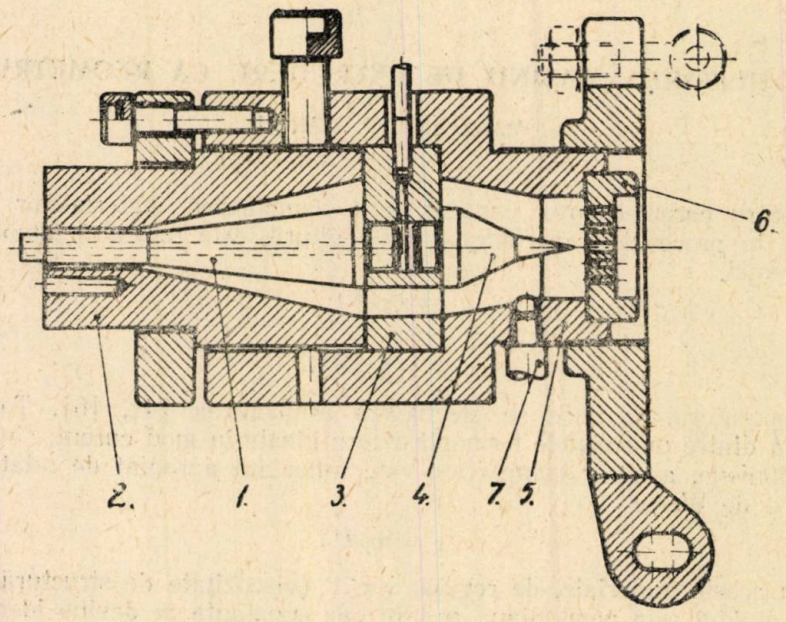


Fig. 1. Cap de extrudere pentru țevi. 1 — dorn; 2 — parte exterioară; 3 — repartizor; 4 — con de repartiție; 5 — corp; 6 — placă de uniformizare; 7 — manometru; 8 — locaș pentru termocuplu.

unde

$$k\,\Delta p_F = \Delta p_{cil} \tag{5}$$

este căderea de presiune pe porțiunea de capăt, cilindrică, a filierei.

In general,

$$\Delta p_F = \Delta p_{cil} + \Delta p_{con.}, \tag{6}$$

unde se consideră că pierderea de presiune în repartizorul 3 și în porțiunea dintre acesta și placa de uniformizare 6 este mică în comparație cu valorile mărimilor ce intră în relația (6). Ținînd seama de relația (5), relația (6) se poate scrie sub forma

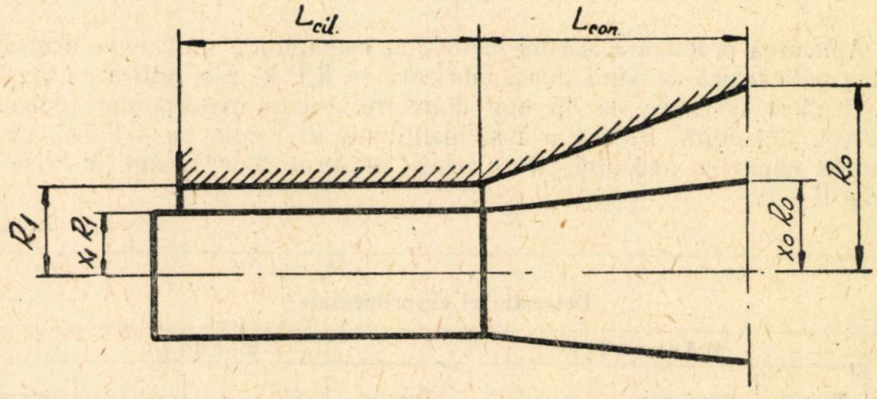
$$\Delta p_F = k\,\Delta p_F + \Delta p_{con.}$$

de unde

$$k = \frac{\Delta p_F - \Delta p_{con.}}{\Delta p_F} = \frac{\Delta p_{cil.}}{\Delta p_{cil.} + \Delta p_{con.}} = \frac{1}{1+\frac{\Delta p_{con.}}{\Delta p_{cil.}}} \tag{7}$$

Raportul $\Delta_{p\,con}/\Delta_{p\,cil}$ din expresia (7) pentru k, se poate pune sub forma [5]

$$\frac{\Delta_{p\,con.}}{\Delta_{p\,cil.}} = \frac{R_1^{3\nu+1}}{A^{2\nu+1}\cdot a^{\nu}} \cdot \frac{L_{con}}{L_{cil}} \cdot I(1-\varkappa_1)^{2\nu+1}. \tag{8}$$



$A = R_0\,(1-\varkappa_0)$
$B = R_0\,(1-\varkappa_0) - R_1\,(1-\varkappa_1)$
$a = R_0 \quad ; \quad b = R_0 - R_1$

$R_1 = 16{,}4$ m. m.
$\varkappa_1 R_1 = 12{,}7$ m. m.
$R_0 = 30$ m. m.
$\varkappa_0 R_0 = 17$ m. m.

Fig. 2. Schema de calcul a filierei

Schema filierei și semnificația mărimilor geometrice ce intră în relația (8) rezultă din figura 2. Mărimea

$$I = \int_0^1 \frac{d\xi}{\left(1-\frac{B}{A}\xi\right)^{2\nu+1}\cdot\left(1-\frac{b}{a}\xi\right)^{\nu}} \tag{9}$$

depinde de geometria filierei și de exponentul reologic ν. Tabele cu valori ale acestei mărimi, calculate pe calculatorul electronic al I.F.A. alAcademiei R.P.R. sînt date în anexă.

Rezultă astfel că expresia (4) a debitului poate fi pusă sub forma

$$Q_R = \Lambda\,(\Delta_{pF})^{1/\nu}, \tag{10}$$

unde Λ = const. pentru o filieră dată, lucrînd la temperatură constantă. Fiind cunoscute două perechi de valori Q_R [cm³/s] și Δ_{pF} [kgf/cm²], măsurate la aceeași temperatură de lucru, se obține din relația (10)

$$\frac{Q_{R_1}}{Q_{R_2}} = \left(\frac{\Delta_{pF_1}}{\Delta_{pF_2}}\right)^{1\nu} \tag{11}$$

adică

$$\nu = \frac{\lg\frac{\Delta_{pF_1}}{\Delta_{pF_2}}}{\lg\frac{Q_{R_1}}{Q_{R_2}}} \tag{12}$$

Pentru determinarea constantei m, ν fiind acum cunoscut, se obține din relația (4)

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{Q_R}\right)^{\nu} \frac{R^{3\nu+1}(1-\varkappa_1)^{2\nu+1}}{\left(\frac{1}{\nu}+2\right)^{\nu}} \cdot \frac{k\,\Delta p_F}{L_{cil}} \qquad (13)$$

Aplicarea practică a acestei metode se exemplifică în cele ce urmează, pentru policlorură de vinil dură, fabricată în R.P.R. S-a utilizat o mașină de extrudere cu melc de 45 mm diametru, rețeta materialului prelucrat fiind cea obișnuită. Filiera a fost menținută în medie la +175°C, ca și zona de capăt a melcului. Rezultatele măsurătorilor [1]) sînt înscrise în tabela 1.

Tabela 1

Determinări experimentale

Seria	Măsurat			Calculat			
	Turația melcului n rot/min	Presiunea la filieră Δp_F kgf/cm²	Debitul Q_G kg/h	Turația melcului $\bar{n}$ rot/s	Reopanta $\Re_m$ $^1/_s$	Debitul Q_R cm³/s	Exponentul reologic ν
	1	2	3	4	5	6	7
I	17	68	6,600	0,2835	14,58	1,41	0,287
	34	86	15,000	0,5660	29,18	3,91	
II	17	68	6,600	0,2835	14,59	1,41	0,373
	34	84	11,650	0,5660	29,18	2,48	

OBSERVAȚII:

Coloana 2. Δ_{pF} măsurat cu manometru, cu racord umplut cu unsoare pe bază de siliconi [2]

Coloana 3. Q_G determinat prin cîntărire.

Coloana 5. Reopanta la capătul cilindrului $\Re_m = \pi D_c \bar{n}/h$, unde $D_c = 4{,}5$ cm; $h = 0{,}275$ cm. (fig. 3).

Coloana 6. Calculat cu $\gamma = 1{,}304$ g/cm³ la 175°C (fără corecție pentru presiune).

Coloana 7. Media celor două serii: $\nu = 0{,}33$ [relația (12)].

Pentru calcularea mărimii m cu relația (13) este necesar ca, în prealabil, să fie determinată valoarea k definită prin relația (6). Cunoscînd valorile (vezi fig. 2)

$$\frac{B}{A} = 0{,}714\,; \quad \frac{b}{a} = 0{,}454$$

[1]) Măsurătorile au fost efectuate la Fabrica de mase plastice „BUCUREȘTI".

și $\nu = 0{,}33$ (tabela 1), integrala definită prin relația (9) se determină cu ajutorul tabelelor anexate, prin interpolare: $I = 3{,}379$. Relația (8) dă, cu $\varkappa_1 = 12{,}7/16{,}4 = 0{,}774$,

$$\frac{\Delta p_{con.}}{\Delta p_{cil}} = 0{,}594$$

de unde, conform relației (7)

$$k = \frac{1}{1 + 0{,}594} = 0{,}628.$$

Cu aceste valori se obține din relația (13)

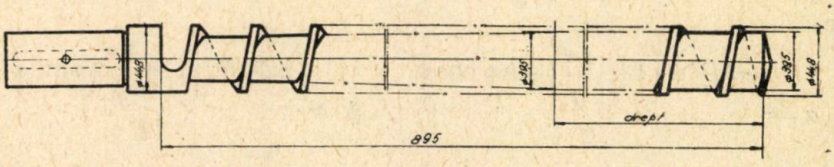
$$m = 0{,}735.$$

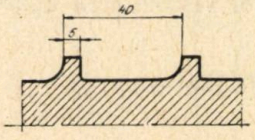
Constantele reologice m și ν au fost astfel determinate. Trebuie precizat că, deși determinările de acest fel au oarecare caracter de aproximație, ele permit totuși analiza regimului de funcționare a mașinii cu care se lucrează și, la nevoie, corectarea acestui regim. Pentru exemplificare se fac considerațiile ce urmează. Într-o lucrare ulterioară problema va fi studiată mai pe larg.

*

* *

Melcul mașinii de extrudere, pe care s-au efectuat măsurătorile, este redat în figura 3. El este de tipul curent utilizat pentru prelucrarea poli-





$h = 2{,}75$ mm
$e = 5$ mm
$\xi = 1$
$\chi = 40$ mm
$\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{40}{\pi \times 44{,}8} = 0{,}284$
$\sin \varphi = 0{,}2735$
$\cos \varphi = 0{,}9618$

Fig. 3 — Melc pentru mașină de extrudere de diametru 45 mm (P.P.C.V. dură).

clorurii de vinil dure. Porțiunea de capăt a melcului, acționînd ca pompă de fluid viscos, generează presiunea necesară extruderii. Cu cît presiunea este mai mare, cu atît este mai accentuat și efectul de omogenizare a materialului, efect care contribuie în mod hotărîtor la obținerea unui produs

de calitate. Problema ce se pune este cea a determinării valorii minime a presiunii, care mai asigură omogenitate și deci calitate satisfăcătoare a produsului. Aici se va arăta doar calea de corelare a presiunii măsurate la filieră, cu presiunea dezvoltată de melc, determinată prin calcul.

În acest scop trebuie observat că presiunea generată de melc, Δ_{pm}, acoperă presiunea măsurată la filieră Δ_{pF}, la care se adaugă căderea de presiune la placa de uniformizare, $\Delta_{p\,pl}$.

Astfel

$$\Delta_{pm} = \Delta_{pF} + \Delta_{p\,pl}. \tag{14}$$

În cazul de față, placa utilizată are 85 orificii cilindrice, cu raza $R = 0{,}15$ cm și lungimea $l = 1{,}2$ cm. Utilizînd formula ajutajului cilindric [5]

$$\Delta_{p\,pl} = \left(\frac{3\nu + 1}{\pi \nu R^3} Q_g\right)^{\nu} \frac{2l \cdot m}{R} \tag{15}$$

unde $Q_g = Q_R/85$, se obține, pentru $Q_R = 3{,}19$ cm³/s (vezi seria I de determinări, tabela 1), $\Delta_{p\,pl} = 32{,}6$ [kgf/cm].

Presiunea pe care trebuie s-o dezvolte melcul este, după relația (14), $\Delta_{pm} = 86 + 32{,}6 \approx 119$ [kgf/cm²].

Pe de altă parte se poate calcula presiunea dezvoltată în porțiunea de capăt a melcului, pe 1 cm de lungime a acesteia [5]

$$\frac{\Delta_{pm}}{L_m} \approx \frac{\alpha \bar{n} - Q_R}{\beta/\eta_a} \tag{16}$$

unde

$$\alpha = \frac{\pi^2 D_c^2 h \left(1 - \frac{\xi e}{\chi}\right) \sin\varphi \cos\varphi}{2}; \quad \beta = \frac{\pi D_c h^3 \left(1 - \frac{\xi e}{\chi}\right) \sin^2\varphi}{12}.$$

Pentru melcul din figura 3, $\alpha = 6{,}29$; $\beta = 1{,}63 \cdot 10^{-3}$. În condițiile date de lucru, cu $\eta_l = 0{,}566$ rot/s și $\mathfrak{R}_m = 29{,}18$, viscozitatea aparentă a topiturii este

$$\eta_a = m \mathfrak{R}_n^{\nu-1} = \frac{m}{\mathfrak{R}_m^{1-\nu}} = 0{,}0776 \text{ [kgf} \cdot \text{s/cm}^2\text{]}.$$

Ca ordin de mărime, această valoare corespunde valorilor indicate pentru unele calități de P.C.V. dură în lucrarea [1]. Cu $Q_R = 3{,}19$[cm³/s] se obține din relația (16)

$$\frac{\Delta_{pm}}{L_m} = 18\,6 \text{ [kgf cm}^2\text{]}.$$

Rezultă că, la regimul de lucru ales pentru încercări, pentru generarea presiunii de 119 kgf/cm², determinată mai sus, topitura trebuie să umple filetul pe o lungime de 118/18,6 = 6,25 cm.

Aceasta înseamnă că zona de capăt nu este complet utilizată: în mod normal, $L_m = (4 \ldots 6)\, D_c$. În realitate situația este, probabil, mai defavorabilă, din cauză că zona de capăt lucrează în mare măsură autogen, deci viscozitatea aparentă medie pe porțiunea L_m este mai mare decît valoarea η_a calculată mai sus și care corespunde ieșirii din melc. Se recomandă, în asemenea caz, în vederea accentuării efectului de omogenizare, ca între capătul melcului și capul de extrudere să fie intercalat un dispozitiv de reglare a presiunii, prin strangulare.

*
* *

Metoda de determinare a constantelor reologice prezentată, este accesibilă în practică: mașinile moderne de extrudere se echipează cu mijloace pentru controlul presiunii. Cunoașterea acestor caracteristici permite nu numai stabilirea regimului de lucru adecvat fiecărui produs, ci oferă posibilitatea evaluării regimului de lucru optim atît din punct de vedere al productivității mașinii, cît și din punct de vedere al calității produsului.

Catedra de procedee și aparate

Fabrica de mase plastice „București"

NOTAȚII

τ — efort unitar de forfecare [kgf/cm²];

$\mathfrak{R} = \frac{d_v}{d_\gamma}$ — reopantă [1/s];

$\mathfrak{R}_m$ — reopantă în zona de capăt a melcului;

η_a — viscozitatea aparentă [kgf. s/cm²];

m, ν — constante reologice;

L_m — lungimea zonei de capăt (de pompare) a melcului;

L_{cil}; L_{con} — lungimea porțiunii cilindrice resp. conice a filierei (fig. 2);

R_1 — raza exterioară a porțiunii cilindrice a filierei (fig. 2);

R_0 — raza exterioară a capătului porțiunii conice a filierei (fig. 2);

Δp_F — presiunea la intrare în filieră; căderea de presiune pe filieră [kgf/cm²];

Δp_{cil} — căderea de presiune pe partea cilindrică a filierei [kgf/cm²];

Δp_{con} — căderea de presiune pe partea conică, convergentă, a filierei [kgf/cm²];

$\Delta_{p\,pl}$ — căderea de presiune pe placa de uniformizare;

Δ_{pm} — presiunea dezvoltată de melc;

Q_g — debit orar [kg/h];

Q_R — debit volumetric pe secundă [cm³/s];

D_c — diametrul cilindrului (egal, aproximativ, cu diametrul exterior al melcului);

h — adîncimea filetului melcului;

ξ — variabilă de integrare în relația (9); număr de începuturi al filetului în relația (16);

e — grosimea spirei filetului;

χ — pasul filetului;

φ — — unghiul de înclinare a filetului.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * Processing of thermoplastic materials, Ed. E.C. Bernhardt, New York, Reinhold Publishing Corp., 1958.

2. *Carley, J. F.*, Modified Bourdon gage for measuring pressure in polymer processing equipment. In: Ind. and Engng. Chem., 43, nr. 4, aprilie 1953, pag. 858—860.

3. *Döring, G. și Lengering, J.*, Uber das Fliessverhalten von Polyäthylen — Schmelzen. In: Kunststoffe, 53, nr. 1 — ianuarie 1963, pag. 11—18.

4. *Maddok, B. H.*, Pressure development in extruder screws. In: S.P.E. Journal, 16, nr. 4, aprilie 1960, pag. 373—378.

5. *Renert, M.*, Calculul și construcția utilajului chimic Vol. III — București — Ed. Didactică și Pedagogică, 1963.

6. *Sacke, R. D.*, Viscosity data for extruder flow equations. In: S.P.E. Journal, 14 nr. 10, octombrie 1956, pag. 32—36.

7. Schenkel, G. Schneckenpressen für Kunstsoffe, München, Carl Hanser, 1959.

8. *Solomon, N.*, Viscozimetrie — București, Ed. Tehnică 1958.

9. *Wilkinson, W. L.*, Non-Newtonian Fluids, Londra, Pergmon — Press, 1960.

Anexă

Valori ale funcției $I = \int_0^1 \frac{d\xi}{\left(1 - \frac{B}{A}\xi\right)^{2\nu+1} \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right)^{\nu}}$

$\nu = 0{,}1$

b/a \ B/A	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,95
0	1,0060	1,0121	1,0184	1,0247	1,0376	1,0510	1,0647	1,1409	1,2323	1,3445	1,4869	1,6760	2,3729	4,2269
0,1	1,0112	1,0174	1,0237	1,0300	1,0431	1,0565	1,0704	1,1471	1,2392	1,3522	1,4957	1,6863	2,3891	4,2603
0,2	1,0169	1,0231	1,0294	1,0359	1,0490	1,0625	1,0765	1,1539	1,2466	1,3606	1,4964	1,6976	2,4069	4,2974
0,3	1,0231	1,0294	1,0357	1,0422	1,0555	1,0691	1,0832	1,1612	1,2548	1,3698	1,5068	1,7100	2,4267	4,3389
0,4	1,0299	1,0363	1,0427	1,0492	1,0626	1,0763	1,0906	1,1694	1,2639	1,3801	1,5276	1,7238	2,4488	4,3862
0,5	1,0376	1,0440	1,0505	1,0571	1,0706	1,0841	1,0984	1,1780	1,2741	1,3916	1,5409	1,7395	2,4742	4,4409
0,6	1,0464	1,0528	1,0594	1,0661	1,0797	1,0938	1,1084	1,1890	1,2858	1,4048	1,5562	1,7576	2,5038	4,5060
0,7	1,0566	1,0632	1,0698	1,0766	1,0905	1,1055	1,1195	1,2013	1,2995	1,4205	1,5744	1,7792	2,5397	4,5865
0,8	1,0691	1,0758	1,0826	1,0895	1,1036	1,1189	1,1332	1,2165	1,3166	1,4399	1,5970	1,8063	2,5855	4,6925
0,9	1,0858	1,0926	1,0996	1,1067	1,1211	1,1367	1,1514	1,2368	1,3395	1,4662	1,6278	1,8437	2,6504	4,8499
0,95	1,0973	1,1043	1,1114	1,1185	1,1332	1,1491	1,1640	1,2509	1,3556	1,4848	1,6498	1,8705	2,6985	4,9726

$\nu = 0{,}2$

0	1,0070	1,0142	1,0215	1,0289	1,0441	1,0598	1,0761	1,1670	1,2779	1,4168	1,5975	1,8445	2,8231	5,7267
0,1	1,0175	1,0248	1,0322	1,0397	1,0551	1,0711	1,0876	1,1798	1,2923	1,4334	1,6169	1,8679	2,8634	5,9843
0,2	1,0290	1,0364	1,0439	1,0515	1,0572	1,0834	1,1001	1,1938	1,3081	1,4516	1,6382	1,8937	2,9080	6,0945
0,3	1,0417	1,0492	1,0568	1,0646	1,0805	1,0969	1,1140	1,2093	1,3257	1,4717	1,6619	1,9224	2,9582	6,2196
0,4	1,0558	1,0634	1,0712	1,0791	1,0953	1,1121	1,1295	1,2266	1,3453	1,4943	1,6885	1,9547	3,0153	6,3640
0,5	1,0718	1,0796	1,0872	1,0956	1,1121	1,1293	1,1470	1,2463	1,3676	1,5201	1,7190	1,9919	3,0816	6,5345
0,6	1,0902	1,0982	1,1063	1,1146	1,1316	1,1491	1,1673	1,2691	1,3936	1,5502	1,7547	2,0357	3,1605	6,7418
0,7	1,1122	1,1204	1,1288	1,1373	1,1547	1,1728	1,1915	1,2964	1,4248	1,5865	1,7979	2,0889	3,2583	7,0053
0,8	1,1397	1,1482	1,1569	1,1657	1,1838	1,2025	1,2219	1,3307	1,4642	1,6326	1,8531	2,1575	3,3871	7,3647
0,9	1,1774	1,1864	1,1955	1,2048	1,2238	1,2435	1,2639	1,3784	1,5193	1,6975	1,9316	2,2579	3,5785	7,9269
0,95	1,2046	1,2139	1,2233	1,2329	1,2526	1,2731	1,2942	1,4131	1,5596	1,7453	1,9900	2,3301	3,7282	8,3911

$\nu = 0{,}3$

b/a \ B/A	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,95
0	1,0080	1,0162	1,0246	1,0331	1,0506	1,0687	1,0876	1,1938	1,3257	1,4943	1,7190	2,0357	3,3871	8,3911
0,1	1,0239	1,0323	1,0408	1,0495	1,0673	1,0859	1,1051	1,2137	1,3485	1,5210	1,7510	2,0755	3,4625	8,6109
0,2	1,0413	1,0499	1,0586	1,0675	1,0858	1,1048	1,1245	1,2356	1,3737	1,5506	1,7866	2,1198	3,5470	8,8603
0,3	1,0607	1,0695	1,0785	1,0876	1,1063	1,1258	1,1460	1,2600	1,4019	1,5837	1,8265	2,1697	3,6431	9,1474
0,4	1,0825	1,0916	1,1008	1,1101	1,1294	1,1494	1,1702	1,2879	1,4337	1,6212	1,8719	2,2266	3,7540	9,4841
0,5	1,1075	1,1168	1,1263	1,1360	1,1559	1,1765	1,1980	1,3193	1'4705	1,6646	1,9245	2,2930	3,8849	9,8888
0,6	1,1367	1,1464	1,1562	1,1663	1,1869	1,2084	1,2306	1,3566	1,5138	1,7160	1,9872	2,3724	4,0438	10,3917
0,7	1,1721	1,1822	1,1925	1,2030	1,2245	1,2469	1,2702	1,4021	1,5668	1,7792	2,0646	2,4710	4,2455	11,0482
0,8	1,2173	1,2280	1,2389	1,2499	1,2727	1,2964	1,3210	1,4606	1,6355	1,8615	2,1661	2,6017	4,5197	11,9761
0,9	1,2816	1,2932	1,3049	1,3169	1,3415	1,3671	1,3937	1,5449	1,7351	1,9819	2,3163	2,7975	4,9471	13,5047
0,95	1,3300	1,3421	1,3545	1,3672	1,3932	1,4203	1,4845	1,6089	1,8111	2,0749	2,4337	2,9526	5,3001	14,8394

$\nu = 0{,}4$

0	1,0090	1,0183	1,0277	1,0373	1,0572	1,0778	1,0992	1,2215	1,3758	1,5774	1,8527	2,2528	4,0972	12,2145
0,1	1,0303	1,0398	1,0495	1,0594	1,0798	1,1010	1,1231	1,2489	1,4079	1,6157	1,8998	2,3132	4,2234	12,6575
0,2	1,0538	1'0636	1,0736	1,0838	1,1049	1,1267	1,1495	1,2793	1,4436	1,6585	1,9526	2,3811	4,3664	13,1663
0,3	1,0802	1,0904	1,1007	1,1112	1,1330	1,1556	1,1792	1,3136	1,4839	1,7069	2,0124	2,4583	4,5309	13,7599
0,4	1,1102	1,1207	1,1315	1,1424	1,1650	1,1885	1,2129	1,3527	1,5299	1,7623	2,0813	2,5476	4,7236	14,4670
0,5	1,1449	1,1559	1,1671	1,1785	1,2020	1 2266	1,2521	1,3981	1,5836	1,8273	2,1623	2,6532	4,9547	15,3322
0,6	1,1860	1,1976	1,2093	1,2213	1,2461	1,2719	1,2987	1,4524	1,6480	1,9054	2,2602	2,7816	5,2411	16,4307
9,7	1,2367	1,2490	1,2614	1,2742	1,3004	1,3278	1,3563	1,5197	1,7282	2,0033	2,3837	2,9448	5,6133	17,9035
0,8	1,3030	1,3162	1,3296	1,3433	1,3716	1,4011	1,4319	1,6086	1,8347	2,1343	2,5504	3,1672	6,1364	20,0593
0,9	1,4007	1,4153	1,4302	1,4455	1,4769	1,5098	1,5441	1,7414	1,9953	2,3338	2,8073	3,5154	6,9923	23,7962
0,95	1,4772	1,4930	1,5091	1,5256	1,5597	1,5953	1,6324	1,8469	2,1241	2,4955	3,0181	3,8055	7,7384	27,2413

$\nu = 0{,}5$

B/A \ b/a	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,95
0	1,0100	1,0204	1,0309	1,0416	1,0638	1,0869	1,1111	1,2499	1,4285	1,6666	1,9999	2,4999	4,9954	18,1032
0,1	1,0367	1,0474	1,0583	1,0694	1,0924	1,1163	1,1414	1,2854	1,4707	1,7181	2,0650	2,5860	5,1943	18,9501
0,2	1,0665	1,0776	1,0889	1,1005	1,1244	1,1493	1,1753	1,3251	1,5181	1,7762	2,1385	2,6836	5,4225	19,9312
0,3	1,1002	1,1118	1,1236	1,1356	1,1605	1,1865	1,2137	1,3702	1,5721	1,8425	2,2227	2,7960	5,6882	21,0981
0,4	1,1388	1,1509	1,1633	1,1760	1,2020	1,2293	1,2578	1,4221	1,6345	1,9194	2,3208	2,9276	6,0039	22,5051
0,5	1,1840	1,1968	1,2099	1,2232	1,2507	1,2795	1,3096	1,4833	1,7083	2,0106	2,4378	3,0854	6,3888	24,2590
0,6	1,2384	1,2520	1,2650	1,2801	1,3094	1,3400	1,3721	1,5574	1,7980	2,1222	2,5818	3,2808	6,8754	26,5330
0,7	1,3065	1,3211	1,3361	1,3514	1,3830	1,4160	1,4506	1,6510	1,9119	2,2648	2,7670	8,5347	7,5238	29,6626
0,8	1,3976	1,4137	1,4302	1,4470	1,4818	1,5182	1,5563	1,7776	2,0672	2,4608	3,0218	3,8912	8,4658	34,4042
0,9	1,5370	1,5554	1,5742	1,5935	1,6334	1,6751	1,7190	1,9744	2,3108	2,7719	3,4380	4,4746	10,084	43,0447
0,95	1,6509	1,6714	1,6922	1,7136	1,7579	1,8043	1,8530	2,1380	2,5156	3,0364	3,7949	4,9866	11,5745	51,4430

$\nu = 0{,}6$

0	1,0111	1,0224	1,0340	1,0459	1,0705	1,0962	1,1231	1,2793	1,4838	1,7623	2,1623	2,7816	6,1364	27,2414
0,1	1,0433	1,0551	1,0672	1,0796	1,1052	1,1320	1,1601	1,3233	1,5372	1,8289	2,2485	2,8995	6,4392	28,8105
0,2	1,0795	1,0919	1,1045	1,1175	1,1443	1,1724	1,2018	1,3730	1,5976	1,9046	2,3469	3,0347	6,7902	30,6555
0,3	1,1207	1,1338	1,1471	1,1607	1,1890	1,2185	1,2495	1,4299	1,6672	1,9919	2,4609	3,1919	7,2043	32,8668
0,4	1,1685	1,1823	1,1964	1,2108	1,2408	1,2720	1,3049	1,4963	1,7484	2,0944	2,5954	3,3785	7,7035	35,5820
0,5	1,2251	1,2398	1,2548	1,2702	1,3021	1,3355	1,3706	1,5753	1,8457	2,2176	2,7579	3,6056	8,3225	39,0239
0,6	1,2940	1,3099	1,3261	1,3427	1,3771	1,4132	1,4510	1,6725	1,9658	2,3708	2,9613	3,8920	9,1209	43, 819
0,7	1,3819	1,3993	1,4170	1,4352	1,4729	1,5125	1,5540	1,7975	2,125	2,5706	3,2289	4,2724	10,2119	50,0195
0,8	1,5024	1,5219	1,5487	1,5623	1,6047	1,6492	1,6960	1,9712	2,3392	2,8528	3,6109	4,8229	11,8503	60,1087
0,9	1,6936	1,7166	1,7402	1,7644	1,8147	1,8674	1,9231	2,2517	2,6752	3,3202	4,2535	5,7664	14,8091	79,4192
0,95	1,8572	1,8834	1,9103	1,9378	1,9951	2,0554	2,1190	2,4963	3,0090	3,7376	4,8364	6,6379	17,6825	99,1803

$\nu = 0{,}7$

b/a \ B/A	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,95
0	1,0121	1,0245	1,0372	1,0502	1,0772	1,1069	1,1352	1,3097	1,5420	1,8651	2,3101	3,1032	7,5919	41,5112
0,1	1,0498	1,0629	1,0762	1,0899	1,1182	1,1494	1,1792	1,3934	1,6076	1,9489	2,4528	3,2606	8,0419	44,3589
0,2	1,0926	1,1063	1,1204	1,1349	1,1648	1,1977	1,2292	1,4559	1,6826	2,0449	2,5458	3,4427	8,5696	47,7488
0,3	1,1417	1,1563	1,1713	1,1866	1,2183	1,2533	1,2867	1,4931	1,7697	2,1568	2,7312	3,6571	9,2001	51,8651
0,4	1,1992	1,2148	1,2308	1,2471	1,2811	1,3185	1,3532	1,5740	1,8706	2,2897	2,9064	3,9148	9,9711	56,9954
0,5	1,2680	1,2848	1,3021	1,3153	1,3563	1,3921	1,4305	1,6688	1,9974	2,4313	3.0865	4,2334	10,9438	63,6120
0,6	1,3531	1,3715	1,3903	1,4096	1,4496	1,4939	1,6108	1,8962	2,2856	2,6564	3,4106	4,6425	12,2240	89,4030
0,7	1,4635	1,4839	1,5049	1,5263	1,5710	1,6204	1,6675	1,9615	2,3610	2,9290	3,7332	5,1985	14,0181	97,9586
0,8	1,6185	1,6419	1,6660	1,6906	1,7419	1,7988	1,8338	2,1932	2,6585	3,3250	4,3405	9,2298	16,8042	106,5142
0,9	1,8740	1,9027	1,9322	1,9624	2,0253	2,0950	2,1621	2,5832	3,1656	4,0100	5,2431	12,1022	22,0919	133,7073
0,95	2,1032	2,1367	2,1712	2,2067	2,2806	2,3622	2,4415	2,9399	3,6351	4,6182	6,1657	22,0588	27,5081	135,1554

$\nu = 0{,}8$

0	1,0131	1,0266	1,0404	1,0546	1,0840	1,1165	1,1476	1,3408	1,6030	1,9756	2,5392	3,4709	9,4555	63,8999
0,1	1,0565	1,0707	1,0853	1,1003	1,1314	1,1658	1,1987	1,4036	1,6821	2,0788	2,6802	3,6770	10,1135	69,0022
0,2	1,1059	1,1211	1,1366	1,1526	1,1857	1,2223	1,2573	1,4757	1,7733	2,1982	2,8442	3,9180	10,8940	75,1429
0,3	1,1633	1,1795	1,1961	1,2132	1,2486	1,2879	1,3254	1,5599	1,8802	2,3388	3,0383	4,2041	11,8385	82,6964
0,4	1,2310	1,2474	1,2665	1,2849	1,3219	1,3656	1,4062	1,6601	2,0080	2,5078	3,2728	4,5544	13,0106	92,2502
0,5	1,3081	1,3227	1,3517	1,3665	1,4081	1,4542	1,4983	1,7750	2,1650	2,7167	3,5650	4,9931	14,5146	104,7841
0,6	1,4221	1,4371	1,4587	1,4932	1,5273	1,6701	1,6280	1,9316	2,3652	2,9850	3,9434	5,5669	16,5349	122,0772
0,7	1,5518	1,5757	1,6002	1,6255	1,8780	1,7364	1,7922	2,1451	2,6352	3,3501	4,4634	6,3653	19,4390	134,7248
0,8	1,7473	1,7754	1,8042	1,8339	1,8957	1,9644	2,0304	2,4486	3,0341	3,8958	5,2513	7,5940	24,1028	136,9688
0,9	2,0741	2,1183	2,1549	2,1925	2,2711	2,3584	2,4431	2,9811	3,7438	4,8823	6,7024	9,9060	33,4052	140,1645
0,95	2,3979	2,4408	2,4851	2,5306	2,6258	2,7313	2,8346	3,4923	4,4343	5,8567	8,1606	12,2783	43,4493	142,3493

$\nu = 0{,}9$

b/a \ B/A	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,95
0	1,0141	1,0287	1,0436	1,0589	1,0908	1,1245	1,1601	1,3730	1,6672	2,0944	2,7579	3,8920	11,8502	99,1803
0,1	1,0631	1,0786	1,0945	1,1108	1,1448	1,1807	1,2187	1,4461	1,7611	2,2196	2,9338	4,1580	12,8010	108,2226
0,2	1,1195	1,1361	1,1531	1,1706	1,2071	1,2475	1,2863	1,5308	1,8702	2,3659	3,1403	4,4724	13,9420	119,2298
0,3	1,1854	1,2033	1,2217	1,2406	1,2800	1,3216	1,3657	1,6305	1,9995	2,5399	3,3874	4,8512	15,3405	132,9439
0,4	1,2639	1,2835	1,3035	1,3241	1,3671	1,4125	1,4607	1,7506	2,1557	2,7516	3,6901	5,3187	17,1018	134,3536
0,5	1,3602	1,3818	1,4039	1,4267	1,4741	1,5244	1,5776	1,8991	2,3503	3,0171	4,0725	5,9147	19,4007	135,9468
0,6	1,4827	1,5089	1,5318	1,5573	1,6106	1,6701	1,7271	2,0902	2,6026	3,3639	4,5768	6,7091	22,5525	137,9535
0,7	1,8475	1,6753	1,7039	1,7334	1,7949	1,8702	1,9295	2,3510	2,9496	3,8459	5,2856	7,8405	27,2000	140,5673
0,8	1,8906	1,9240	1,9584	1,9939	2,0680	2,1468	2,2306	2,7428	3,4771	4,5877	6,3925	9,6376	34,9183	144,0510
0,9	2,3247	2,3687	2,4141	2,4606	2,5588	2,6631	2,7744	3,4602	4,9576	5,9906	8,5278	13,1861	51,0964	149,3101
0,95	2,7527	2,8776	2,8642	2,9226	3,0453	3,1761	3,3160	4,1838	5,4605	7,4485	10,7871	17,0192	69,4981	152,9159

$\nu = 1{,}0$

0	1,0151	1,0308	1,0468	1,0633	1,0977	1,1342	1,1728	1,4062	1,7346	2,2222	2,9999	4,3748	14,9371	—
0,1	1,0699	1,0868	1,1038	1,1215	1,1585	1,1976	1,2391	1,4903	1,8447	2,3723	3,2168	4,7147	16,2993	—
0,2	1,1333	1,1513	1,1233	1,1891	1,2290	1,2713	1,3162	1,5885	1,9739	2,5495	3,4740	5,1205	17,9527	—
0,3	1,2080	1,2277	1,2480	1,2688	1,3123	1,3585	1,4075	1,7053	2,1282	2,7624	3,7852	5,6151	20,0057	—
0,4	1,2981	1,3198	1,3421	1,3650	1,4130	1,4638	1,5179	1,8473	2,3171	3,0246	4,1714	6,2339	22,6296	—
0,5	1,4097	1,4339	1,4588	1,4845	1,5381	1,5950	1,6556	2,0254	2,5555	3,3581	4,6666	7,0354	26,1133	—
0,6	1,5538	1,5814	1,6097	1,6389	1,7000	1,7650	1,8342	2,2583	2,8696	3,8014	5,3315	8,1241	30,9885	—
0,7	1,7512	1,7835	1,8167	1,8510	1,9227	1,9992	2,0806	2,8231	3,3110	4,4310	6,2876	9,7118	38,3621	—
0,8	2,0501	2,0898	2,1307	2,1730	2,2616	2,3562	2,4572	3,0827	4,0011	5,4290	7,8270	12,3153	51,0260	—
0,9	2,6062	2,6605	2,7166	2,7746	2,8964	3,0268	3,1664	4,0395	5,3422	7,4049	10,9399	17,7100	78,9163	—
0,95	3,1817	3,2519	3,3244	3,3994	3,5573	3,7266	3,9083	5,0538	6,7851	9,5660	14,4085	23,8493	112,3144	—

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСТРУЗИОННЫХ МАШИН В КАЧЕСТВЕ РЕОМЕТРА

(Резюме)

Применение экструзионных машин промышленного типа для определения реологической характеристики выплавки термопластических материалов, позволяет осуществлять необходимые замеры в условиях характеризующих процесс работы машин.

Исходя из предыдущих проведенных работ по определению характеристик головок, расчетным путем, в работе устанавливаются теоретические основы метода и показывается практическое ее применение. Дается пример анализа экструзионного режима на основании полученных результатов.

ON THE UTILISATION OF SCREW-EXTRUDERS AS VISCOMETERS

(Summary)

The utilization of industrial-type screw extruders for determining the rheological constants of polymer melts (power-law assumed), permits measurements to be carried out under factory processing conditions.

Basing upon previous works concerning the calculus of extrusion-dies characteristics, method is established for computing the rheological constants from pressure-output rate measurements. An example is provided of how these experimentally obtained data can be used for uppraising the operating regime of an extruder.

SUR L'UTILISATION DES EXTRUDEUSES COMME RHÉOMÈTRE

(Résumé)

L'utilisation des types industriels d'extrudeuses pour la détermination des constantes rhéologiques des polymères thermoplastiques (supposés obéir à la relation exponentielle), permet d'effecteur les mesures nécessaires en régime de fonctionnement normal de la machine. Partant de travaux antérieurs concernant le calcul des caractéristiques des têtes d'extrusion, l'on établit à ce but une méthode utilisant les données pression-débit, facilement mesurables. A titre d'exemple, le régime de fonctionnement de l'extrudeuse est examiné à l'aide des résultats ainsi obtenus.

UBER DIE VERWENDUNG DES EXTRUDERS ALS VISKOSIMETER

(Zusammenfassung)

Die Verwendung von Extrudern in industrieller Ausführung zur Bestimmung der Parameter des Fliessgesetzes (Potenzgesetz), gestattet es die notwendigen Messungen unter Betriebsbedingungen auszuführen. Ausgehend von vorangegangenen Arbeiten betreffend die Berechung der Düsenkennzahlen werden die theoretischen Grundlagen der Methode aufgezeigt. Ihre Anwendung wird an einem Beispiel erläutert. Es wird ferner gezeigt, wie die Ergebnisse der Messung zur Beurteilung der Betriebsweise des Extruders herangezogen werden können.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

TERMOTEHNICĂ

O ECUAȚIE A PROPAGĂRII FLACĂRII TURBULENTE ÎN MOTORUL CU APRINDERE PRIN SCINTEIE

BERTHOLD GRÜNWALD

Unul dintre aspectele fundamentale ale flăcării turbulente îl constituie desfășurarea reacțiilor într-o zonă de mare adîncime.

Cu toată importanța pe care o prezintă studiul adîncimii zonei de reacție în flacăra turbulentă din motor, în ultimii 10—15 ani nu a apărut nici o lucrare fundamentală în această direcție.

Importanța pe care o prezintă în deosebi pentru economicitatea motorului prezența reacțiilor de ardere într-o zonă largă, în flacără, ne-a determinat să căutăm o cale de evaluare a proceselor fizico-chimice din spatele frontului de aprindere.

La un moment dat extremitatea luminoasă a flăcării dinspre gazele proaspete împarte amestecul în două părți ; *granița luminoasă de separație a amestecului nears de restul amestecului în care sînt inițiate reacțiile de ardere se numește front de aprindere.*

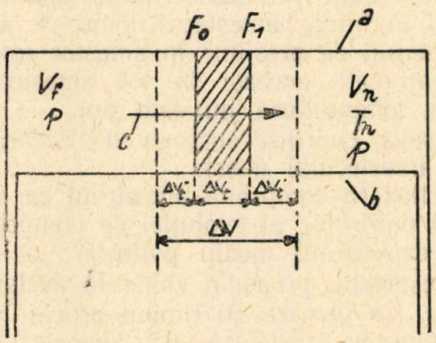


Fig. 1

La un moment dat în camera de ardere frontul de aprindere ocupă poziția F_0 (fig. 1) ; amestecul este împărțit în două părți : partea nearsă, de volum V_n și partea parcursă de flacără, de volum V_f.

Datorită fenomenului de propagare, în intervalul de timp $\Delta\tau$ frontul de aprindere se deplasează de la stînga la dreapta (sensul ales al propagării) și ocupă poziția F_1.

Se notează cu ΔV_t și se numește tranșă, volumul de amestec nears străbătut de flacără în intervalul de timp $\Delta\tau$.

Dacă γ_n este greutatea specifică a amestecului neears în momentul inițial, atunci greutatea amestecului neears cuprins în tranșa ΔV_t va fi

$$\Delta G_n' = \gamma_n \Delta V_t \qquad (1)$$

Pe măsura deplasării frontului de aprindere au loc reacții chimice de ardere cu degajare de căldură, astfel încît la finele intervalului considerat, amestecul cuprins în tranșa ΔV_t format din produsele finale de ardere, produse ale reacțiilor intermediare, combustibil care nu a intrat în reacție, azot și oxigen, are o temperatură mai mare decît cea inițială; din această cauză el se va destinde în ambele părți comprimînd atît amestecul neears cît și amestecul parcurs de flacără.

Ca urmare la finele intervalului tranșa va ocupa volumul ΔV.

Întrucît destinderea tranșei considerate are loc atît în sensul propagării cît și în sens opus, se notează cu $\Delta V_t'$, $\Delta V_t''$ creșterile de volum ale tranșei în sensul amestecului neears și respectiv în sensul amestecului parcurs de flacără.

Dacă notăm cu ΔV_n reducerea de volum a amestecului neears, rezultă evident:

$$\Delta V_t + \Delta V_t' = -\Delta V_n \qquad (2)$$

O exprimare matematică a fenomenului de cuprindere succesivă de către flacără a tranșelor de amestec neears se poate realiza pe baza următoarelor ipoteze fundamentale.

1. În condițiile din motorul cu aprindere prin scînteie, viteza de propagare a flacării turbulente nu depășește nici odată cîteva zeci de m/s, astfel încît ea fiind mult inferioară vitezei sunetului, se poate admite că în fiecare moment în întreg amestecul domnește aceeași presiune sau cu alte cuvinte, gradientul de presiune în amestec este nul

2. Temperatura nu este aceeași în tot amestecul din camera de ardere, gradientul de temperatură nu este nul.

Destinderea tranșelor cuprinse succesiv de flacără determină o comprimare politropă a amestecului neears.

Se consideră că flacăra comprimă amestecul ca un piston; se poate admite că exponentul politropic al evoluției de comprimare a amestecului neears este egal cu exponentul mediu politropic al evoluției din cursa de comprimare a amestecului proaspăt (pînă la declanșarea scînteii electrice) de către piston. Ca urmare, în timpul procesului de ardere, amestecul din fața frontului de aprindere, este omogen în ceea ce privește temperatura; aceasta crește continuu, ceea ce modifică permanent condițiile inițiale de propagare a flăcării.

În partea de amestec parcursă de flacăra, temperatura este mult superioară temperaturii amestecului neears din cauza reacțiilor exoterme de ardere.

Datorită arderii și destinderii succesive a tranșelor în amestecul din spatele flăcării apare un gradient de temperatură care este explicat de Lewis și Elbe [6] în felul următor.

Prima tranșă arde în condițiile inițiale de presiune, se dilată și efectuează un lucru mecanic asupra restului de amestec. Tranșele care ard ulterior se destind și comprimă tranșele anterioare. Dacă se presupune că volumul amestecului a rămas invariabil în timpul procesului (ardere în bombe) atunci la finele arderii volumul primei tranșe ar fi identic cu volumul inițial, înainte de destindere.

Aceasta ar însemna că energia cheltuită de prima tranșă pentru destindere este recîștigată de ea ulterior datorită comprimărilor repetate pe care le suportă în timpul procesului. Dar, la sfîrșitul arderii, presiunea în cameră este de cîteva ori mai mare decît presiunea inițială astfel încît gradul de comprimare al primei tranșe este mult mai ridicat decît gradul inițial de destindere. În consecință suma energiilor primite de tranșa inițială prin comprimări repetate trebuie să depășească energia pierdută inițial prin destindere. Ca urmare prima tranșă va avea o temperatură mai mare decît tranșa care arde la sfîrșit; în amestecul parcurs de flacără apare un gradient de temperatură care este de cîteva sute de grade.

În unele lucrări [7], [16] se consideră că prin destinderea tranșei amestecul parcurs de flacără este supus unui proces de comprimare cu un exponent mediu politropic egal cu valoarea exponentului mediu politropic al evoluției din cursa de destindere, după terminarea arderii.

O asemenea ipoteză poate fi admisă în cazul flăcărilor laminare, întrucît numai în această împrejurare se poate presupune că în spatele tranșei reacția chimică practic a încetat.

În cazul flăcărilor turbulente procesul de comprimare a gazelor arse din spatele tranșei se desfășoară simultan cu degajarea de căldură determinată de diferitele grade de avansare a reacției chimice. Un fenomen identic are loc, după cum se arată în [3] numai în prima parte a procesului de destindere vizibilă din motor, după ce flacăra se stinge la perete. De aceea ipoteza menționată mai sus trebuie corectată în sensul următor: se admite că amestecul din spatele flăcării este supus unui proces de comprimare cu un exponent mediu politropic egal cu valoarea exponentului mediu politropic al primei pătrimi a evoluției din cursa de destindere vizibilă (după atingerea presiunii maxime) din motor (presupunînd astfel că procesul de ardere se desăvîrșește în această porțiune din cursa de destindere).

3. Este necesar să se determine gradul de destindere a tranșei (raportul $\Delta V/\Delta V_t$) determinat de arderea unei părți din amestecul cuprins în ea.

Pînă în prezent au fost elaborate următoarele modele de desfășurare a procesului de ardere și destindere a tranșei:

— ardere izocoră cu destindere adiabată;
— ardere izobară;
— ardere izotermă.

a) În 1939, Rabezzana — se citează după [16] — admite ipoteza că fiecare tranșă arde instantaneu, la volum constant, iar apoi se destinde adiabatic. Această ipoteză nu este în concordanță cu reprezentările actuale ale propagării flăcării care evidențiază durata în timp a proceselor din flacără și ca atare efectuarea simultană a destinderii tranșei și a

transformărilor chimice. Deaceea, în prezent, acest model este mai puțin răspîndit.

b) În lucrările lor, Lewis și Elbe [6], [7] și Jost [5] consideră că arderea și destinderea tranșei se produce la presiune constantă. După cum remarcă Sviridov [16] această ipoteză este mai corectă întrucît cele două procese — arderea și destinderea — formează un tot organic; metoda

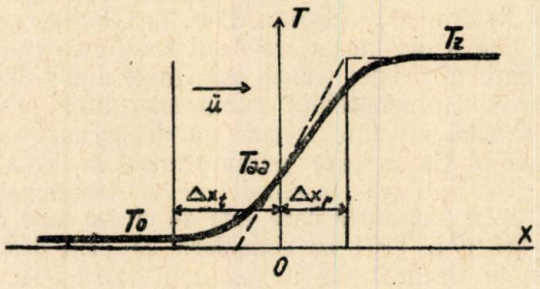


Fig. 2

arderii izobare are o răspîndire mai largă și este utilizată mai ales în studiul propagării flăcărilor laminare în bombe.

c) În lucrarea [16], Sviridov utilizează pentru prima dată în calculul arderii din motor, modelul fizic al lui Zeldovici, Frank-Kamenețki și N. Semenov, model pe care se întemeiază teoria termică modernă a propagării flăcării. În acest model se consideră arderea și destinderea tranșei ca procese izoterme.

Vom acorda mai multă atenție acestui model întrucît după Sviridov „cel mai corect ar fi să se considere izoterm procesul destinderii în zona flăcării".

Începînd cu lucrările lui Mallard și Le Châtelier [8] s-a considerat că mecanismul de propagare a flăcării constă în încălzirea stratelor succesive de amestec proaspăt pînă la o temperatură la care are loc autoaprinderea.

În figura 2 se prezintă variația temperaturii în zona de ardere cînd gazul proaspăt se deplasează în sensul pozitiv cu viteza medie $\bar{u}$. Fie T_0 temperatura inițială a gazelor proaspete, T_z, temperatura maximă de ardere și T_{aa} temperatura de autoaprindere.

Temperatura de autoaprindere împarte flacăra staționară în două zone: zona de încălzire (Δx_t) în care straturile de gaze proaspete se încălzesc continuu prin conductibilitate și zona de reacție (Δx_r) în care gazele se încălzesc în urma efectului termic al reacției și cedează căldura amestecului proaspăt.

Încă în 1939 Jost arăta că „împotriva acestei teorii termice ne putem opune chiar și pentru faptul că însăși noțiunea de „temperatură de autoaprindere reprezintă o nedeterminare" [5].

În lucrarea [14] Socolic subliniază că „inaplicabilitatea la procesul de propagare a flăcării a noțiunii de temperatură de autoaprindere nu este determinată de caracterul convențional al acestei mărimi ci de diferența principială a naturii fenomenelor de autoaprindere și de propagare a flăcării, diferență care se manifestă prin rolul diferit pe care-l are transferul de căldură din zona de reacție în gazul proaspăt, în cadrul celor două fenomene". Astfel pentru fenomenul de autoaprindere transferul de căldură din zona reacției înseamnă frînarea autoaccelerării termice a reacției în schimb pentru fenomenul de propagare transferul de căldură din zona de ardere în amestecul proaspăt ușurează dezvoltarea reacțiilor chimice și propagarea flăcării.

Tratarea arderii ca un proces care se desfășoară aproape exclusiv la temperatura maximă egală cu temperatura de ardere aparține lui Zeldovici, Frank-Kamenețki și N. Semenov.

Zeldovici și Frank-Kamenețki definesc mecanismul termic de propagare a flăcării astfel: „în cazul reacțiilor cu cinetică neautocatalitică, cauza intrării în reacție a gazului proaspăt o constituie încălzirea sa cu căldura care se degajă din reacție; de aceea această propagare se și numește termică. Aceasta nu înseamnă că în zona flăcării nu are loc difuzia; fluxul de difuzie este tot atît de puternic ca și cel termic" [18]. În schema menționată difuzia reprezintă un factor suplimentar de transfer pe lîngă conductibilitatea termică.

În schema lui Zeldovici și Frank-Kamenețki, temperatura variază în zona de ardere ca și în schema clasică, în schimb temperatura de autoaprindere este eliminată. Zona flăcării este divizată în două părți și în noua schemă: zonă de încălzire și zonă de reacție (fig. 3).

Dar, după cum menționează autorii „în zona în care se desfășoară efectiv reacția se consumă puțin pentru încălzirea gazului în reacție pînă la temperatura sa finală T_z în comparație cu întreaga căldură degajată în reacție. Se poate considera aproximativ că întreaga căldură din zona de reacție este evacuată prin conductibilitatea termică" [17]. Aceasta înseamnă că la temperaturi ceva mai mici decît cele maxime intensitatea transformărilor chimice este atît de redusă încît practic viteza reacției chimice este nulă. În zona de reacție temperatura este practic constantă căldura degajată prin reacție fiind cedată treptat straturilor vecine. „Tocmai acest aflux „extern" de căldură din zona de reacție chimică în zona de preîncălzire accelerează într-atît viteza reacției chimice în zona de încălzire, încît atunci cînd temperatura din zona de încălzire atinge temperatura de ardere, reacția chimică „se mută" în stratul vecin. Este evident că în acest caz viteza de înaintare a flăcării este determnată de intensitatea conductibilității termice și de viteza reacției chimice" [16].

Încercarea lui Sviridov de a utiliza un asemenea model pentru flăcările turbulente poate întîmpina cel puțin următoarele obiecțiuni.

a) Din definiția mecanismului termic de propagare rezultă că acesta se poate aplica „reacțiilor cu cinetică neautocatolică"; difuziunea centrilor activi ca o proprietate importantă a flăcării turbulente este neglijată.

Reacțiile de oxidare a combustibilului sînt reacții autocatalitice, ori pentru acest caz însăși autorii mecanismului termic de propagare

subliniază că „este posibilă propagarea flăcării cu o încălzire neînsemnată sau chiar fără nici un fel de încălzire (flăcări reci)“ [18].

b) Este greu de admis în cazul flăcării turbulente că transferul de căldură se produce numai prin conductibilitate termică. În orice caz rolul preponderent trebuie să-l aibe transferul de căldură prin amestecare, datorită difuziei turbulente.

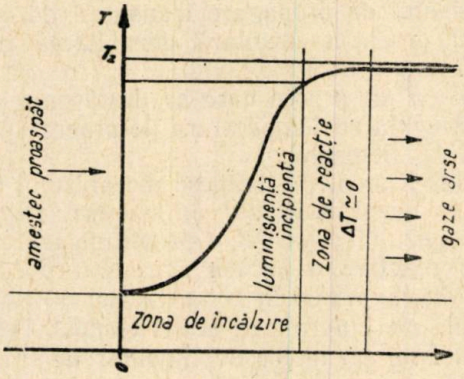


Fig. 3

c) Desfășurarea reacției într-o zonă restrînsă este posibilă în flăcările laminare; toate datele experimentale [2], [4], [13], infirmă existența unei zone restrînse de reacție în flăcările turbulente. Dacă ar fi să menționăm numai variația concentrației de combustibil și CO_2 în adîncimea zonei de ardere precum și însăși adîncimea zonei de ardere de ordinul a zeci de milimetri, ar fi suficient pentru a arăta că e greu de imaginat în flăcările turbulente „mutarea“ în stratul vecin a reacției de oxidare.

Mecanismul termic de propagare este propriu flăcărilor laminare numai în anumite condiții particulare; extrapolarea acestui mecanism din domeniul flăcărilor laminare în cel al flăcărilor turbulente nu poate fi admisă.

Întrucît arderea se desfășoară într-o zonă largă, ceea ce atestă existența unor transformări chimice relativ lente, noi considerăm că modelul lui Lewis și Elbe este mai aproape de realitate întrucît el îmbină organic fenomenul de ardere cu cel de destindere. Cum nu este rațional să se extrapoleze în mod mecanic modelul arderii izobare din domeniul flăcărilor laminare în cel al flăcărilor turbulente considerăm necesar și convenabil pentru calcule și experiențe, utilizarea unui factor de corecție sub următoarea formă.

Fie ecuția de stare a gazelor conținute în tranșă înainte de ardere.

$$p\Delta V_t = M_n R T_n \qquad (3$$

unde :

M_n — numărul de moli de amestec nears, prezent în tranșă ;

T_n — temperatura gazelor din tranșă egală cu temperatura amestecului nears în momentul considerat.

Dacă se consideră arderea izobară și completă se determină temperatura flăcării pe baza bilanțului energetic la arderea a 1 kg combustibili.

$$\frac{H_i}{M_0(1+\gamma)} + Cp_{aer}(T_n - T_0) = \mu\, Cp_{g.a.}(T_f - T_0). \tag{4}$$

unde :

H_i — puterea calorifică inferioară a combustibilului ; dacă amestecul este bogat, se introduce în relația (4) puterea calorifică incompletă ;

M_0 — numărul de moli de amestec proaspăt ;

γ — coeficientul gazelor arse reziduale ;

μ — coeficientul total de variație molară ;

T_0 — temperatura standard ;

T_n — temperatura amestecului nears în momentul considerat ;

T_f — temperaturii gazelor arse ;

Cp_{aer} $Cp_{g.a.}$ — căldurile specifice ale aerului și gazelor arse, variabile liniar cu temperatura.

Fie ecuația de stare a gazelor din tranșă, după ardere

$$P\Delta V = M_f R T_f. \tag{5}$$

unde :

M_f — este numărul de moli de gaze arse ;

Împărțim ecuația (5) prin (3)

$$\frac{\Delta V}{\Delta V_t} = \mu \frac{T_f}{T_n} \tag{6}$$

sau

$$\frac{\Delta V - \Delta V_t}{\Delta V_t} = \frac{\mu T_f - T_n}{T_n} \tag{7}$$

Ultima ecuație reprezintă creșterea relativă a volumului tranșei după ardere, presupunînd arderea izobară și completă. În realitate nu se realizează nici una dintre aceste condiții deaceea creșterea relativă a volumului tranșei este mai mică atît din cauza destinderii cu creștere de presiune cît și din cauza gradului incomplet de ardere.

Dacă raportul

$$\frac{\mu T_f - T_n}{T_n}$$

reprezintă creşterea relativă a volumului tranşei în condiţiile arderii complete şi izobare, atunci fracţiunea

$$\chi \frac{\mu T_f - T_n}{T_n}$$

reprezintă creşterea relativă reală a volumului tranşei astfel încît se obţine:

$$\frac{\Delta V - \Delta V_t}{\Delta V_t} = \frac{\chi(\mu T_f - T_n)}{T_n}. \tag{8}$$

Potrivit dezvoltărilor matematice care urmează factorul x pe care îl denumim *„gradul real de creştere relativă a volumului tranşei"*, se poate determina direct din diagrama indicată.

Pentru simplificare notăm:

$$\theta = (\mu T_f - T_n) \tag{9}$$

unde θ reprezintă *factorul de temperatură*. Astfel, relaţia (8) devine

$$\frac{\Delta V - \Delta V_t}{\Delta V_t} = \chi \frac{\theta}{T_n}. \tag{10}$$

Din figura 1 rezultă evident

$$\Delta V - \Delta V_t = \Delta V_t' + \Delta V_t'' \tag{11}$$

Substituind ecuaţia (10) în ecuaţia (11) se obţine:

$$\Delta V_t' + \Delta V_t'' = \chi \frac{\theta}{T_n} \Delta V_t \tag{12}$$

În baza ipotezelor făcute la punctul 2 se scriu ecuaţiile de compresiune politropă a amestecului nears şi a amestecului parcurs de flacără

$$\left.\begin{aligned} p_1 V_f^{m_f} &= p_2 (V_f - \Delta V_t'')^{m_f} \\ p_1 V_n^{m_n} &= p_2 (V_n - \Delta V_t')^{m_n} \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

unde:

p_1 şi p_2 — presiunea din camera de ardere înainte şi după destinderea tranşei;

m_f şi m_n — exponenţii politropici de comprimare a amestecului nears şi a amestecului parcurs de flacără *).

---

* Ecuaţia compresiunii politrope a amestecului parcurs de flacără poate fi scrisă dacă temperatura este aceeaşi în tot amestecul. După cum arată Jost [5] neglijarea gradientului de temperatură în amestecul parcurs de flacără conduce la o eroare care nu depăşeşte 1%.

Relațiile (13) pot fi transcrise astfel:

$$\frac{p_1}{P_2} = \left(\frac{V_f - \Delta V_t''}{V_f}\right)^{m_f} = \left(\frac{V_n - \Delta V_t'}{V_n}\right)^{m_n}$$

$$\left(1 - \frac{\Delta V_t''}{V_f}\right)^{m_f} = \left(1 - \frac{\Delta V_t'}{V_n}\right)^{m_n}$$

Dezvoltînd în serie fiecare membru din ultima ecuație și neglijînd termenii de ordin superior se obține

$$1 - m_f \frac{\Delta V_t''}{V_f} = 1 - m_n \frac{\Delta V_t'}{V_n}$$

sau

$$\Delta V_t'' = \frac{m_n}{m_f} \frac{V_f}{V_n} \Delta V_t' \tag{14}$$

Este convenabil să se elimine din ecuația (14) volumul V_f întrucît tratarea lui sub aspect termodinamic este mai dificilă dat fiind lipsa de omogenitate termică și chimică a amestecului conținut în el.

În fiecare moment, în camera de ardere există egalitatea

$$V = V_f + V_n \tag{15}$$

unde V este volumul instantaneu al amestecului, variabil din cauza deplasării pistonului. Substituind volumul V_f din [15] în [14] se obține

$$\Delta V_t'' = \frac{m_n}{m_j}\left(\frac{V}{V_n} - 1\right) \Delta V_t' \tag{16}$$

Se elimină volumul $\Delta V_t''$ din ecuațiile (12) și (16)

$$\Delta V_t' + \frac{m_n}{m_f}\left(\frac{V}{V_n} - 1\right) \Delta V_t' = \chi \frac{\theta}{T_n} \Delta V_t$$

sau

$$\Delta V_t' \left[1 - \frac{m_n}{m_f} + \frac{m_n}{m_f} \frac{V}{V_n}\right] = \chi \frac{\theta}{T_n} \Delta V_t .$$

O simplificare a ecuației se poate obține ținînd seama că diferența

$$1 - \frac{m_n}{m_f} = \frac{m_f - m_n}{m_f} < 0{,}1 .$$

și se poate neglija din primul membru.

Rezultă

$$\Delta V_t' = \frac{m_f}{m_n} \chi \frac{\theta}{T_n} \frac{V_n}{V} \Delta V_t \tag{17}$$

Se substituie volumul $\Delta V_t'$ din relația (17) în (2)

$$\Delta V_t + \frac{m_f}{m_n} \chi \frac{\theta}{T_n} \frac{V_n}{V} \Delta V_t = -\Delta V_n$$

sau

$$\Delta V_t = -\frac{\Delta V_n}{1 + \frac{m_f}{m_n} \chi \frac{\theta}{T_n} \frac{V_n}{V}} \tag{18}$$

Ultima relație se introduce în (1)

$$\Delta G_n' = -\frac{\gamma_n \Delta V_n}{1 + \frac{m_f}{m_n} \chi \frac{\theta}{T_n} \frac{V_n}{V}}. \tag{19}$$

Greutatea amestecului nears cuprins inițial în tranșă $\Delta G_n'$, trebuie să fie egală cu reducerea greutății amestecului nears ΔG_n, la deplasarea frontului de aprindere, adică

$$\Delta G_n' = -\Delta G_n \tag{20}$$

Substituind (20) în (19) se obține

$$\Delta G_n = \frac{\gamma_n}{1 + \frac{m_f}{m_n} \chi \frac{\theta}{T_n} \frac{V_n}{V}} \Delta V_n \tag{21}$$

sau trecînd la infiniți mici, ecuația (21) devine

$$\left(1 + \frac{m_f}{m_n} \chi \frac{\theta}{T_n} \cdot \frac{V^u}{V}\right) dG_n = \gamma_n dV_n \tag{22}$$

In fiecare moment volumul V_n este evident precizat de relația

$$V_n = G_n \cdot \frac{1}{\gamma_n} \tag{23}$$

unde G_s este greutatea amestecului nears iar γ_n greutatea lui specifică.

La un moment dat, bilanțul masic în camera de ardere este

$$G_s = G_f + G_n$$

unde G_s este greutatea amestecului în momentul declanșării scînteii iar G_n și G_f sînt greutățile amestecului din partea nearsă, respectiv partea parcursă de flacără.

Din ultima relație rezultă:

$$G_n = G_s \left(1 - \frac{G_f}{G_s}\right)$$

Dacă se notează cu $x_f = \frac{G_f}{G_s}$ *- fracțiunea din amestec cuprinsă de frontul de aprindere la un moment dat,* atunci ultima relație devine

$$G_n = G_s (1 - x_f) \tag{24}$$

Dacă γ_s și p_s sînt greutatea specifică a amestecului și respectiv presiunea în momentul declanșării scînteii electrice, iar amestecul nears este comprimat politropic de către frontul de aprindere, atunci

$$\gamma_n = \gamma_s \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}} \tag{25}$$

Substituind (24) și (25) în (23) se obține

$$V_n = G_s(1 - x_f) \frac{1}{\gamma_s \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \tag{26}$$

Întrucît

$$\frac{G_s}{\gamma_s} = V_s. \tag{27}$$

ultima ecuație devine

$$V_n = V_s(1 - x_f) \frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \tag{28}$$

Diferențiem ecuația (28)

$$dV_n = V_s \left\{ -dx_f \frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} + (1 - x_f) d \left[\frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \right] \right\} \tag{29}$$

dar, prin definiție

$$dx_f = \frac{dx_f}{d\alpha} d\alpha \tag{30}$$

și

$$d \left[\frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \right] = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \right] d\alpha$$

unde α este unghiul de rotație a manivelei.

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \right] = - \frac{\frac{1}{m_n} \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n} - 1} \cdot \frac{1}{p_s} \frac{dp}{d\alpha}}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{2}{m_n}}}.$$

sau

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \right] = - \frac{1}{m_n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \cdot \frac{p'}{p} \tag{31}$$

unde s-a notat prescurtat $p' = \frac{dp}{d\alpha}$.

Se introduc relațiile (30) și (31) în (29)

$$dV_n = V_s \left[-\frac{dx_f}{d\alpha} \frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} d\alpha - \frac{1}{m_n}(1-x_f) \frac{1}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \frac{p'}{p} d\alpha \right]$$

sau

$$dV_n = -\frac{V_s}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \left[\frac{dx_f}{d\alpha} + \frac{1}{m_n}(1-x_f)\frac{p'}{p} \right] d\alpha . \tag{32}$$

Dacă diferențiem relația (24) se obține

$$dG_n = -G_s \frac{dx_f}{d\alpha} d\alpha . \tag{33}$$

Introducem relațiile (32) și (33) în (22)

$$-\left(1+\frac{m_f}{m_n}\chi\frac{\theta}{T_n}\frac{V_n}{V}\right) G_s \frac{dx_f}{d\alpha} d\alpha = -\frac{V_s \gamma_n}{\left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \left[\frac{dx_f}{d\alpha} + \frac{1}{m_n}(1-x_f)\frac{p'}{p} \right] d\alpha$$

După simplificări — ținînd seama de relațiile (25) și (26) — ultima ecuație devine

$$\left(1+\frac{m_f}{m_n}\chi\frac{\theta}{T_n}\frac{V_n}{V}\right)\frac{dx_f}{d\alpha} = \left[\frac{dx_f}{d\alpha} + \frac{1}{m_n}(1-x_f)\frac{p'}{p}\right]$$

sau, reducînd termenii asemenea și simplificînd prin m_n

$$\chi m_f \frac{\theta}{T_n}\frac{V_n}{V}\frac{dx_f}{d\alpha} = (1-x_f)\frac{p'}{p} \tag{34}$$

Temperatura T_n se determină din ecuația politropiei

$$T_n = T_s \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{m_n-1}{m_n}} \tag{35}$$

Substituind în ecuația (34) mărimile V_n și T_n precizate de (26) și (35) se obține

$$\frac{\chi m_f \theta}{T_s \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{m_n-1}{m_n}}} \frac{1}{V} \frac{G_s(1-x_f)}{\gamma_s \left(\frac{p}{p_s}\right)^{\frac{1}{m_n}}} \frac{dx_f}{d\alpha} = (1-x_f)\frac{p'}{p}$$

sau după simplificări

$$\chi m_f \frac{V_s p_s}{T_s} \theta \frac{1}{V} \frac{dx_f}{d\alpha} = \frac{dp}{d\alpha} . \tag{36}$$

Întrucît factorul de temperatură θ este o funcție de temperatura inițială a transei, $\theta = f(T_n)$ să urmărim variația lui.

Ecuația (4) poate fi transcrisă astfel:

$$\mu\, Cp_{ga}\, T_f = \frac{H_i}{M_0(1+\gamma)} + (\mu\, Cp_{ga} - Cp_{aer})\, T_0 + Cp_{aer}\, T_n$$

notăm

$$C_1 = \frac{H_i}{M_0(1+\gamma'_n)} + (\mu\, Cp_{ga} - Cp_{aer})\, T_0 .$$

Evident constanta C_1 nu variază practic cu temperatura.

Atunci

$$\mu\, Cp_{ga}\, T_f = C_1 + Cp_{aer}\, T_n$$

sau, împărțind prin Cp_{ga}

$$\mu\, T_f = \frac{C_1}{Cp_{ga}} + \frac{Cp_{aer}}{Cp_{ga}}\, T_n .$$

Scădem din ambii termeni mărimea T_n

$$\mu\, T_f - T_n = \frac{C_1}{Cp_{ga}} + \left(\frac{Cp_{aer}}{Cp_{ga}} - 1\right) T_n . \qquad (37)$$

Membrul stîng al ecuației reprezintă tocmai factorul de temperatură θ. Primul termen din membrul drept scade odată cu creșterea temperaturii, în timp ce al doilea crește. În ansamblu cele două variații practic se anulează.

Să presupunem că presiunea la sfîrșitul arderii crește de 8 ori — evident exagerat — față de presiunea inițială, în momentul declanșării scînteii electrice. Astfel, din relația (35) se determină temperatura inițială a ultimei transe.

$$T_n = T_s \left(\frac{8\, p_s}{p_s}\right)^{\frac{m_n - 1}{m_n}} .$$

Presupunînd $m_n = 1{,}3$, rezultă $T_n = 1{,}60\, T_s$.

Dacă $T_s = 700°K$ rezultă $T_n = 1120° K$.

Pe baza ecuației (37) pentru un amestec stoichiometric izooctan — aer rezultă (tabela 1).

Tabela 1

Mărimi finale / Mărimi inițiale	T_f	θ	$\Delta\theta$ *)
$T_s = 700°$ K	2570	2000	—
$T_n = 1120°$ K	2860	1880	6%

*) $\Delta\theta$ reprezintă scăderea în procente a factorului de temperatură.

Astfel se poate admite cu suficientă aproximație invariabilitatea factorului de temperatură la desfășurarea procesului. Pentru a repartiza uniform erorile determinarea factorului de temperatură se va face pentru o temperatură inițială egală cu temperatura care s-ar obține în punctul mort interior dacă amestecul proaspăt ar fi numai comprimat de către piston. Astfel

$$\theta = (\mu T_f - T_c). \tag{38}$$

În ecuația (36) notăm cu C_s grupul de mărimi:

$$C_s = \frac{V_s p_s}{T_s} \theta \ [\text{kgf cm}^3/\text{cm}^2]. \tag{39}$$

Constanta C_s depinde numai de condițiile inițiale, deaceea constanta C_s se numește *constantă inițială.*

În ecuația (36) se notează

$$F = m_f \cdot \chi \tag{40}$$

unde F se numește *factor de propagare.*

Cu notațiile (39) și (40) ecuația (36) devine

$$\boxed{C_s \cdot F \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{dx_f}{d\alpha} = \frac{dp}{d\alpha}}. \tag{41}$$

Numim ecuația (41) *ecuația de propagare a flăcării turbulente.*

Ecuația (41) indică dependența direct proporțională a vitezei masice de propagare de viteza de creștere a presiunii.

Legea de propagare reprezintă o funcție continuu crescătoare. La încheierea propagării ea atinge o valoare maximă, ceea ce are drept consecință anularea vitezei masice de propagare. În acest caz din ecuația (41) rezultă $dp/d\alpha = 0$, adică în momentul în care $p = p_{max}$ flacăra trebuie să se stingă la perete.

Realizarea acestei condiții în motorul cu aprindere prin scînteie este determinată de un număr complex de factori.

Un rol deosebit îl are probabil variația volumului ca rezultat al deplasării pistonului. În condițiile unor avansuri normale la declanșarea scînteii, pentru care presiunea maximă se realizează după p.m.i. este posibil ca $dp/d\alpha = 0$ pentru $dx_f/d\alpha = 0$, întrucît intervine acțiunea pistonului. Deși după stingerea flăcării la perete arderea continuă presiunea nu mai poate crește din cauza deplasării pistonului în cursa de destindere.

Mișcarea turbionară a fluidului din cilindrul motor este o caracteristică fundamentală a mediului în care are loc propagarea.

Prezența lui χ în ecuație este determinată tocmai de acele particularități care apar la propagarea flăcării turbulente.

În comparație cu flacăra laminară, propagarea flăcării turbulente prezintă ca particularitate fundamentală creșterea vitezei de propagare de cîteva zeci de ori. Dacă în ecuația (41) se introduce ca variabilă timpul relativ, atunci apare o durată relativă a propagării aceeași, atît pentru flacăra laminară cît și pentru flacăra turbulentă. În consecință această distincție între cele două tipuri de flacără poate fi eliminată.

O a doua particularitate care apare la propagarea flăcărilor turbulente în comparație cu flacăra laminară o constituie adîncimea zonei de ardere. Ori, factorul χ ia în considerație tocmai gradul incomplet de ardere și destindere a transei, din cauza adîncimii zonei de ardere.

Corectînd ipoteza clasică a lui Lewis și Elba prin factorul χ s-a avut în vedere că destinderea transei se face odată cu creșterea de presiune. Ori, pe măsură ce procesul de ardere înaintează, regimul de presiuni este tot mai ridicat, astfel încît gradul de destindere a transei trebuie să se reducă din cauza lucrului mecanic suplimentar ce urmează a fi efectuat la dilatarea transei.

Pe de altă parte pe măsura dezvoltării procesului de ardere, creșterea regimului de presiune și temperatură din cilindru, determină o sporire a vitezei de reacție, ceea ce va avea drept consecință mărirea gradului de ardere în transă. Cele două tendințe opuse sînt echivalente astfel încît, se realizează condiția $\chi = \text{ct.}$

Întrucît s-a presupus ca fiind neînsemnată variația exponentului politropic m_f odată cu desfășurarea procesului, rezultă că factorul de propagare F, din ecuația (41) este de asemenea o constantă pentru un ciclu dat.

Ecuația (41) dă posibilitatea determinării directe, pe cale experimentală, a vitezei masice de propagare și a legii de propagare. Utilizînd apoi ecuația (28) se poate determina în orice moment volumul amestecului parcurs de flacără.

Dacă arderea se desfășoară în volume geometrice regulate se poate determina direct, în orice moment, poziția frontului flăcării; în cazul volumelor geometrice neregulate — camerele de ardere ale motoarelor cu aprindere prin scînteie — poziția frontului de flacără poate fi deasemeni determinată cu dificultăți de experimentare ceva mai mari (de exemplu, prin mularea camerei de ardere în ipsos).

Verificarea condiției precizate de ecuația (41), la finele propagării reprezintă o chestiune de ordin experimental. În acest scop au fost strînse la un loc un numeros grup de date experimentale, obținute de diverși

cercetători cu mijloace de investigație diferite, care pun tocmai în evidență faptul că în momentul atingerii presiunii maxime în motorul cu aprindere prin scînteie flacăra se stinge la perete.

*

* *

Stabilirea coincidenței dintre momentul în care presiunea a atins valoarea maximă și cel în care propagarea flăcării a încetat se poate efectua numai prin înregistrarea simultană a poziției frontului flăcării și a presiunii din camera de ardere.

În acest scop am folosit datele publicate în literatura de specialitate.

În ultimii 25 ani au fost publicate un număr restrîns de informații care precizează simultan poziția frontului flăcării și presiunea din cilindru.

În anul 1940, J. Rassweiller, L. Withrow și W. Cornelius publică [9] rezultatele experiențelor efectuate de ei care constă în fotografierea de ansamblu a camerei de ardere.

În anul 1957, B. S. Stecichin și M. D. Apasev publică [15] datele experimentale obținute de ei prin fotoînregistrarea unui fascicol de lumină care străbate amestecul în timpul dezvoltării procesului de ardere.

B. Salé efectuează în 1958 un grup de încercări [11] care urmăresc printre altele să precizeze cu ajutorul unei bujii de ionizare, poziția frontului de aprindere la finele propagării.

În fine, în lucrarea [12], publicată în ultimul timp, Curry Shelley folosind 49 bujii de ionizare plasate în diferite puncte ale camerei de ardere determină configurația frontului de aprindere în diferite momente ale propagării.

În toate încercările menționate s-a ridicat și curba de variație a presiunii în funcție de unghiul RAC ceea ce pentru scopul urmărit de noi prezintă o importanță cu totul deosebită.

Compararea datelor experimentale din lucrările de mai sus este deosebit de valoroasă întrucît aproape în fiecare grup de încercări au fost utilizate metode de investigație bazate pe fenomene diferite; radiația luminoasă a flăcării, ionizarea flăcării și propagarea luminii într-un mediu optic neomogen.

1. Rezultatele experimentale ale lui τ. Rassweiller ș.a. le reproducem după lucrarea [4].

În chiulasa unui motor monocilindric s-a montat o fereastră largă de cuarț; prin cinematografierea rapidă a camerei de ardere s-a determinat poziția frontului de aprindere în diferite momente ale propagării lui, pre-

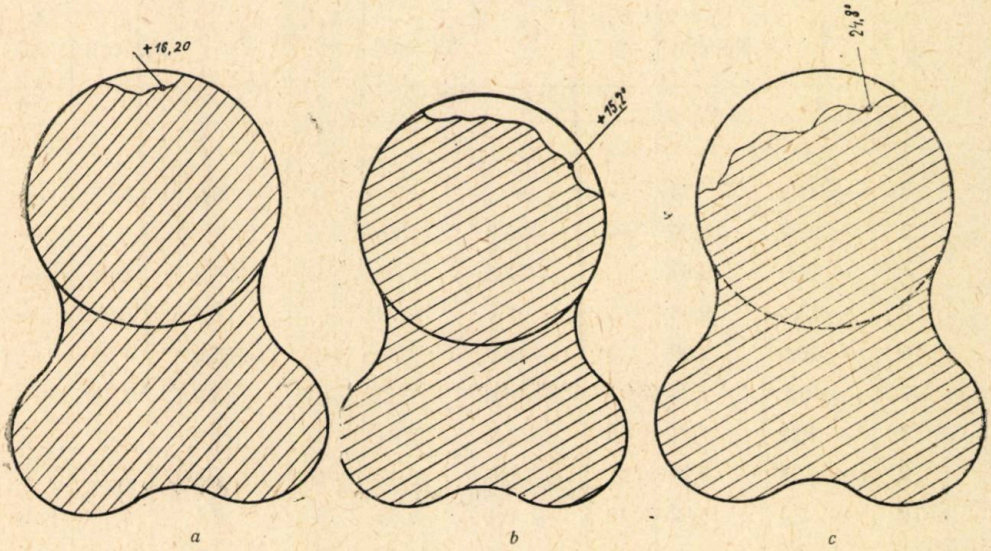


Fig. 4

cizate de valoarea unghiului RAC față de punctul mort interior. S-a realizat o viteză maximă de fotografiere de 5000 cadre de secundă.

Fotoînregistrările au fost efectuate penrtu trei dozaje diferite $\lambda_1 = 0{,}865$; $\lambda_2 = 1{,}07$; $\lambda_3 = 1{,}27$.

În tabela 2 se prezintă rezultatele experiențelor.

În figura 4 (*a*, *b*, *c*) se prezintă poziția frontului de aprindere în momentul atingerii presiunii maxime.

Se constată că pentru primele două dozaje — amestecuri bogate sau puțin sărace — există o coincidență foarte bună între momentul stingerii flăcării la perete și presiunea maximă din cilindru.

Dacă se ia ca indice de comparație volumul de amestec, în procente, care a fost cuprins de flacără pînă la atingerea presiunii maxime atunci pentru primele două dozaje eroarea nu depășește 2%; în ultimul caz eroarea e ceva mai mare 12%.

2. În lucrarea [15] s-a utilizat o metodă de experimentare cu totul originală.

Tabela 2

Nr. crt.	$\lambda = 0{,}865$			$\lambda = 1{,}07$			$\lambda = 1{,}27$		
	$\alpha°$	p Kgf/cm²	V_f %	$\alpha°$	p Kgf/cm²	V_f %	$\alpha°$	p Kgf/cm²	V_f %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	— 24,6	5,74	—	—	—	—	— 25,0	6,23	—
3	— 22,2	6,09	—	— 25,0	5,88	—	—	—	—
4	— 19,8	6,37	—	— 20,8	6,30	—	— 20,8	6,72	—
5	— 17,4	6,65	1	— 18,4	6,72	—	— 18,4	6,93	—
6	— 15,0	7,00	3	— 16,0	6,63	—	— 16,0	7,21	—
7	— 12,6	7,28	7	— 13,6	7,35	—	— 13,6	7,49	—
8	— 10,2	7,91	15	— 11,2	7,84	4	— 11,2	7,77	—
9	— 7,8	9,10	26	— 8,8	8,47	8	— 8,8	7,91	1
10	— 5,4	10,92	43	— 6,4	9,52	16	— 6,4	8,12	3
11	— 3,0	13,44	61	— 4,0	10,78	27	— 4,0	8,47	5
12	— 0,6	16,38	70	— 1,6	12,95	45	— 1,6	8,89	11
13	1,8	18,69	81	— 0,8	15,96	64	0,8	9,45	14
14	4,2	20,65	88	3,2	19,53	76	3,2	10,15	23
15	6,6	22,40	90	5,6	22,54	85	5,6	11,20	33
16	9,0	23,03	93	8,0	23,59	90	8,0	12,46	44
17	11,4	23,38	95	10,4	24,64	98	10,4	13,86	55
18	13,8	23,45	96	12,8	25,27	98	12,8	15,47	65
19	16,2	23,45	98	15,2	25,55	99	15,2	16,80	75
20	18,6	23,03	99	17,6	24,57	99,5	17,6	17,78	82
21	21,0	22,54	99	20,0	23,73	100,0	20,0	18,13	86
22	23,4	21,77	90,9	22,4	22,89	—	22,4	18,20	88
23	25,8	20,86	—	24,8	21,98	—	24,8	18,13	92
24	28,2	20,02	—	27,2	21,00	—	27,2	18,06	93
25							29,6	17,92	95
26							32,0	17,64	97
27							34,4	17,01	98
28							36,8	16,17	99
29							39,2	15,61	99
30							41,6	15,19	100

Procedeul de experimentare se bazează pe fenomenul de propagare a luminii într-un mediu neomogen din punct de vedere optic.

În locul chiulasei standard a unui motor monocilindric s-a introdus o chiulasă prevăzută cu un cilindru de oțel de secțiune dreptunghiulară.

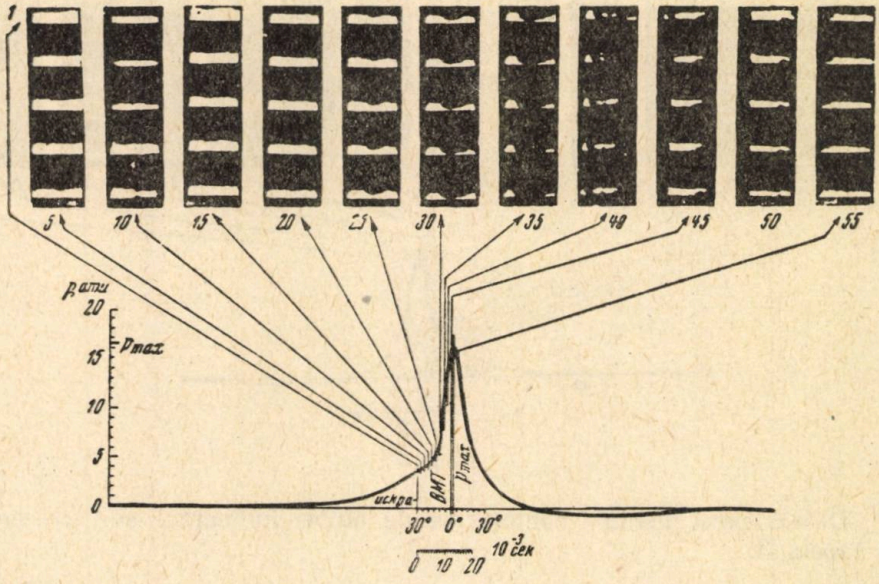


Fig. 5

În pereții laterali ai cilindrului de oțel, în două părți opuse s-au montat două ferestre de sticlă cu plane optice paralele. Prin fereastra transparentă de sticlă trece un fascisol de lumină emis de o lampă cu mercur ; lumina străbate mediul transparent din camera de ardere și ajunge pe un ecran sau film.

Apariția flăcării transformă amestecul într-un mediu optic neomogen. Din cauza modificărilor locale de temperatură și compoziție (zona de ardere) indicele de refracție se modifică. Flacăra refractă diferit de amestecul nears fascicolul de lumină, deviindu-l astfel încît nu mai ajunge pe ecran. Regiunile întunecoase de pe fotografii corespund poziției flăcării. După ce flacăra a cuprins întreg amestecul, acesta devine din nou omogen din punct de vedere optic ; lumina care străbate gazele arse ajunge din nou pe ecran.

În încercările efectuate turația motorului nu depășea 400 rot/min ; s-a utilizat un raport de comprimare 4,6—5 ; un avans la declanșarea scînteii electrice 20°—30° și un amestec bogat, $\lambda = 0{,}9$. Viteza de înre-

gistrare era de 4000 cadre/secundă astfel încît fenomenul de propagare era urmărit pe cel puțin 40 cadre.

Fotografiile tipice care au fost obținute, corelate cu diagrama desfășurată a presiunii sînt prezentate în figurile 5 și 6.

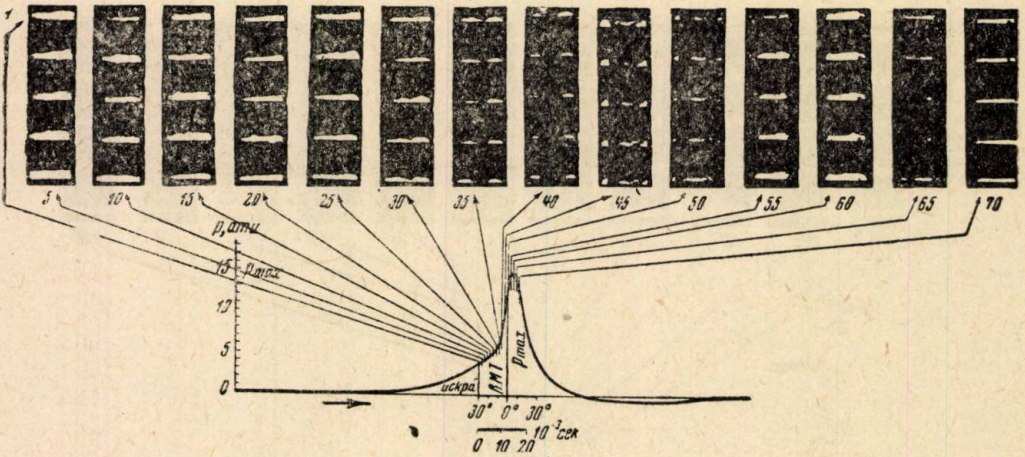


Fig. 6

Datele experimentale comunicate de autori în lucrare sînt prezentate în tabela 3.

Tabela 3

Nr. crt.	Turația motorului rot/min.	Viteza de fotografiere [cadre/s]	$\overset{*}{\tau}_{yp}$ [s]	$\overset{**}{\tau}_{yf}$ [s]	$\overset{\circ}{\alpha}_{yp} - \overset{\circ}{\alpha}_s$	$\overset{\circ}{\alpha}_{yf} - \overset{\circ}{\alpha}_s$	$\frac{\overset{\circ}{\alpha}_{gp} - \overset{\circ}{\alpha}_{yf}}{\overset{\circ}{\alpha}_{yp} - \overset{\circ}{\alpha}_s}$, %
1	375	3000	$13{,}0 \cdot 10^{-3}$	$12{,}4 \cdot 10^{-3}$	29,2	28,0	4,1
2	400	4100	$14{,}6 \cdot 10^{-3}$	$13{,}9 \cdot 10^{-3}$	35,0	33,4	4,6
3	400	3800	$13{,}3 \cdot 10^{-3}$	$11{,}8 \cdot 10^{-3}$	32,0	28,4	11,2
4	375	1600	$13{,}0 \cdot 10^{-3}$	$12{,}5 \cdot 10^{-3}$	29,2	28,1	3,8

*) τ_{yp}, $\overset{\circ}{\alpha}_{yp} - \overset{\circ}{\alpha}_s$ reprezintă intervalul de timp în secunde, respectiv în unghiuri RAC, de la declanșarea scînteii pînă la atingerea presiunii maxime.

**) τ_{yf}, $\overset{\circ}{\alpha}_{yf} - \overset{\circ}{\alpha}_s$ reprezintă intervalul de timp în secunde, respectiv în unghiuri RAC de la declanșarea scînteii pînă cînd frontul de aprindere ajunge în punctul cel mai îndepărtat al camerei, care este înregistrat pe fotografie

După cum subliniază autorii, pe fotografii se înregistrează momentul cînd frontul de aprindere ajunge în punctul *a* (fig. 7). Acest moment nu corespunde însă cu încheerea procesului de propagare întrucît flacăra

nu a cuprins încă amestecul din colțurile îndepărtate ale camerei — zonele *b* (fig. 8). De aceea, din cauza particularităților instalației de înregistrare întotdeauna se determină mai devreme momentul în care flacăra a cuprins tot amestecul, ceea ce explică diferențele într-un singur sens, între $(\alpha^{\circ}_{yp} - \alpha^{\circ}_{s})$ și $(\alpha^{\circ}_{yf} - \alpha^{\circ}_{s})$.

Menționînd erorile introduse de instalația de înregistrare autorii conchid că „*în momentul atingerii presiunii maxime în cilindru încărcătura proaspătă este cuprinsă în întregime de flacără*".

3. O instalație interesantă pentru studiul propagării flăcării este aceea folosită recent de Curry Shelley [12].

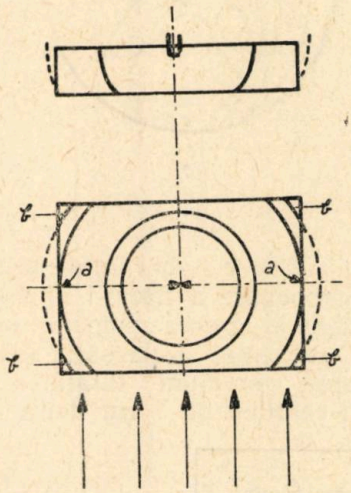


Fig. 7

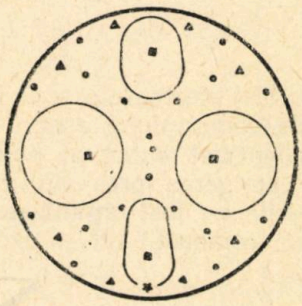


Fig. 8

In camera de ardere a unui motor de tip Waukesha-CFR au fost plasate 49 bujii de ionizare dintre care 27 în chiulasă și 22 în piston *) (fig. 8) Una dintre bujiile de ionizare a fost plasată chiar în corpul bujiei de aprindere la 4,8 mm de electrodul central. Numărul mare de bujii și așezarea lor dau posibilitatea studierii propagării flăcării într-un spațiu cu trei dimensiuni.

Semnalele de ionizare date de bujii ca și presiunea dată de indicator au fost înregistrate pe o bandă magnetică pentru a fi prelucrate direct la o mașină de calcul. Momentul atingerii presiunii maxime era înregistrat într-o instalație specială.

*) ● — Bujii plasate în chiulasă și în piston;
■ — Bujii plasate numai în piston;
▲ — Bujii plasate numai în chiulasă

Raportul de comprimare al motorului se putea modifica între limitele 5—25.

Configurația frontului de aprindere la diverse unghiuri de rotație a manivelei, pentru două rapoarte de compresiune este prezentată în figura 9 a și b.

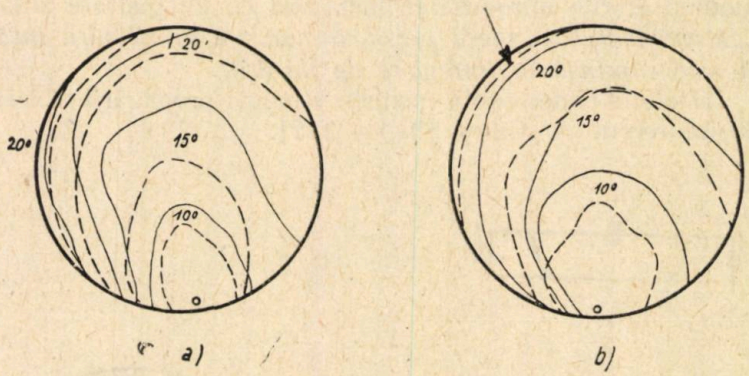


Fig. 9

Au fost efectuate o serie de experiențe pentru a stabili influența raportului de compresiune asupra duratei de propagare a flăcării pînă la cel mai îndepărtat punct al camerei de ardere și asupra timpului necesar pentru atingerea presiunii maxime (din momentul declanșării scînteii). Încercările au fost organizate în următoarele condițiuni: turația — 1200 rot/min; combustibilul — izooctan cu un conținut de 1 cm³ tetra-etil de

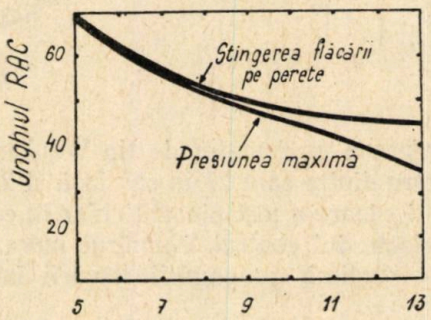


Fig. 10

plumb la 11.; avansul la declanșarea scînteii: valoarea necesară pentru obținerea presiunii efective maxime; carburatorul reglat pentru dozajul de putere maximă.

Rezultatele încercărilor sînt prezentate în figura 10.

Experiențele evidențiază o coincidență perfectă între durata necesară pentru atingerea presiunii maxime și durata de timp necesară propagării flăcării pînă la cel mai îndepărtat punct al camerei de ardere, pentru

rapoarte de compresiune mai mici decît 8. După cum rezultă din figura 11, chiar la o valoare a raportului de compresiune egală cu zece diferența dintre cele două intervale de timp este de 7,5%. La rapoarte de compresiune mai mari apare o divergență a curbelor care se explică atît prin particularitățile constructive ale motorului experimental cît și prin particularitățile propagării flăcării în medii foarte dense.

Ar fi fost interesant dacă la rapoarte mari de compresiune experiențele ar fi fost organizate într-o cameră prevăzută cu praguri de turbulență.

4. Cele trei grupuri de experiențe menționate mai sus prezintă ca o caracteristică principală, cercetarea coincidenței dintre momentul atingerii presiunii maxime și momentul stingerii flăcării pe pereți pentru fiecare ciclu în parte.

Din cauza fenomenului de dispersiune ciclică, în studiul arderii se utilizează diagrame medii. De aceea, prezintă interes și coincidența statistică dintre cele două momente.

Caracterul statistic al procesului de ardere este cercetat în lucrarea [11]. Prin prelucrarea rezultatelor publicate în această lucrare, noi am obținut [3] și o bună coincidență statistică între cele două momente. De exemplu, în condițiile experienței precizate în fig. 59 [11], pentru 940 cicluri succesive din 1000, semnalul bujiei de ionizare din fundul camerei de ardere, coincide cu momentul de presiune maximă din diagrama medie.

În concluzie se poate afirma că cele patru grupuri de experiențe evidențiază cu o aproximație satisfăcătoare coincidența dintre momentul atingerii presiunii maxime și momentul stingerii flăcării pe perete.

Catedre de cazane și mașini termice

BIBLIOGRAFIE

1. *Aramă C.* — Arderea normală în motorul cu aprindere prin scînteie (I) Revista Metalurgia și construcția de mașini, nr. 8 1961.
2. *Doroșenco V. E., Nichitschi A. I.* — Issledovanie vliania parametrov smesii na haracteristichi protessa turbulentnovo gorenia. Goreniepri ponijennâh davleniah i
3. *Grünwald B.* — Influența adîncimii zonei de ardere din flacăra turbulentă asupra procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie. Lucrare de disertație — Institutul Politehnic București — 1963.
4. *Inozemțev N. V., Koșkin V. K.* — Protesâ sgorania v dvigateliah. Mașghiz — 1949.
5. *Jost V.* — Explosions und Verbrennungsvorgänge in Gasen. Berlin 1939.
6. *Lewis B., Elbe von G.* — Combustion, flames, and explosions of gases. New-York and Londra 1961.

7. *Lewis B., Elbe von G.* — Plamena v neturbulentnâh vzrâvciatâh gazah. Proțesî gorenia, Moscova 1961.
8. *Mallard E.,* Le Châtelier H. — Ann. des Mines Série 4, 8, 274 (1883).. 4, 8, 274 (1883).
9. *Rassweiler I., Withrow L. and Cornelius W.* — Engine combustion and pressure development, SAE Journal vol. 46, 1 — 1940.
10. *Ricardo H. R.,* — The high speed internal-combustion engine (Third edition) London 1944.
11. *Salé B.* — Contribution a l'étude de la combustion normale dans les moteurs a allumage commandé. Revue de l'Institute Français du Pétrole, nr. 6, 7, 8, 9, 1958.
12. *Shelley Curry* — A three — dimensional study of flame propagation in a spark ignition engine. SAE Preprints, s.a., nr. 452 B, 20.
13. *Socolic A. S.* — Ob experimentalnoi osnove teorii turbulentnovo gorenia.. Gorenia v turbulentnom potoke. Ed. Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova, 1959.
14. *Socolic A. S.* — Samovosplamenemie, plamia i detonaţia v gazah. Ed. Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova, 1960.
15. *Stecichin B. S., Apaşev M. D.* — O metode sovmestnovo issledovania rasprostranenia plamenii i izmenenia davlenia v dvigatele s iscrovîm zajiganiem. Teoria, construcţia, rasciot i ispătanie dvigatelei vnutrenevo sgoronia. Ed. Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova — 1957.
16. *Sviridov B. Iu.* — Termodinamiceschii analiz proţesa zgorania v dvigatele s iscrovâm zajiganiem. Teoria, construcţia, rasciot i ispătanie dvigatelei vnutrenevo sgorania. Ed. Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova — 1957.
17. *Zeldovici I. B., Frank-Kamenetchi L. A.* — Teoria teplovovo rasprostranenia plameni. Jurnal Fiziceschi Himii, nr. 12, 100, 1938.
18. *Zeldovici I. B., Frank-Kamenetchi D. A.* — K teorii ravnomernovo rasprostranenia plamenii. Doclad Academia Nauk, tom. 19, 693, 1938.

УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЛАМЕНИ В ДВИГАТЕЛЯХ С ИСКРОВЫМ ЗАЖИГАНИЕМ

(Краткое содержание)

Автор устанавливает отношения между величинами состояния смеси в цилиндре двигателя с искровым зажиганием и массовой скоростью распространения пламени. Уравнение использует классическую модель распространения, учитывая глубину зоны горения турбулентного пламени. На основе установленного уравнения, экспериментальные данные многих авторов, опубликованные в зарубежной литературе, приобретают единое истолкование.

AN EQUATION OF PROPAGATING THE TURBULENT FLAME IN A SPARK IGNITION ENGINE

(Summary)

The author establishes a ration between the state parameters of the mixture in the cylinder of a spark ignition engine and the mass speed of propagating the flame. The equation corrects the classical pattern of propagation by taking into account the depth of the combustion zone of the turbulent flame. On the basis of the established equation, the experimental data found out by many authors and published in the foreign literature account for a unitary interpretation.

UNE ÉQUATION DE LA PROPAGATION DE LA FLAMME TURBULENTE DANS LE MOTEUR À ALLUMAGE PAR ÉTINGELLE

(Résumé)

L'auteur établit une relation entre les grandeurs d'état du mélange dans le cylindre d'un moteur à allumage par étincelle et la vitesse de masse de propagation de la flamme. L'équation corrige le modèle classique de la propagation, tenant compte de la profondeur de la zone de combustion de la flamme turbulente.

Sur la base de l'équation établie, les données expérimentales de plusieurs auteurs, publiées dans la littérature étrangère acquièrent une interprétation unitaire.

EINE GLEICHUNG DER FORTPFLANZUNG DER TURBULENTEN FLAMME IM MOTOR MIT FUNKENZÜNDUNG

(Zusammenfassung)

Der Verfasser stellt eine Beziehung zwischen der Zustandsgrössen des Gemisches im Zylinder eines Motors mit Funkenzündung und der Massengeschwindigkeit der Fortplanzung der Flamme, fest. Die Gleichung verbessert das klassische Modell der Fortpflanzung, indem die Tiefe der Brennzone in der turbulenten Flamme berücksichtigt wird. Auf Grund der erzielten Gleichungergeben die Versuchsresultate mehrerer Autoren, die in der ausländischen Literatur veröffentlicht wurden, eine einheitliche Auswertung.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

ENERGETICĂ

SINTEZA REȚELELOR DE CORECȚIE ÎN SERIE PRIN METODA SISTEMULUI ECHIVALENT DE ORDINUL II *)

SERGIU CĂLIN

A. Considerații introductive.

Sinteza rețelelor de corecție în serie — pentru sisteme de reglare automată liniare — se efectuează atît prin metode de frecvență [1, 2, 3, 4], cît și prin metoda hodografului rădăcinilor [5, 6], fiecare metodă prezentînd avantaje în anumite domenii de utilizare.

În lucrarea de față este expusă o metodă de frecvență pentru sinteza rețelelor de corecție în serie, care se deosebește de cele prezentate în literatura existentă prin modul în care se obține caracteristica logaritmică atenuare-frecvență a sistemului corectat (caracteristica dorită) din performanțele impuse sistemului după corecție.

După cum se știe, sinteza rețelelor de corecție în serie prin metodele de frecvență se efectuează cu ajutorul caracteristicilor logaritmice atenuare-frecvență.

Notînd cu $Y_i(s)$ funcția de transfer a sistemului dat inițial, în stare deschisă, și cu $Y_c(s)$ funcția de transfer a elementului (sau elemen-

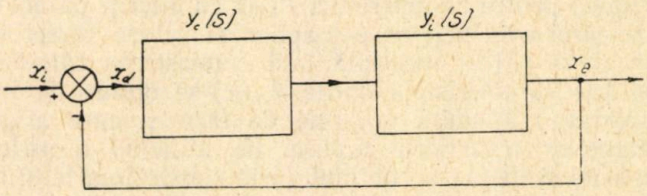


Fig. 1

telor) de corecție în serie (fig. 1), rezultă pentru sistemul corectat, în stare deschisă, funcția de transfer

$$Y_d(s) = Y_c(s) \cdot Y_i(s) \tag{1}$$

*) Comunicare prezentată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din I.P.B. — 7—8 aprilie 1962.

respectiv, înlocuind $s=j\omega$ se obține

$$Y_d(j\omega) = Y_c(j\omega) \cdot Y_i(j\omega). \tag{2}$$

Din (2) rezultă relația simplă între caracteristicile logaritmice atenuare-frecvență

$$A_d(\omega) = A_c(\omega) + A_i(\omega) \tag{3}$$

unde $A_d(\omega)$ este caracteristica logaritmică atenuare-frecvență a sistemului corectat, în stare deschisă (caracteristica dorită);
$A_c(\omega)$ — caracteristica logaritmică atenuare-frecvență a elementului (elementelor) de corecție în serie;
$A_i(\omega)$ — caracteristica logaritmică atenuare-frecvență a sistemului dat inițial, în stare deschisă.

Se obține astfel din relația (3) caracteristica logaritmică atenuare-frecvență a elementului de corecție în serie necesar:

$$A_c(\omega) = A_d(\omega) - A_i(\omega). \tag{4}$$

Caracteristica $A_i(\omega)$ este cunoscută, întrucît pentru sistemul necorectat dat inițial se cunoaște funcția de transfer $Y_i(s)$ Principala problemă la corecția în serie prin metode de frecvență constă în determinarea caracteristicii dorite $A_d(\omega)$ din performanțele care se impun sistemului corectat, întrucît după aceea caracteristica $A_c(\omega)$ a elementului de corecție rezultă imediat, grafic, prin efectuarea scăderii indicată de relația (4).

Din aspectul caracteristicii $A_c(\omega)$ obținute se deduce apoi funcția de transfer a elementului de corecție și deci realizarea sa fizică.

Pentru determinarea caracteristicii dorite $A_d(\omega)$ din performanțele impuse sistemului corectat, în literatura de specialitate sînt recomandate diverse metode. Astfel, în [1] caracteristica dorită se obține cu ajutorul unor curbe care exprimă dependența dintre frecvența de tăiere ω_c a caracteristicii dorite $A_d(\omega)$ și performanțele impuse sistemului corectat, dependență stabilită prin intermediul caracteristicii reale de frecvență $P(\omega)$ a sistemului închis și obținută pe baza construcției unei serii întregi de procese tranzistorii pentru caracteristici $P(\omega)$ cu diferiți parametri. Această metodă — ale cărei concluzii se pot aplica și pentru corecția în paralel, cum s-a făcut și în [7] — necesită deci cunoașterea caracteristii $P(\omega)$.

În [2] și [4] caracteristica dorită $A_d(\omega)$ se obține fie impunîndu-se sistemului corectat o anumită margine de fază γ, care asigură respectarea performanțelor tranzitorii impuse, fie utilizînd o serie de nomograme — existente și în [1] — obținute prin construirea unui mare număr de procese tranzistorii pentru sisteme automate de anumite tipuri, cu diverși parametri, nomograme care oferă dependența dintre performanțele impuse și anumite valori ce definesc caracteristica dorită $A_d(\omega)$. Această metodă poate fi însă folosită numai dacă sistemul respectiv poate fi încadrat în tipurile de sisteme pentru care sînt construite nomogramele.

În cele ce urmează este expusă o metodă simplă pentru determinaraea caracteristicii dorite $A_d(\omega)$ din performanțele impuse sistemului corectat, considerîndu-se că aceste performanțe vor fi realizate de un sistem de ordinul II (avînd la numitorul funcției de transfer a sistemului

deschis un polinom de gradul II) — numit sistem echivalent de ordinul II — și apoi trecîndu-se la sistemul corectat de un ordin oarecare (avînd la numitorul funcției de transfer a sistemului deschis un polinom de un grad oarecare), această trecere fiind astfel făcută, încît performanțele sistemului obținut să nu difere decît în măsură neglijabilă de performanțele sistemului de ordinul II.

Metoda unui sistem echivalent de ordinul II a fost utilizat de autor și în [8, 9], atît în scopul sintezei generale a sistemelor automate [8], cît și pentru determinarea aproximativă a performanțelor tranzitorii ale sistemelor automate liniare din anumite categorii [9]. În prezenta lucrare se expune posibilitatea aplicării acestei metode și pentru corecția în serie. Ca și în [8, 9], se consideră acele sisteme de ordinul II, la care funcția de transfer $Y(s)$ a sistemului în stare deschisă are un pol în origină — sisteme foarte frecvent întîlnite în practică.

B. Relația dintre suprareglajul maxim σ și marginea de fază γ pentru sistemele de ordinul II.

Întrucît unele metode pentru sinteza rețelelor de corecție în serie, expuse în literatură, pornesc — așa cum s-a arătat mai înainte — de la o anumită margine de fază dorită γ a sistemului corectat, este utilă determinarea unei relații între marginea de fază γ și suprareglajul maxim σ pentru un sistem de ordinul II, deoarece în cadrul metodei expuse în continuare performanțele tranzitorii se determină pornind de la suprareglajul maxim impus: stabilirea relației menționate face ca metoda sistemului echivalent de ordinul II să poată fi utilizată și atunci cînd performanțele impuse cuprind marginea de fază γ în locul suprareglajului maxim σ.

Un sistem de ordinul II are în stare închisă [8, 10] funcția de transfer

$$Y_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2z\omega_n s + \omega_n^2} \tag{5}$$

unde ω_n este pulsația naturală a sistemului neamortizat;

z — factorul de amortizare.

În stare deschisă, același sistem va avea funcția de transfer

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2z\omega_n)} \tag{6}$$

Înlocuind $s = j\omega$ în (6) se obține expresia caracteristicii amplitudine-fază

$$Y(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2z\omega_n)}. \tag{7}$$

Reprezentînd caracteristica amplitudine-fază în planul complex (fig. 2), rezultă imediat

$$\cos\gamma = |M(\omega_c)| \tag{8}$$

unde ω_c este frecvența de tăiere, la care $|Y(j\omega_c)| = 1$ și $A(\omega_c) = 0$;
$M(\omega_c)$ — partea reală a vectorului complex $Y(j\omega)$, pentru $\omega = \omega_c$.
Din (7) se obține

$$M(\omega) = -\frac{\omega_n^2}{\omega^2 + 4z^2\omega_n^2} \tag{9}$$

și deci, înlocuind (9) în (8) pentru $\omega = \omega_c$ rezultă

$$\cos\gamma = |M(\omega_c)| = \frac{\omega_n^2}{\omega_c^2 + 4z^2\omega_n^2}. \tag{10}$$

În [8] s-a arătat că pentru caracteristica logaritmică asimptotică atenuare-frecvență a unui sistem de ordinul II, definit de expresia (7), are loc relația

$$\omega_c = \frac{\omega_n}{2z} \tag{11}$$

unde ω_c este frecvența la care caracteristica logaritmică asimptotică atenuare-frecvență taie axa absciselor.

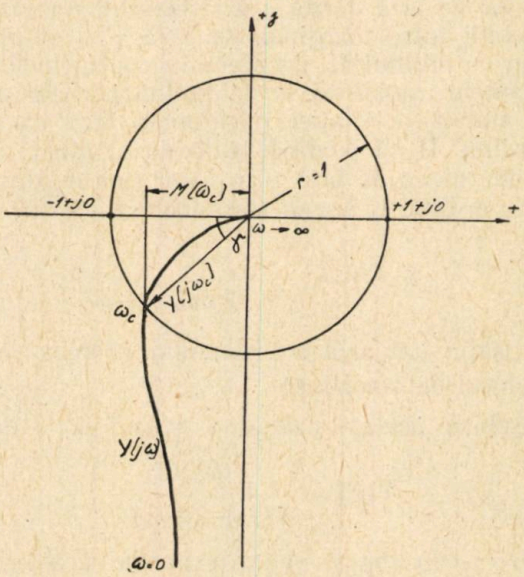


Fig. 2

Înlocuind (11) în (10) rezultă

$$\cos\gamma = \frac{1}{4z^2 + \frac{1}{4z^2}} \tag{12}$$

deci

$$\gamma = \arccos \frac{1}{4z^2 + \frac{1}{4z^2}} \tag{13}$$

Întrucît în [9] și [10] este dată relația și curba de dependență între suprareglajul maxim σ și factorul de amortizare pentru un sistem de ordinul II — găsindu-se imediat valoarea corespunzătoare unui suprareglaj maxim σ impus — relația (13) permite ca prin introducerea valorii z, obținute din curba menționată, să se găsească marginea de fază γ care corespunde suprareglajului maxim σ fixat prin performanțele impuse sistemului de ordinul II.

În cazul cînd în locul caracteristicilor logaritmice asimptotice se folosesc caracteristicile logaritmice exacte, pentru micșorarea erorilor de calcul, atunci în locul relației aproximative (11) trebuie obținută o relație exactă.

În acest scop, se pornește de la faptul că prin definiție

$$|Y(j\omega_c)| = 1 \tag{14}$$

unde ω_c este frecvența la care caracteristica logaritmică exactă atenuare-frecvență taie axa absciselor.

Înlocuind (7) în (14) rezultă

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 4z^2\omega_n^2}} = 1$$

și de aci se obține

$$\omega_c = \pm \omega_n \sqrt{-2z^2 \pm \sqrt{4z^4 + 1}} \tag{15}$$

Se constată că pentru a se obține o valoare reală pentru ω_c este necesar ca în expresia (15) să se adopte numai semnul plus sub radical, deci se poate scrie

$$\omega_c = \pm \omega_n \sqrt{-2z^2 + \sqrt{4z^4 + 1}} \tag{16}$$

Introducînd (16) în (10) se obține — în locul relației aproximative (12) — relația exactă

$$\cos \gamma = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2(-2z^2 + \sqrt{4z^4 + 1}) + 4z^2\omega_n^2}$$

respectiv

$$\cos \gamma = \frac{1}{2z^2 + \sqrt{4z^4 + 1}} \tag{17}$$

sau

$$\gamma = \arccos \frac{1}{2z^2 + \sqrt{4z^4 + 1}}. \tag{18}$$

Relațiile stabilite (13) și (18) conduc la trasarea unor curbe de dependență între z și γ. Acestea sînt necesare atunci cînd performanțele impuse sistemului corectat sînt date prin marginea de fază γ. Ele pot de asemenea servi pentru a compara rezultatele metodei sistemului echivalent de ordinul II cu cele ale metodelor existente în literatură pentru sinteza rețelelor de corecție în serie.

În [10] este prezentată o altă relație între γ și z pentru sisteme de ordinul II, fără însă a se expune și demonstrația acelei relații.

C. Determinarea caracteristicii logaritmice dorite $A_d(\omega)$ din performanțele impuse sistemului corectat.

Sistemelor de reglare automată li se impun în general performanțe în privința erorii staționare x_{ds}, suprareglajului maxim σ și duratei t_r a procesului tranzitoriu, care nu trebuie să depășească valorile impuse $x_{d\cdot si}$, σ_i și $t_{r\cdot i}$:

$$x_{ds} \leqslant x_{ds\cdot i} \tag{19}$$

$$\sigma \leqslant \sigma_i \tag{20}$$

$$t_r \leqslant t_{r\cdot i} \tag{21}$$

În unele cazuri se impune și o valoare maximă B_i pentru lărgimea de bandă B, în scopul eliminării influenței zgomotelor, apărînd astfel în plus încă o performanță impusă

$$B \leqslant B_i \tag{22}$$

În [8] s-a arătat că relațiile (19), (20) și (21) conduc la condiții privitoare la factorul total de amplificare K al sistemului, la factorul de amortizare z și la pulsația naturală ω_n a sistemului neamortizat:

$$K \geqslant K_i \tag{23}$$

$$z \geqslant z_i \tag{24}$$

$$\omega_n = \frac{4}{z_i \cdot t_{r\cdot i}} \tag{25}$$

unde K_i este valoarea impusă factorului total de amplificare pentru respectarea performanței (19);

z_i — valoarea impusă factorului de amortizare pentru respectarea performanței (20);

$t_{r\cdot i}$ — valoarea impusă durate procesului tranzitoriu.

Pentru un sistem de ordinul II, avînd pentru caracteristica amplitudine-fază expresia (7), două dintre condițiile (23), (24) și (25) definesc complet caracteristica logaritmică atenuare-frecvență, întrucît aceasta depinde numai de cei doi parametri care intervin în (7): z și ω_n.

De aceea, așa cum s-a arătat și în [8], se determină caracteristica logaritmică atenuare-frecvență $A(\omega)$ a sistemului de ordinul II (fig. 3) din condițiile (24) și (25) — adoptînd $z=z_i$ și $\omega_n=\frac{4}{z_i \cdot t_{r.i}}$ — și rezultînd pentru caracteristica asimptotică frecvența de tăiere ω_c

$$\omega_c = \frac{\omega_n}{2 z_i} = K \tag{26}$$

și frecvența de frîngere ω_a a acestei caracteristici

$$\omega_a = 2 z_i \omega_n \tag{27}$$

în conformitate cu expresia (7).

Cu relațiile (26) și (23) se verifică condiția

$$K \geqslant K_i .$$

Dacă aceasta este satisfăcută, atunci sistemul de ordinul II cu caracteristica $A(\omega)$ va satisface toate performanțele impuse sistemului corectat,

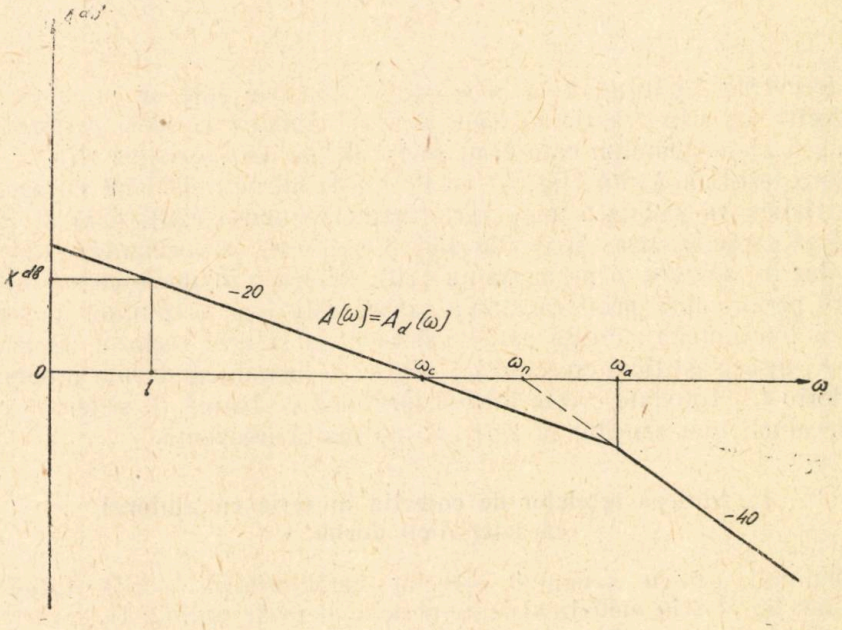


Fig. 3

și deci acest sistem de ordinul II poate fi considerat echivalent — ca performanțe — cu sistemul care trebuie obținut după corecție. În acest caz, caracteristica dorită $A_d(\omega)$ este chiar caracteristica $A(\omega)$ a sistemului de ordinul II.

Dacă valoarea K din (26) nu satisface condiția (23), atunci un segment din zona frecvențelor joase al asimptotei de joasă frecvență — care determină factorul total de amplificare și deci eroarea staționară — trebuie translat pe verticală în sus, pînă cînd la $\omega=1$ se obține $A^{dB}=K_i^{dB}$ (fig. 4). Acest segment se racordează [8] cu restul asimptotei de joasă frecvență printr-un segment de pantă — $40\ ^{dB}/_{dec}$ plasat astfel încît cele

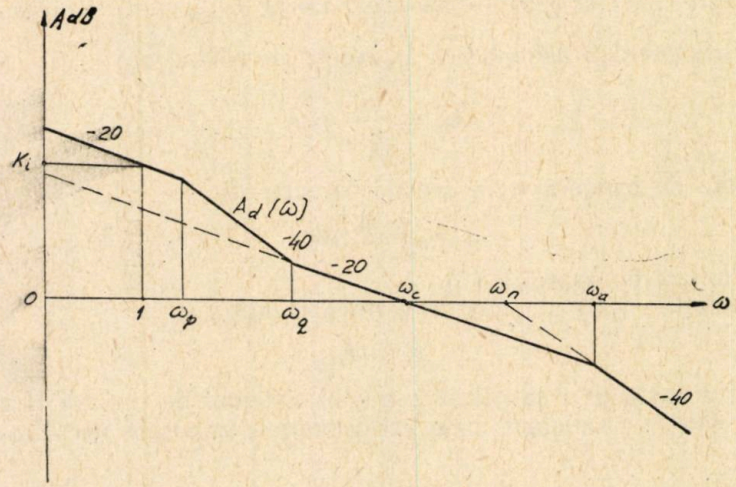


Fig. 4

două frecvențe de frîngere ω_p și ω_q de la capetele sale să fie mult mai mici decît ω_c; prin aceasta se păstrează aproximativ aceleași performanțe tranzitorii ale sistemului, care erau asigurate de caracteristica $A(\omega)$.

Caracteristica dorită (fig. 4) va fi $A_d(\omega)$, întrucît sistemul cu această caracteristică va satisface toate performanțele impuse (23), (24) și (25).

Cînd caracteristica $A(\omega)$ din fig. 3 satisface performanțele (24) și (25), dar nu asigură și performanța (23), se poate în unele cazuri obține această performanță prin translarea caracteristicii pe orizontală în sensul creșterii frecvențelor: crește astfel valoarea ω_c și deci factorul de amplificare K, în același timp crescînd ω_n și deci reducîndu-se durata procesului tranzitoriu t_r. Totodată crește însă și lărgimea de bandă B, sistemul automat devenind mai sensibil la zgomote de înaltă frecvență.

D. Sinteza rețelelor de corecția în serie cu ajutorul caracteristicii dorite.

Obținînd pentru sistemul corectat caracteristica dorită $A_d(\omega)$ din fig. 3 sau fig. 4 prin metoda sistemului echivalent de ordinul II, caracteristica rețelei de corecție rezultă efectuînd grafic operația indicată de relația (4).

Pentru ilustrarea ușurinței de aplicare a metodei propuse, în cele ce urmează se consideră un sistem inițial cu o caracteristică $A_i(\omega)$ avînd aspectul din fig. 5, 6, 7, 8, care este studiat și în [2, 4] în scopul sintezei rețelelor de corecție în serie.

Se pornește de la ipoteza că sistemul inițial, cu caracteristica $A_i(\omega)$ — format dintr-un amplificator, un generator și un motor — satisface per-

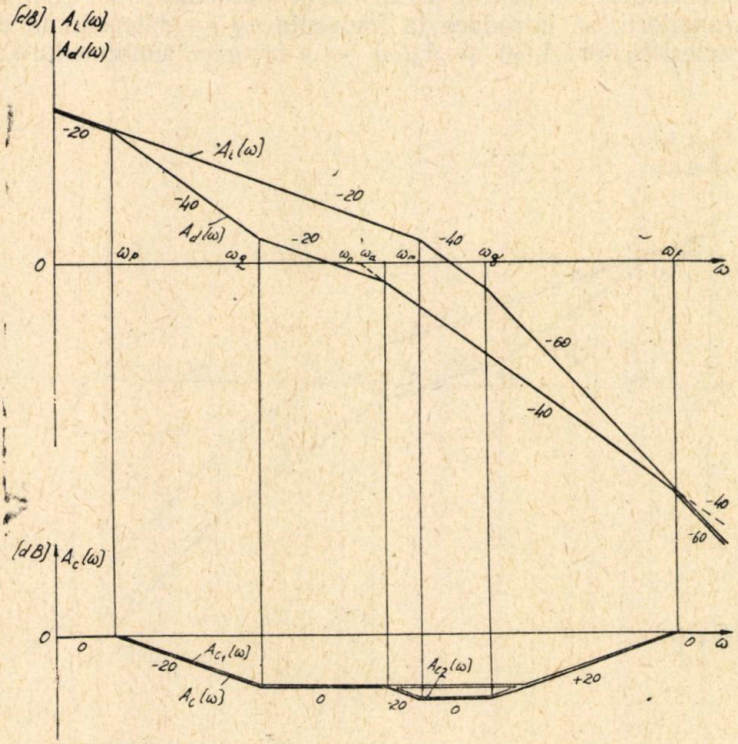


Fig. 5

formanța staționară, deci $x_{ds}=x_{ds\cdot i}$ și $K=K_i$, dar nu satisface cele două performanțe tranzitorii.

Din performanțele impuse rezultă în modul indicat anterior caracteristica dorită $A_d(\omega)$. În fig. 5, 6, 7, 8 sînt expuse diverse variante pentru pozițiile relative dintre caracteristica dorită $A_d(\omega)$ și cea a sistemului inițial $A_i(\omega)$ rezultate în conformitate cu performanțele impuse și cu parametrii sistemului inițial. În fiecare variantă se obțin anumite tipuri de rețele de corecție în serie.

În variantă din fig. 5 s-a presupus că se obține

$$\omega_a < \omega_m < \omega_g$$

unde ω_m, ω_g sînt frecvențele de frîngere ale caracteristicii $A_i(\omega)$ definite de constantele de timp ale motorului și generatorului;

ω_a — frecvența de frîngere a caracteristicii $A_d(\omega)$.

Efectuînd grafic scăderea din relația (4), se obține caracteristica $A_c(\omega)$; întrucît aspectul caracteristicii în domeniul frecvențelor foarte înalte nu prezintă importanță nici pentru performanța staționară, nici pentru performanțele tranzitorii, se introduce la frecvența ω_f — determinată de intersecția caracteristicilor $A_i(\omega)$ și $A_d(\omega)$ — o frîngere suplimentară a carac-

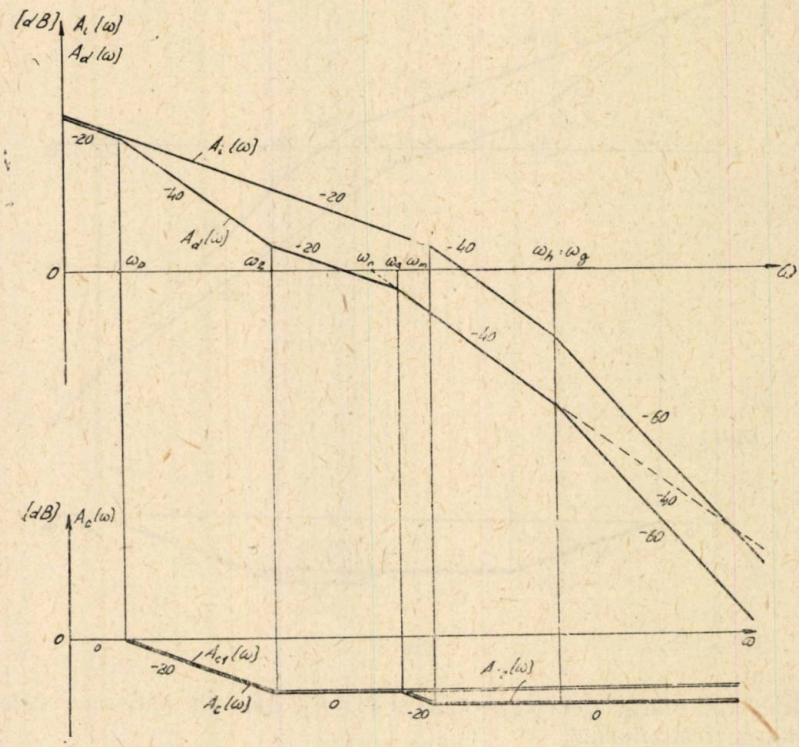


Fig. 6

teristicii dorite. Prin aceasta, păstrîndu-se toate performanțele impuse sistemului corectat, se obține suprapunerea caracteristicilor $A_i(\omega)$ și $A_d(\omega)$ pentru $\omega > \omega_f$, ceea ce conduce la o caracteristică $A_c(\omega)$ ce se poate realiza cu două rețele integro-diferențiale, fiind descompusă (fig. 5) în caracteristicile $A_{c1}(\omega)$ și $A_{c2}(\omega)$.

Introducerea frîngerii suplimentare la frecvența ω_f este admisibilă numai dacă $\omega_f > 6\omega_n$, (condiție îndeplinită pentru marea majoritate a sistemelor din practică) întrucît în caz contrar [8] această frîngere poate provoca o oarecare modificare a performanțelor tranzitorii.

În fig. 6 este reprezentat cazul cînd parametrii sistemului dat inițial și performanțele impuse conduc la caracteristici $A_i(\omega)$ și $A_d(\omega)$ pentru care rezultă $\omega_g > 6\,\omega_n$.

În acest caz, în caracteristica $A_d(\omega)$ se poate introduce o frîngere suplimentară la $\omega_h = \omega_g$, (în locul frîngerii suplimentare de la ω_f) cu menținerea performanțelor impuse sistemului corectat. Datorită acestui fapt, rezultă două rețele de corecție integratoare, caracteristica $A_c(\omega)$ descompunîndu-se în caracteristicile $A_{c1}(\omega)$ și $A_{c2}(\omega)$.

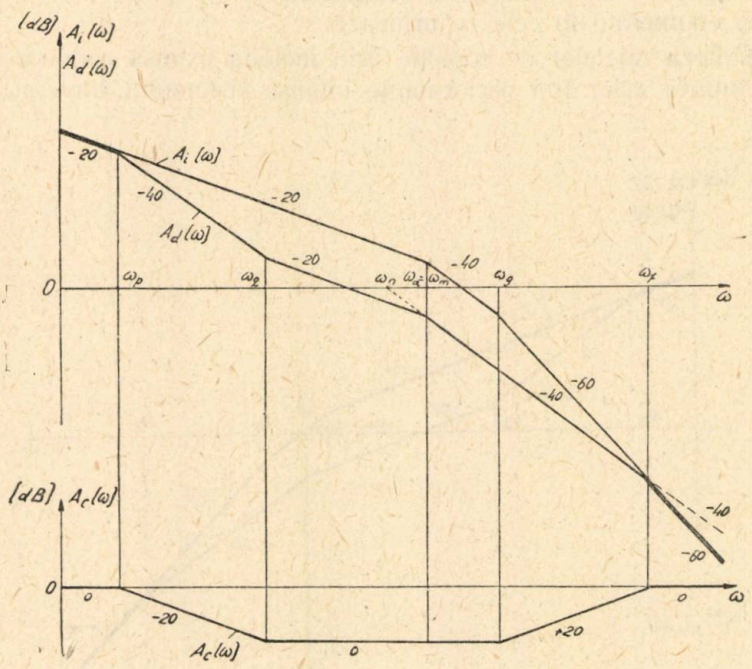


Fig. 7

Dacă pentru caracteristica dorită rezultă $\omega_a = \omega_m$ (fig. 7) atunci se obține caracteristica $A_c(\omega)$, corespunzătoare unei singure rețele integro-diferențiale.

În sfîrșit, în cazul cînd pentru caracteristica dorită rezultă $\omega_a > \omega_m$ (fig. 8), se obține — presupunînd ca și mai înainte $\omega_f > 6\omega_n$ — o caracteristică $A_c(\omega)$ ce se poate realiza cu două rețele integro-diferențiale, descompunîndu-se în caracteristicile $A_{c1}(\omega)$ și $A_{c2}(\omega)$.

În același mod, metoda sistemului echivalent de ordinul II poate conduce la sinteza rețelelor de corecție în serie și pentru alte sisteme date inițial.

Concluzii:

1. Sinteza rețelelor de corecție în serie prin metoda sistemului echivalent de ordinul II conduce simplu și rapid la determinarea rețelelor de corecție necesare pentru obținerea performanțelor impuse sistemului

corectat. În raport cu metodele de frecvență expuse în literatură pentru sinteza rețelelor de corecție în serie, metoda propusă are o serie de avantaje, enumerate în cele ce urmează.

2. Sinteza rețelelor de corecție prin metoda expusă conduce la satisfacerea tuturor celor trei performanțe impuse sistemului corectat, în timp

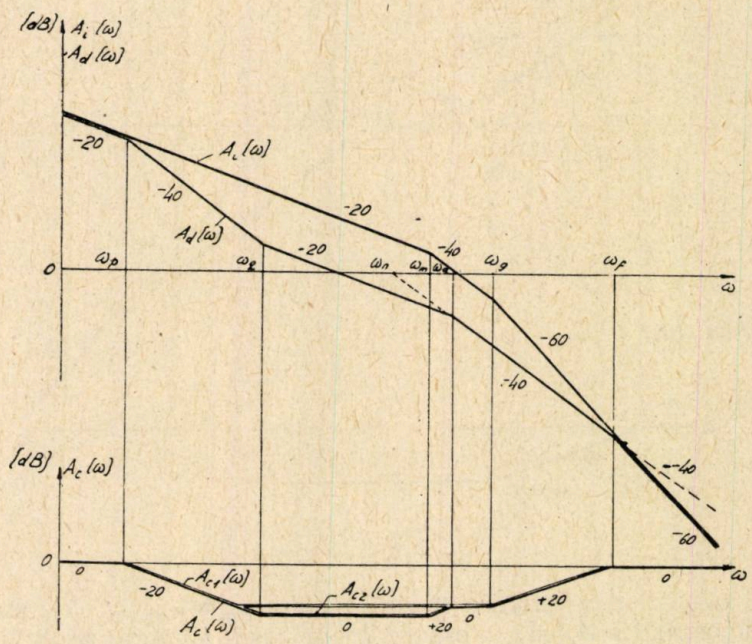


Fig. 8

ce celelalte metode de frecvență pornesc în general de la premisa asigurării a numai două performanțe; unele metode din literatură asigură satisfacerea altor parametri — cum este marginea de fază — legați prin relații complicate de cele trei performanțe principale care se impun unui sistem automat.

3. Prin metoda propusă, sinteza rețelelor de corecție în serie se efectuează fără tatonări, în timp ce celelalte metode necesită în general cîteva încercări pentru obținerea performanțelor prescrise sistemului corectat.

4. Metoda propusă nu necesită trasarea caracteristicilor logaritmice fază-frecvență $\varphi(\omega)$, cum necesită celelalte metode de frecvență și datorită acestui fapt sinteza se efectuează mai simplu și mai rapid.

Catedra de automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. *B. B. Солодовников.* — Основы автоматического регулирования, Машгиз, Москва, 1954.

2. *H. Chestnut, R. Mayer.* — Servomechanisms and regulating system design, John Wiley, New York, 1955.

3. *C. I. Penescu.* — Automatica și telemecanica sistemelor energetice, vol. 1, Ed. Acad. R.P.R. 1959.

4. *C. Vazaca.* — Analiza și sinteza sistemelor automate liniare, Ed. Acad. R.P.R., 1961.

5. *J. G. Truxal.* — Automatic feedback control system synthesis. Mc Graw Hill, New York, 1955.

6. *S. Călin.* — Sinteza directă a rețelelor derivate de corecție în serie prin metoda hodografului rădăcinilor, Probleme de automatizare III, Ed. Acad. R.P.R., 1961.

7. *S. Călin* și *V. Romert.* — Modificarea caracteristicilor dinamice prin introducerea unui circuit de corecție în dispozitivele de reglare automată a frecvenței sistemelor energetice. Probleme de automatizare I, Ed. Acad. R.P.R., 1960.

8. *S. Călin.* — Sinteza generală a sistemelor automate liniare prin intermediul caracteristicilor logaritmice atenuare-frecvență ale sistemelor în stare deschisă. Buletinul Institutului Politehnic București, 1961, tomul XXIII, fascicola 2.

9. *S. Călin.* — Considerații asupra determinării aproximative a performanțelor tranzitorii din caracteristica reală de frecvență. Probleme de automatizare IV, Ed. Acad. R.P.R. 1963.

10. *H. T. Кузовков.* Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах, Оборонгиз Москва, 1960.

СИНТЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ 2-го ПОРЯДКА

(Краткое содержание)

В работе излагается метод синтеза последовательных корректирующих цепей, исходя из заданных качественных показателей в стационарном и переходном режимах.

Метод основан на использовании только логарифмических амплитудных частотных характеристик, а желаемая логарифмическая амплитудная характеристика определяется методом эквивалснтной системы 2-го порядка, предлагаемым автором в одной предыдущей работе для общего синтеза автоматических систем.

CORRECTING CIRCUIT SYNTHESIS USING THE METHOD OF THE EQUIVALENT SYSTEM OF THE II-nd ORDER

(Summary)

The paper presents a correcting circuit synthesis method, in concordance with the imposed performances in steady-state and transient regime.

The method uses only logarithmic attenuation-frequency diagrams, the desired diagram being determinated by the method of the equivalent system of the II-nd order, proposed by the author — in an preceding paper — for the general synthesis of control system.

LA SYNTHÈSE DES RÉSEAUX CORRECTRICES EN SÉRIE PAR LA MÉTHODE DU SYSTÈME EQUIVALENT DU II-éme ORDRE

(Résumé)

Le papier présente une méthode de synthèse des réseaux correctrices en série, en conformité avec les performances imposées en régime stationnaire et transitoire.

La méthode utilise seulement les caractéristiques logarithmiques atténuation-fréquence, la caractéristique désirée étant déterminée par la méthode du système équivalent du II-ème ordre, proposée par l'auteur — dans un rapport antérieur — pour la synthèse générale des systèmes automatiques.

DIE SYNTHESE DER SERIENBERICHTIGUNGSNETZE DURCH DIE METHODE DES GLEICHWERTIGEN SYSTEMS DER GRÖSE II

(Zusammenfassung)

In der Arbeit wird eine Methode der Synthese der Serienberichtigungsnetze, ausgehend von den berichtigten System in stationären und Übergangszustand bedingten Leistungen, vorgeführt.

Die Methode wendet nur die logarithmischen Kennwerte Abdämpfung-Frequenz an, indem der gewünschte Kennwert durch die Methode des gleichwertigen Systems des Grösse II bestimmt wird, welche vom Verfasser in einer vorhergehenden Arbeit für die allgemeine Synthese der automatischen Systeme vorgeschlagen wurde.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 4

ELECTROTEHNICA

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОНЯТИЯ КАЖУЩЕЙСЯ МОЩНОСТИ ТРЕХФАЗНЫХ СИНУСОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. Н. НЭДЭЛКУ

Введение

Исследование вопросов работы электрических установок при асимметричных режимах приобретает все большее значение по мере роста мощности энергетических систем, потребления электоэнергии на нужды домашнего обихода, развития электротяги на переменном токе и. т. д.

В связи с этим большое внимание должно быть уделено теоретической разработке тех понятий, которые позволяют полнее понять электромагнитные процессы, происходящие в установках, принять технические меры, направленные на улучшение качества электроэнергии, на рациональную эксплоатацию этих установок.

В этом отношении уточнение содержания разных понятий мощности, которые встречаются в литературе, как и выявление взаимной связи между ними, являются вопросом весьма актуальным.

Кажущаяся мощность — это самое общее понятие мощности систем переменного тока.

В технической литературе, в частности, уделялось немалое внимание определению содержания и выражения понятия кажущейся мощности трехфазных несимметричных систем. Поэтому в электротехнической литературе известны многочисленные формулы и формулировки кажущейся мощности трехфазных несимметричных систем и, как правило, трудно усмотреть какую-нибудь связь или сходство между ними.

С этой точки зрения заслуживает внимания формула, предложенная Бухольцем [1] и развитая за последнее время Лурье [2].

Позже Р. А. Воронов и Г. Е. Пухов [3] предложили новую формулу для этой же величины, настаивая в то же время на том, что в случае принятия этого или другого предложения следует отказаться от всех существовавших до сих пор в литературе определений или формул.

Тут же Л. С. Лурье [4] возражает против этого предложения, подчеркивая, что приведенная им и Бухольцем формула выгодно отли-

чается от всех остальных. Таким образом, по этому вопросу до сих пор не имеется единой точки зрения.

Подчеркнув дискуссионный характер понятия кажущейся мощности трехфазных несимметричных систем, заметим, что вопреки установившемуся мнению [3], это понятие также не вполне определено даже для случаев трехфазных симметричных или однофазных систем.

По этому вопросу следует подчеркнуть:

а) в то время как всеобще принято пользоваться комплексным выражением кажущейся мощности однофазной системы, получающеися как произведение комплекса напряжения ($\dot{U}$) на сопряженный комплексу тока комплекс ($\dot{I}^*$):

$$\dot{S} = 1/2 \cdot \dot{U}\dot{I}^* = P + jQ$$

или

$$\dot{S}' = 1/2 \cdot \dot{U}^*\dot{I} = P - jQ$$

где

P — средняя активная мощность,

б) в то же время принято считать, что величина Q, представляет собой амплитуду некоторой мгновенной мощности, среднее значение которой, равняется нулю.

В таком случае возникает вопрос о математическом смысле комплексных величин $\dot{S}$ или $\dot{S}'$ реальные части которых, представляют собой среднее значение определенной мгновенной величины, а коэффициент мнимой части — нечто неопределенное.

Более интересным кажется тот факт что в то время, как по вопросу о реактивной мощности проводились в разное время в ряде стран, а также в CIGRE, многочисленные дискуссии, среди которых отмечаем продолжительную дискуссию [5, 6, 7], предшествовавшую принятию МЭК-ом выражения и единицы измерения для реактивной мощности (Стокгольм, 1931), дискуссию, имевшую место в журнале „Электричество“ по поводу статьи [8] и. т. д., в ходе которых ни разу не был поднят вопрос о кажущейся мощности, несмотря на то, что Q является одной из составляющих этой величины.

Наряду с этим следует заметить, что в технической литературе до сих пор нет ни единой точки зрения по вопросу об использовании формул $\dot{S}$ или $\dot{S}'$, а также не имеется удовлетворительное обоснование этих выражений с математической точки зрения [9, стр. 51].

В свете вышесказанного настоящая работа ставит своей целью выявить связь, которая существует между различными понятиями кажущейся мощности, а также уточнить физический смысл этого понятия.

С этой целью будем пользоваться понятием мгновенной комплексной кажущейся мощности, введенной в работе [10].

Для этого остановимся на определении этого понятия для случая однофазного синусоидального тока.

Выражение мгновенной комплексной кажущейся мощности однофазной цепи синусоидального тока.

Будем считать однофазный приемник, полное сопротивление которого:

$$\dot{Z}_a = Z_a e^{j\varphi_a} = R_a + jX_a$$

где

R_a — активное сопротивление;
X_a — реактивное сопротивление;
Z_a — амплитуда комплекса $\dot{Z}_a$;
$\varphi_a = \operatorname{arctg}(X_a/R_a)$

который подключается к сети мгновенного напряжения u_a.

Для выражения мгновенных синусоидальных напряжения и тока примем:

$$\begin{aligned} u_a &= U_a \cos(\omega t + \varepsilon_a) \\ i_a &= I_a \cos(\omega t + \beta_a) \end{aligned} \tag{1}$$

Реальные величины u_a, i_a могут быть изображены в комплексной плоскости $(+1, +j)$ через посредство так называемых вращающихся временных векторов Френеля следующим образом:

$$\begin{aligned} u_a &= 1/2 \cdot (\overleftarrow{u}_a + \overrightarrow{u}_a) \\ i_a &= 1/2 \cdot (\overleftarrow{i}_a + \overrightarrow{i}_a) \end{aligned} \tag{2}$$

где

$\overleftarrow{u}_a, \overrightarrow{u}_a$; $\overleftarrow{i}_a, \overrightarrow{i}_a$ — комплексно-сопряженные вращающиеся временные векторы Френеля (изображения):

$$\overleftarrow{u}_a = u_a + ju'_a = \dot{U}_a e^{j\omega t}$$
$$\overrightarrow{u}_a = u_a - ju'_a = \dot{U}^*_a e^{-j\omega t} \tag{3}$$

$$\overleftarrow{i}_a = i_a + ji'_a = \dot{I}_a e^{j\omega t}$$
$$\overrightarrow{i}_a = i_a - ji'_a = \dot{I}^*_a e^{-j\omega t} \tag{4}$$

$$\dot{U}_a = U_a e^{j\varepsilon_a} \quad ; \quad \dot{U}^*_a = U_a e^{-j\varepsilon_a}$$
$$\dot{I}_a = I_a e^{j\beta_a} \quad ; \quad \dot{I}^*_a = I_a e^{-j\beta_a} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u'_a &= U_a \sin(\omega t + \varepsilon_a) \\ i'_a &= I_a \sin(\omega t + \beta_a) \end{aligned} \tag{6}$$

где

$\dot{U}_a$, $\dot{U}_a^*$; $\dot{I}_a$, $\dot{I}_a^*$ — комплексно-сопряженные значения напряжения и тока.

Как видно из соотношений (3), (4) векторы $\overleftarrow{u_a}$, $\overleftarrow{i_a}$ вращаются в комплексной плоскости в положительном тригонометрическом направлении с угловой скоростью ω, а векторы $\overrightarrow{u_a}$, $\overrightarrow{i_a}$ — в отрицательном направлении с той же угловой скоростью. Комплексные величины $\dot{U}_a$, $\dot{U}_a^*$, $\dot{I}_a$, $\dot{I}_a^*$ неподвижны по отношению к системе координат.

Нетрудно заметить, что величины u'_a, i'_a также могут быт определены в зависимости от векторов Френеля:

$$\begin{aligned} u'_a &= 1/2 \cdot (-\overleftarrow{ju_a} + \overrightarrow{ju_a}) \\ i'_a &= 1/2 \cdot (-\overleftarrow{ji_a} + \overrightarrow{ji_a}) \end{aligned} \tag{7}$$

где

j — оператор поворота на 90 эл. град. в положительном тригонометрическом направлении.

Выражение мгновенной активной мощности, которую можно измерить на зажимах приемника, имеет вид:

$$p_a = u_a i_a \tag{8}$$

или, учитывая (2):

$$p_a = 1/4 \cdot (\overleftarrow{u_a} + \overrightarrow{u_a}) \cdot (\overleftarrow{i_a} + \overrightarrow{i_a}) = 1/2 \cdot (\overleftarrow{s_a} + \overrightarrow{s_a}) \tag{9}$$

Величину

$$\overleftarrow{s_a} = s_a(t) e^{j\lambda} = 1/2 \cdot \overleftarrow{u_a} (\overleftarrow{i_a} + \overrightarrow{i_a}) = p_a + jq_a \tag{10}$$

переменной амплитуды $s_a(t)$, и переменпой фазы λ — назовем мгновенной комплексной кажущейся мощностью.

Сопряженная этой величине величина, как вытекает из выражения (9) имеет вид:

$$\overrightarrow{s_a} = s_a(t) e^{-j\lambda} = 1/2 \cdot \overrightarrow{u_a} (\overleftarrow{i_a} + \overrightarrow{i_a}) = p_a - jq_a. \tag{11}$$

Назовем амплитуду мнимых частей величины, $\overleftarrow{s_a}$, $\overrightarrow{s_a}$, то-есть проекцию векторов $\overleftarrow{s_a}$, $\overrightarrow{s_a}$ на мнимую ось (q_a) мгновенной реактивной мощностью.

Как вытекает из рассмотрения соотношения (9), активная мгновенная мощность неразрывно связана с мгновенной комплексной кажущейся мощностью причем тем же образом, что и средняя активная мощность с комплексной кажущейся мощностью.

Определяя выражение для мгновенной комплексной кажущейся мощности в зависимости от векторов Френеля, можно определить

также выражение мгновенной реактивной мощности в зависимости от этих векторов:

$$q_a = 1/2 \cdot (-j\overleftarrow{s}_a + j\overrightarrow{s}_a) \tag{12}$$

или, если учесть (10), (11):

$$q_a = 1/2 \cdot (-j\overleftarrow{u}_a + j\overrightarrow{u}_a) \cdot 1/2 \cdot (\overleftarrow{i}_a + \overrightarrow{i}_a). \tag{13}$$

Далее, если учесть соотношение (7), мгновенную реактивную мощность можно выразить в зависимости от мгновенных величин напряжения и тока:

$$q_a = u'_a \, i_a. \tag{14}$$

Выражение мгновенной реактивной мощности в зависимости от мгновенных величин (14), вытекающее единственно из выражения мгновенной кажущейся мощности, соответствует предложенному выражению Ильевича, которое было одобрено комитетом № 16 CIGRE [11].

Величины $\overleftarrow{s}_a$, $\overrightarrow{s}_a$ (10), (11) также могут быть представлены в зависимости от комплексных значений напряжения и тока, если учесть соотношения (3), (4):

$$\overleftarrow{s}_a = 1/2 \cdot (\dot{U}_a \dot{I}_a^* + \dot{U}_a \dot{I}_a \, e^{j2\omega t}) \tag{15}$$

$$\overrightarrow{s}_a = 1/2 \cdot (\dot{U}_a^* \dot{I}_a + \dot{U}_a^* \dot{I}_a^* \, e^{-j2\omega t}) \tag{16}$$

откуда можно определить:

$$s_a(t) = 1/2 \cdot U_a I_a \sqrt{2}[(1 + \cos(2\omega t + 2\beta_a)] \tag{17}$$

$$\lambda = \operatorname{arctg}(q_a/p_a) = \omega t + \varepsilon_a \tag{18}$$

$$p_a = 1/2 \cdot [U_a I_a \cos\varphi + U_a I_a \cos(2\omega t + \varepsilon_a + \beta_a)] \tag{19}$$

$$q_a = 1/2 \cdot [U_b I_a \sin\varphi_a + U_a I_a \sin(2\omega t + \varepsilon_a + \beta_a)] \tag{20}$$

так как векторы Френеля $\overleftarrow{u}_a$, $\overleftarrow{i}_a$ связаны с полным сопротивлением цепи $\dot{Z}_a$ следующим соотношением:

$$\overleftarrow{u}_a / \overleftarrow{i}_a = \dot{U}_a / \dot{I}_a = \dot{Z}_a \tag{21}$$

откуда

$$\varepsilon_a - \beta_a = \varphi_a. \tag{22}$$

Также следует отметить, что формулы p_a, q_a (19), (20) идентичны формулам Ильевича для тех же величин [12 стр. 29]. В отличие от принятой в данной статье терминологии Ильевич называет величину $\overleftarrow{s}_a$ мгновенной мощностью.

Если проинтегрировать комплексную функцию $\overleftarrow{s}_a$ вещественной переменной (t) (10):

$$1/T \cdot \int_0^T \overleftarrow{s}_a \, dt = 1/T \cdot \int_0^T p_a \, dt + j1/T \cdot \int_0^T q_a \, dt \tag{23}$$

получится:

$$\dot{S}_a = S_a e^{j\varphi_a} = P_a + jQ = 1/2 \cdot \dot{U}_a \dot{I}_a^* \tag{24}$$

где

S_a — комплексная средняя кажущаяся мощность;
$\dot{S}_a$ — амплитуда комплексной кажущейся мощности;
P_a — активная средняя мощность;
Q_a — реактивная средняя мощность.

Таким же образом можно определить сопряженную величину $\dot{S}_a$, проинтегрировав (11):

$$\dot{S}_a^* = S_a e^{-j\varphi_a} = P_a - jQ = 1/2 \cdot \dot{U}_a^* \dot{I}_a \tag{25}$$

после чего для амплитуды S_a можно написать:

$$S_a = \sqrt{\dot{S}_a \dot{S}_a^*} = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1/2 \cdot U_a I_a. \tag{26}$$

Если сравнить выражения (15), (16) с (24), (25), то можно заметить, что мгновенные величины $\overleftarrow{s}_a$, $\overrightarrow{s}_a$, кроме соответствующих средних составляющих, содержат и так называемые пульсирующие составляющие:

$$\overleftarrow{s}_{2a} = 1/2 \cdot \dot{U}_a \dot{I}_a e^{j2\omega t} = \dot{S}_{2a} e^{j2\omega t} \tag{27}$$

$$\overrightarrow{s}_{2a} = 1/2 \cdot \dot{U}_a^* \dot{I}_a^* e^{-j2\omega t} = \dot{S}_{2a}^* e^{-j2\omega t} \tag{28}$$

где

$\overleftarrow{s}_{2a}$ — пульсирующая составляющая $\overleftarrow{s}_a$;
$\overrightarrow{s}_{2a}$ — пульсирующая составляющая $\overrightarrow{s}_a$;
$\dot{S}_{2a}$ — комплексная амплитуда $\overrightarrow{s}_{2a}$:
$\dot{S}_{2a}^*$ — комплексная амплитуда $\overrightarrow{s}_{2a}$;
S_a — амплитуда $\dot{S}_{2a}$, $\dot{S}_{2a}^*$:

$$S_a = \sqrt{\overleftarrow{s}_{2a} \overrightarrow{s}_{2a}} = \sqrt{\dot{S}_{2a} \dot{S}_{2a}^*} = \sqrt{\dot{S}_a \dot{S}_a^*} = 1/2 \cdot U_a I_a \tag{29}$$

откуда вытекает, что амплитуда средней комплексной кажущейся мощности равна амплитуде пульсирующей комплексной мощности.

Учитывая соотношения (24), (25) и (27) (28), можем записать выражения (15), (16) в новой форме:

$$\overleftarrow{s}_a = \underset{\cdot}{S}_a + \overleftarrow{s}_{2a} = \underset{\cdot}{S}_a + \underset{\cdot}{S}_{2a}\, e^{j2\omega t} \tag{30}$$

$$\overrightarrow{s}_a = \underset{\cdot}{S}^*_a + \overrightarrow{s}_{2a} = \underset{\cdot}{S}^*_a + \underset{\cdot}{S}^*_{2a}\, e^{-j2\omega t}. \tag{31}$$

Изображение на комплексной плоскости величины $\overleftarrow{s}_a$ показано на рис. 1.

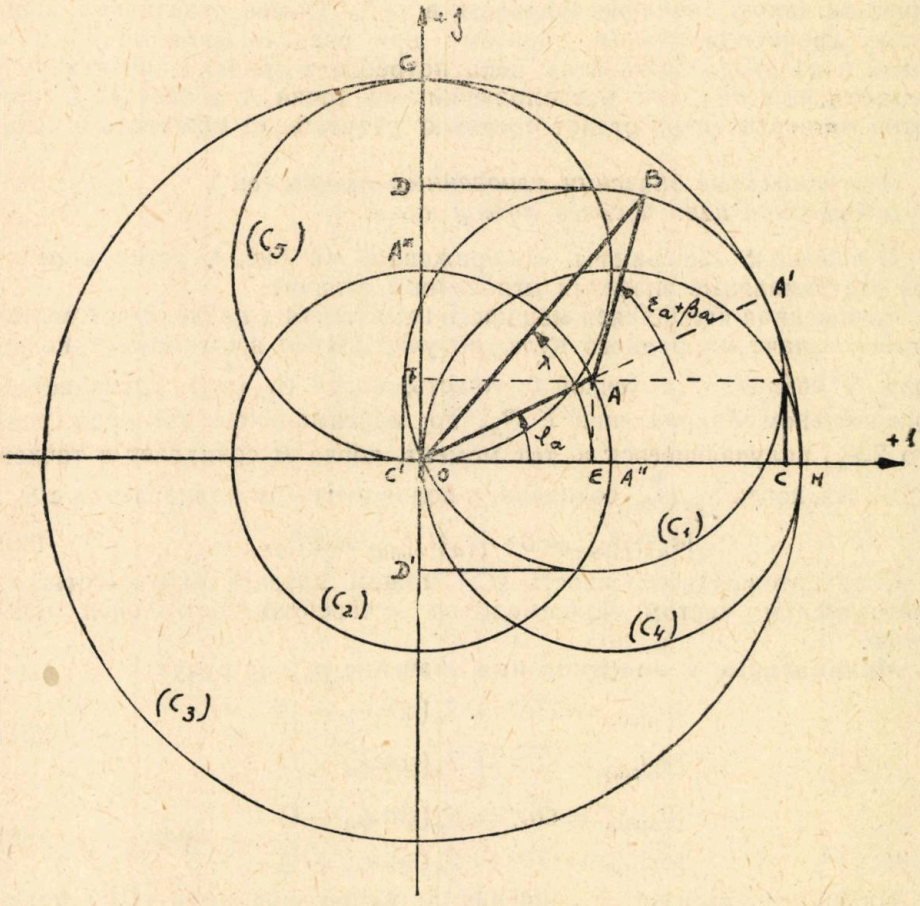


Рис. 1

Подобным же образом может быть изображена и величина $\overrightarrow{s}_a$.

Как видно из рис. 1 если $\overline{OA} = \underset{\cdot}{S}_a$, $\overline{AB} = \underset{\cdot}{S}_{2a}$ то $\overline{OB} = \overrightarrow{s}_a$. Так как комплекс $\overline{AB}$ вращается с угловой скоростью 2ω, то комплекс $\overline{OB}$ вращается в плоскости с угловой скоростью ω; таким образом точка B описывает окружность (C_1).

Если амплитуда приложенного напряжения и тока остается постоянной и изменяется соотношение X_a/R_a, то-есть угол φ_a, тогда точка A описывает окружность (C_2), а точка A' окружность (C_3).

С помощью окружности средней кажущейся мощности (C_2) нетрудно проанализировать характер обмена мощностью, происходящего между рассматриваемой цепью и сетью, к которой подключена цепь.

Так при расположении точки A в первой и четвертой четвертях рассматриваемая цепь потребляет активную среднюю мощность из сети; при расположении точки A во второй и третьей четвертях цепь отдает активную среднюю мощность в сеть. Обмен реактивной мощностью происходит таким образом: при расположении точки A в первой и во второй четвертях цепь потребляет среднюю реактивную мощность из сети; при расположении же точки A в третьей и четвертой четвертях цепь отдает среднюю реактивную мощность в сеть.

Экстремальные значения мгновенных мощностей однофазной цепи и связь между ними.

С помощью диаграммы, изображенной на рис. 1, легко определить экстремальные значения мгновенных величин.

Мгновенная кажущаяся мощность изменяется в пределах от минимального значения, равного нулю, получающегося в тот момент, когда точка B совпадает с точкой 0, то-есть, когда $\dot{S}_{2a}$ $(\overleftarrow{\dot{s}_{2a}})$ совпадает в отрицательном направлении с $\dot{S}_a$, до максимального значения, равного $2S_a$, получающегося в тот момент, когда B совпадает с точкой A', то-есть, когда $\dot{S}_{2a}$ $(\overleftarrow{\dot{s}_{2a}})$ совпадает в положительном направлении с $\dot{S}_a$:

$$[s_a(t)]_{min} = 0\,;\quad [s_a(t)]_{max} = 2S_a\,. \tag{30}$$

Следовательно, окружность (C_3) можем назвать окружностью — гометрическим местом максимальной мгновенной кажущейся мощоестью.

Минимальные и максимальные значения p_a, q_a будут:

$$\begin{aligned} [p_a]_{min} &= \overline{OC'} = S_a(\cos\varphi_a - 1) \\ [p_a]_{max} &= \overline{OC} = S_a(\cos\varphi_a + 1) \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} [q_a]_{min} &= \overline{OD'} = S_a(\sin\varphi_a - 1) \\ [q_a]_{max} &= OD = S_a(\sin\varphi_a + 1)\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Максимум-максиморум значение активной мощности $(\overline{OH})$ получится, когда точка A перейдет в точку A'', то-есть, когда $\dot{Z}_a = R_a$; в этом случае точка B опишет окружность (C_4) если точка A перейдет в A''', то-есть, когда $\dot{Z}_a = jX_a$ отрезок $\overline{OG}$ представляет собой максимум-максиморум значение мгновенной реактивной мощности, а точка B опишет в таком случае окружность (C_5), так что можно записать:

$$[s_a(t)]_{max} = [p_{a\,max}]_{max} = [q_{a\,max}]_{max} = 2S_a\,. \tag{33}$$

Соответственно для средних величин:

$$S_a = [P_a]_{max} = [Q_a]_{max} = 1/2 \cdot U_a I_a . \qquad (34)$$

Наконец, в том случае, когда $S_a = 0$, а U_a, I_a постоянны, точка A переходит в точку 0, точка A' в точку A и точка B будет находиться на окружности (C_2).

Таким образом, мгновенная кажущаяся комплексная мощность равняется мгновенной пульсирующей комплексной кажущейся мощности:

$$\overleftarrow{s_a} = \overleftarrow{s_{2a}} \qquad (35)$$

это означает, что величины p_a, q_a будут колебаться с частотой 2ω в пределах $\pm S_a$.

Из вышесказанного следует, что диаграмма мощностей, изображенная на рис. 1, дает возможность иметь полное представление об обмене мощностью, происходящем между цепью и сетью, к которой эта цепь подключена.

Также следует подчеркнуть, что соотношения (33), (34) позволяют в более расширенном смысле понять физическую сторону кажущейся мощности как мгновенной, так и средней, при синусоидальной форме переменных величин, а именно: амплитуда комплексной средней кажущейся мощности представляет собой максимально возможную величину активной или реактивной мощности, которые могуть быть переданы при постоянных значениях эффективных напряжения и тока (при постоянных потерях в сети) приемнику или от приемника в сеть; в то же время пределы изменения амплитуды мгновенной комплексной кажущейся мощности представляют собой возможные пределы изменения мгновенных активной и реактивной мощностей при постоянстве эффективных значений этих величин.

Общий случай трехфазной синусоидальной системы.

Основываясь на понятии мгновенной комплексной кажущейся мощности, введенной выше для случая однофазной цепи, увидим, что решение вопроса для трехфазной цепи сильно упрощается.

Будем считать несимметричный трехфазный приемник ($\dot{Z}_a \neq \dot{Z}_b \neq \dot{Z}_c$), который подключается к трехфазной сети несимметричной системы мгновенных напряжений u_a, u_b, u_c.

Для мгновенных фазных напряжений и токов примем следующие выражения:

$$u_a = U_a \cos(\omega t + \varepsilon_a) \; ; \quad u_b = U_b \cos(\omega t + \varepsilon_b) ; \qquad u_c = U_c \cos(\omega t + \varepsilon_c) \qquad (36)$$

$$i_a = I_a \cos(\omega t + \beta_a) \; ; \quad i_b = I_b \cos(\omega t + \beta_b) ; \qquad i_c = I_c \cos(\omega t + \beta_c) \qquad (37)$$

которые удовлетворяют условиям:

$$u_a + u_b + u_c = 0 \; ; \; i_a + i_b + i_c = 0. \tag{38}$$

Имея в виду выражение (36), (37) легко определяем выражения соответствующих векторов Френеля и комплексных величин (3), (4), (5), (6).

В дальнейшем для упрощения записи вместо индексов a, b, c будем пользоваться индексами n, $k = a, b, c$.

Мгновенную активную мощность, измеряемую на зажимах приемника, можно выразить:

$$p = \Sigma u_n i_n = 1/2 \cdot (\overleftarrow{s} + \overrightarrow{s}) \tag{39}$$

где

$$\overleftarrow{s} = \Sigma \overleftarrow{s_n} = p + jq = \Sigma p_n + j\Sigma q_n \tag{40}$$

$$\overrightarrow{s} = \Sigma \overrightarrow{s_n} = p + jq = \Sigma p_n - j\Sigma q_n \tag{41}$$

соответственно:

$$\overleftarrow{s_n} = p_n + jq_n = 1/2 \cdot \overleftarrow{u_n}(\overleftarrow{i_n} + \overrightarrow{i_n}) \tag{42}$$

$$\overrightarrow{s_n} = p_n - jq_n = 1/2 \cdot \overrightarrow{u_n}(\overleftarrow{i_n} + \overrightarrow{i_n}) \tag{43}$$

где

$\overleftarrow{s}$ — трехфазная мгновениая кажущаяся комплексная мощность;

$\overleftarrow{s_n}$ — мгновенная комплексная кажущаяся мощность фазы n;

$\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{s_n}$ — сопряженные величинам $\overleftarrow{s}$, $\overleftarrow{s_n}$ величины;

p, q — мгновенные трехфазные активная и реактивная мощности;

p_n, q_n — мгновенные активная и реактивная мощности фазы n

$\overleftarrow{u_n}$, $\overrightarrow{u_n}$; $\overleftarrow{i_n}$, $\overrightarrow{i_n}$ — сопряженные векторы Френеля напряжения и тока фазы n, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \Sigma \overleftarrow{u_n} = 0 \; &; \; \Sigma \overrightarrow{u_n} = 0 \\ \Sigma \overleftarrow{i_n} = 0 \; &; \; \Sigma \overrightarrow{i_n} = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Если учесть (42), (43) и соответствующие выражения векторов Френеля, то выражения (40), (41) станут:

$$\overleftarrow{s} = \underset{\cdot}{S} + \overleftarrow{s_2} = \underset{\cdot}{S} + \underset{\cdot}{S}_2 e^{j2\omega t} \tag{45}$$

$$\overrightarrow{s} = \underset{\cdot}{S}^* + \overrightarrow{s_2} = \underset{\cdot}{S} + \underset{\cdot}{S}_2^* e^{-j2\omega t} \tag{46}$$

где

$$\underset{\cdot}{S} = 1/T \cdot \int_0^T \overleftarrow{s}\, dt = \Sigma \underset{\cdot}{S}_n = 1/2 \cdot \Sigma \underset{\cdot}{U}_n \underset{\cdot}{I}_n^* = \\ = P + jQ = 3/2 \cdot (\underset{\cdot}{U}_1 \underset{\cdot}{I}_1^* + \underset{\cdot}{U}_2 \underset{\cdot}{I}_2^*) \tag{47}$$

$$\underset{\cdot}{S}^* = 1/T \cdot \int_0^T \overrightarrow{s}\, dt = \Sigma \underset{\cdot}{S}_n^* = 1/2 \cdot \Sigma \underset{\cdot}{U}_n^* \underset{\cdot}{I}_n = \\ = P - jQ = 3/2 \cdot (\underset{\cdot}{U}_1^* \underset{\cdot}{I}_1 + \underset{\cdot}{U}_2^* \underset{\cdot}{I}_2) \tag{48}$$

$$\underset{\cdot}{S}_2 = \Sigma \underset{\cdot}{S}_{2n} = 1/2 \cdot \Sigma \underset{\cdot}{U}_n \underset{\cdot}{I}_n = 3/2 \cdot (\underset{\cdot}{U}_1 \underset{\cdot}{I}_2 + \underset{\cdot}{U}_2 \underset{\cdot}{I}_1) \tag{49}$$

$$\underset{\cdot}{S}_2^* = \Sigma \underset{\cdot}{S}_{2n}^* = 1/2 \Sigma \underset{\cdot}{U}_n^* \underset{\cdot}{I}_n^* = 3/2 \cdot (\underset{\cdot}{U}_1^* \underset{\cdot}{I}_2^* + \underset{\cdot}{U}_2^* \underset{\cdot}{I}_1^*) \tag{50}$$

$$P = 1/T \cdot \int_0^T p\, dt = 1/T \cdot \Sigma \int_0^T u_n i_n\, dt = \\ = \Sigma P_n = 1/2 \cdot \Sigma U_n I_n \cos \varphi_n = 3\,(P_1 + P_2) = \\ = 3/2 \cdot (U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2) \tag{51}$$

$$Q = 1/T \cdot \int_0^T q\, dt = 1/T\ 1/4\ \Sigma \cdot \int_0^T u_n i_n'\, dt = \\ = \Sigma Q_n = 1/2 \cdot \Sigma U_n I_n \sin \varphi_n = 3\,(Q_1 + Q_2) = \\ = 3/2 \cdot (U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2) \tag{52}$$

где

$\underset{\cdot}{S}, P, Q$ — среднее значение мгновенных полных мощностей: комплексной кажущейся, активной и реактивной;

$\underset{\cdot}{S}_n, P_n, Q_n$ — среднее значение мгновенных мощностей фазы n: комплексной кажущейся, активной и реактивной;

$\underset{\cdot}{S}^*, \underset{\cdot}{S}_n^*$ — сопряженные величинам $\underset{\cdot}{S}$, $\underset{\cdot}{S}_n$ величины;

$\underset{\cdot}{S}_2, \underset{\cdot}{S}_{2n}$ — комплексные амплитуды полной комплексной кажущейся пульсирующей мощности и кажущейся пульсирующей мощности фазы n;

$\underset{\cdot}{S}_2^*, \underset{\cdot}{S}_{2n}^*$ — сопряженные величинам $\underset{\cdot}{S}_2$, $\underset{\cdot}{S}_{2n}$ величины;

$\underset{\cdot}{U}_1, \underset{\cdot}{I}_1$ — изображающие комплексы систем прямой последовательности комплексных напряжений и токов (составляющие Stokvis-Fortescue);

$\underset{\cdot}{U}_2, \underset{\cdot}{I}_2$ — изображающие комплексы систем обратной последовательности комплексных напряжений и токов;

$\underset{\cdot}{U}_1^*, \underset{\cdot}{I}_1^*$ — сопряженные величинам $\underset{\cdot}{U}_1$, $\underset{\cdot}{I}_1$ величины;

$\underset{\cdot}{U}_2^*, \underset{\cdot}{I}_2^*$ — сопряженные величинам $\underset{\cdot}{U}_2$, $\underset{\cdot}{I}_2$ величины;

φ_1, φ_2 — сдвиги по фазе между комплексными величинами $\underset{\cdot}{U}_1, \underset{\cdot}{I}_1$ и $\underset{\cdot}{U}_2, \underset{\cdot}{I}_2$.

Если учесть неравенство Коши (13):

$$|\Sigma \underset{\cdot}{U}_n \underset{\cdot}{I}_n|^2 \leqslant (\Sigma |\underset{\cdot}{U}_n|^2)\ (\Sigma |\underset{\cdot}{I}_n|^2) \tag{53}$$

а также неравенство Буняковского (13):

$$(\Sigma \int_{t_1}^{t_2} u_n(t)\, i_n(t)\, dt)^2 \leqslant (\Sigma \int_{t_1}^{t_2} u_n^2(t)\, dt)\ (\Sigma \int_{t_1}^{t_2} i_n^2(t)\, dt) \tag{54}$$

то можно написать следующие неравенства:

$$\begin{aligned} S^2 &\leqslant S^2_{max} \quad ; \quad S_2^2 \leqslant S^2_{2\,max} \\ P^2 &\leqslant P^2_{max} \quad ; \quad Q^2 \leqslant Q^2_{2\,max} \end{aligned} \tag{55}$$

где

S, S_2 — амплитуды комплексных величин $\underset{\cdot}{S}$, $\underset{\cdot}{S}_2$;

S_{max}, $S_{2\,max}$, P_{max}, Q_{max} — максимальные значения (возможные) величин S, S_2, P, Q.

Если принять во внимание (47), (49), (51), (52) а также (53), (54), то станет очевидным, что:

$$\begin{aligned} S^2_{max} &= S^2_{2\,max} = P^2_{max} = Q^2_{max} = S^2_{\delta} = \\ &= 1/4 \cdot (\Sigma U_n^2)\ (\Sigma I_n^2) = \Sigma S_n^2 + \sum_{n \neq k} (S^2_{nk} + S^2_{kn}) \\ &= 9/4 \cdot (U_1^2 + U_2^2)\ (I_1^2 + I_2^2) = 9\,(S_1^2 + S_2^2 + S_{12}^2 + S_{21}^2) = \\ &= 9/4 \cdot U_{\delta}^2\, I_{\delta}^2 \end{aligned} \tag{56}$$

где

$$S_n = 1/2 \cdot U_n I_n \quad ; \quad S_{nk} = 1/2 \cdot U_n I_k \quad ; \quad S_{kn} = 1/2 \cdot U_k I_n \tag{57}$$

$$S_1 = 1/2 \cdot U_1 I_1 \quad ; \quad S_2 = 1/2 \cdot U_2 I_2 \tag{58}$$

$$S_{12} = 1/2 \cdot U_1 I_2 \quad ; \quad S_{21} = 1/2 \cdot U_2 I_1 \tag{59}$$

$$U_{\delta}^2 = 1/3 \cdot \Sigma U_n^2 = U_1^2 + U_2^2 \tag{60}$$

$$I_{\delta}^2 = 1/3 \cdot \Sigma I_n^2 = I_1^2 + I_2^2 \tag{61}$$

причем, в неравенствах (55) знак $=$ будет иметь место тогда и только-тогда, когда:

а. $S^2 = S^2_{max}$ — U_n и I_n пропорциональны и все произведения $\underset{\cdot}{U}_n \underset{\cdot}{I}_n^*$ имеют одинаковый аргумент, то-есть:

$$\begin{aligned} U_n / I_n &= Z_n = Z \\ \varepsilon_n - \beta_n &= \varepsilon_k - \beta_k = \varphi_n = \varphi_k = \varphi \end{aligned} \tag{62}$$

б. $S_2^2 = S_{max}^2 - U_n$ и I_n пропорциональны и все произведения $\dot{U}_n \dot{I}_n$ имеют одинаковый аргумент, то-есть:

$$U_n / I_n = Z_n = Z$$
$$\varepsilon_n + \beta_n = \varepsilon_k + \beta_k = \varphi'_n = \varphi'_k = \varphi' \tag{63}$$

в. $P^2 = P_{max}^2 - u_n(t)$, $i_n(t)$ будут пропорциональны, то есть:

$$u_n(t) / i_n(t) = c = \text{const} \tag{64}$$

что означает, что векторы $\overleftarrow{u_n}$, $\overleftarrow{i_n}$ соответсвенно $\dot{U}_n$, $\dot{I}_n$ должны совпадать по фазе:

г. $Q^2 = Q_{max}^2 - u_n(t)$, $i'_n(t)$ будут пропорциональны, то-есть:

$$u_n(t) / i'_n(t) = c' = \text{const} \tag{65}$$

а это означает, что векторы $\overleftarrow{u_n}$, $-j\overleftarrow{i_n}$ соответственно $\dot{U}_n$, $-j\dot{I}_n$ или $\overleftarrow{u_n}$, $+j\overleftarrow{i_n}$ соответственно $\dot{U}_n$, $+j\dot{I}_n$ должны совпадать по фазе.

С другой стороны, если учсеть выражения (47) (48), (49) (50), можно определить амплитуды S, S_2:

$$S^2 = SS^* = 1/4 \sum U_n^2 I_n^2 +$$
$$+ 1/4 \cdot \sum_{n \neq k} (\dot{Z}_n / \dot{Z}_k \cdot U_k^2 I_n^2 + \dot{Z}_k / \dot{Z}_n \cdot U_n^2 I_k^2) =$$
$$= \sum S_n^2 + 2 \sum_{n \neq k} S_n S_k \cos(\varphi_n - \varphi_k) =$$
$$= \sum S_n^2 + 2 \sum_{n \neq k} S_{nk} S_{kn} \cos(\varphi'_{nk} - \varphi'_{kn}) =$$
$$= 9/4 \cdot (U_1^2 I_1^2 + U_2^2 I_2^2 + \dot{Z}_2 / \dot{Z}_1 \cdot U_1^2 I_2^2 + \dot{Z}_1 / \dot{Z}_2 \cdot U_2^2 I_1^2) =$$
$$= 9[S_1^2 + S_2^2 + 2 S_1 S_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] =$$
$$= 9[S_1^2 + S_2^2 + 2 S_{12} S_{21} \cos(\varphi'_{12} - \varphi'_{21})]. \tag{66}$$

$$\varphi'_{nk} = \varepsilon_n + \beta_k$$
$$\varphi'_{kn} = \varepsilon_k + \beta_n \tag{67}$$

$$\varphi_1 = \varepsilon_1 - \beta_1 \;;\; \varphi_2 = \varepsilon_2 - \beta_2$$
$$\varphi'_{12} = \varepsilon_1 + \beta_2 \;;\; \varphi'_{21} = \varepsilon_2 + \beta_1 \tag{68}$$

Соответственным образом:

$$S_2^2 = \dot{S}_2 \dot{S}_2^* = 1/4 \cdot \Sigma U_n^2 I_n^2 +$$

$$+ 1/4 \cdot \Sigma \left(\dot{U}_n \dot{I}_n \dot{U}_k^* \dot{I}_k^* + \dot{U}_k \dot{I}_k \dot{U}_n^* \dot{I}_n^* \right) =$$

$$= \Sigma S_n^2 + 2 \sum_{n \neq k} S_n S_k \cos (\varphi_n' - \varphi_k') =$$

$$= \Sigma S_n^2 + 2 \sum_{n \neq k} S_{nk} S_{kn} \cos (\varphi_{nk} - \varphi_{kn}) =$$

$$= 9 \left[S_{12}^2 + S_{21}^2 + 2 S_1 S_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \right] =$$

$$= 9 \left[S_{12}^2 + S_{21}^2 + 2 S_{12} S_{21} \cos (\varphi_{12}' - \varphi_{21}') \right] \quad (69)$$

где

$$\varphi_{nk} = \varepsilon_n - \beta_k \quad ; \quad \varphi_{kn} = \varepsilon_k - \beta_n . \quad (70)$$

Если сравнить (66) с (56), можно выделить следующие случаи:

а. $\dot{Z}_n \neq \dot{Z}_k$ (общий случай асимметрии): корень квадратный из разницы между S_{max}^2 и S^2 называют мощностью асимметрии [2]:

$$A^2 = S_{max}^2 - S^2 = \sum_{n \neq k} (S_{nk}^2 + S_{kn}^2) - 2 \sum_{n \neq k} S_{nk} S_{kn} \cos (\varphi_{nk}' - \varphi_{kn}') =$$

$$= 9 \left[S_{12}^2 + S_{21}^2 - 2 S_{12} S_{21} \cos (\varphi_{nk}' - \varphi_{kn}') \right] . \quad (71)$$

Нетрудно заметить, что величина A представляет собой амплитуду следующей комплексной величины:

$$\dot{A} = 3/2 \cdot (\dot{U}_1 \dot{I}_2 - \dot{U}_2 \dot{I}_1) = 3 (\dot{S}_{12} - \dot{S}_{21}) ; \quad (72)$$

б. $Z_n \neq Z_k$; $\varphi_n = \varphi_k$, тогда $\varphi_{nk}' = \varphi_{kn}'$: в таком случае выражения S^2, A^2 примут вид:

$$S^2 = (\Sigma S_n)^2 \quad (73)$$

$$A^2 = \Sigma (S_{nk} - S_{kn})^2 = 9 (S_{12} - S_{21})^2 \quad (74)$$

в. $Z_n = Z_k$; $\varphi_n \neq \varphi_k$, тогда $S_{nk} = S_{kn}$, и выражения S^2, A^2 преобразуются:

$$S^2 = \Sigma S_n^2 + 2 \sum_{n \neq k} S_{nk}^2 \cos (\varphi_{nk}' - \varphi_{kn}') \quad (75)$$

$$A^2 = 2 \Sigma \sum_{n \neq k} S_{nk}^2 \left[1 - \cos (\varphi_{nk}' - \varphi_{kn}') \right] ; \quad (76)$$

г. $\dot{Z}_n = \dot{Z}_k$: тогда удовлетворяют условиям (62) и как можно заметить при рассмотрении выражения (66):

$$S^2 = S_{max}^2 .$$

Подобным же образом как для случая амплитуды средней комплексной кажущейся мощности, так и для случая амплитуды комплексной пульсирующей кажущейся мощности можно определить:

$$A_2^2 = S_{2max}^2 - S_2^2 = \sum_{n \neq k} (S_{nk}^2 + S_{kn}^2) - 2 \sum_{n \neq k} S_{nk} S_{kn} \cos(\varphi_{nk} - \varphi_{kn}) =$$

$$= 9 [S_1^2 + S_2^2 - 2 S_1 S_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \qquad (77)$$

где

A_2 — амплитуда комплексной величины:

$$\dot{A}_2 = 3/2 \cdot (\dot{U}_1 \dot{I}_1^* - \dot{U}_2 \dot{I}_2^*) = 3 (\dot{S}_1 - \dot{S}_2) \qquad (78)$$

где

$\dot{S}_1$ — комплексная кажущаяся мощность систем прямой последовательности (напряжения и тока);

$\dot{S}_2$ — комплексная мощность величин систем обратной последовательности.

Экстремальные и частные значения мгновенных мощностей трехфазной асимметричной системы.

С точки зрения пределов колебания мгновенной кажущейся мощности трехфазная асимметричная система располагается между однофазной системой, для которой амплитуда пульсирующей мощности равна амплитуде кажущейся мощности. ($S_2 = S$), и трехфазной симметричной системой, для которой ($S_2 = 0$), благодаря тому, что комплексные амплитуды пульсирующей мощности трех фаз образуют симметричную систему и, следовательно, их сумма равна нулю [15].

Каждая электрическая установка не полностью использована, если загружена несимметрично, именно от наличия пульсирующей мощности [9, стр. 180]. Кроме того, пульсирующая мощность данной установки вызывает ряд нежелательных явлений в электрических машинах и особенно в генераторах, которые снабжают эту установку.

Исходя из этих соображений, необходимо принять меры по уменьшению амплитуды пульсирующей мощности.

В данном случае, если обозначить через S_2' максимальное значение амплитуды полной комплексной пульсирующей мощности, которое получается при трехфазном асимметричном режиме, удовлетворяющем условиям $\dot{Z}_n = \dot{Z}_k$; ($S = S_{max}$), причем, S_2' меньше S_{2max}, выражение которого вытекает из (69) при соответствующих подстановках, то для:

а. максимального и минимального значений полной мгновенной кажущейся мощности найдем:

$$[s(t)]_{min}^2 = S_{max}^2 - (S_2')^2 = S^2 - S_2^2 = A_2^2 - A^2 =$$

$$= 9/4 \cdot (U_1^2 - U_2^2)(I_1^2 - I_2^2) = 9/4 \cdot U_\sigma^2 I_\sigma^2 \qquad (79)$$

$$[s(t)]_{max}^2 = S_{max}^2 + (S_2')^2 \qquad (80)$$

где

$s(t)$ — амплитуда комплексной величины $\overleftarrow{s}$.

Минимальное значение $[s(t)]_{min}$ представляет собой уравновешанную часть амплитуды мгновенной трехфазной комплексной кажущейся мощности.

Следует отметить, что величины U_σ, I_σ представляют собой стороны равностороннего треугольника, площадь которого равна площади треугольника, построенного на векторах $\dot{U}_a$, $\dot{U}_b$, $\dot{U}_c$ соответственно $\dot{I}_a$, $\dot{I}_b$, $\dot{I}_c$, причем эта площадь равняется разности площадей треугольников, построенных на векторах напряжений и токов прямой и обратной последовательностей [9], то-есть:

$$U_\sigma^2 = U_1^2 - U_2^2 \; ; \; I_\sigma^2 = I_1^2 - I_2^2. \tag{81}$$

б. Соответственно можно определить мгновенные максимальные и минимальные значения активной и реактивной мощностей.

в. Мгновенная комплексная кажущаяся мощность равна комплексной средней кажущейся мощности (максимальной):

$$\overleftarrow{s} = \dot{S}_\delta = 3/2 \cdot \dot{U}_\delta \dot{I}_\delta \tag{82}$$

что означает, что амплитуда мгновенной комплексной кажущейся мощности равна максимальному значению комплексной средней кажущейся мощности:

$$s(t) = S_\delta . \tag{82'}$$

Подобное равенство имеет место, когда $\dot{S}_2 = 0$.

Для того чтобы комплексная амплитуда пульсирующей комплексной мощности равнялась нулю, необходимо, чтобы системы токов и напряжений были симметричными и одинаковой последовательности, то-есть треугольники, построенные на комплексах фазовых напряжений и токов, должны быть равносторонними, причем:

$$U_n = U_\delta \; ; \; I_n = I_\delta . \tag{83}$$

Как следует из (60), (61), U_δ, I_δ представляют собой стороны равносторонних треугольников, площадь которых равна сумме площадей треугольников, построенных на фазовых векторах напряжений и токов прямой и обратной последовательности.

г. Мгновенная комплексная кажущаяся мощность равна комплексной пульсирующей кажущейся мощности:

$$\overleftarrow{s} = \overleftarrow{s}_2 = \dot{S}_{2\delta}\, e^{j2\omega t} \tag{84}$$

В таком случае комплексная средняя мощность должна равнятся нулю, то-есть:

$$\dot{S}_\delta = 0.$$

Комплексная средняя мощность равняется нулю в том случае, когда системы напряжений и токов симметричны (при соблюдении условий 83), но разных последовательностей [12, стр. 68].

д. Если трехфазную рассматриваемую цепь, фазные полные сопротивления которой равны ($\dot{Z}_n = \dot{Z}_k$) подключается к однофазному источнику напряжения, комплексная амплитуда которого равняется $\dot{U}_\delta$, то мгновенная комплексная кажущаяся мощность будет:

$$\overleftarrow{s} = \dot{S}_\delta + \dot{S}_{2\delta}\, e^{j2\omega t} \tag{85}$$

причем

$$S_\delta = S_{2\delta} = S_{max}$$

откуда можно определить минимум-минуморум значение $s(t)$:

$$[s(t)_{min}]_{min} = 0 \tag{86}$$

а также максимум-максиморум значение этой величины:

$$[s(t)_{max}]_{max} = 2\, S_{max}. \tag{87}$$

Выводы

1. Мгновенная комплексная кажущаяся мощность (10) составляет основу единой теории мощности систем переменного тока, так как все остальные понятия мощности, используемые до сих пор в литературе, представляют собой частные стороны мгновенно-комплексной кажущейся мощности.

2. Говоря о кажущейся мощности трехфазных несимметричных систем, следует различать:

а) среднюю комплексную кажущуюся мощность ($\dot{S}$), которая, как было показано, является средним значением мгновенной комплексной кажущейся мощности ($\overleftarrow{s}$) — геометрической суммой активной и реактивной средних мощностей;

б) амплитуду комплексной (средней) кажущейся мощности (S) значение которой в зависимости от параметров цепи при постоянных эффективных значениях напряжений и токов изменяется от нуля до $S_{макс}$.

в) максимальное значение амплитуды S т. е. $S_{макс}$, которая представляет собой максимум-максиморум значение средней активной или реактивной мощностей, которые могут быть переданы в данную цепь при постоянных потерях в линии передачи, то-есть при постоянных средне-квадратичных значениях напряжений и токов. Было показано, что $S = S_{макс}$, когда площадь треугольников, построенных на фазных напряжениях и токах, равняется сумме площадей треугольников, построенных на фазных напряжениях систем прямой и обратной последовательностей, соответственно на фазных токах систем прямой и обратной последовательностей.

Следовательно, нет необходимости отказываться ни от одного из этих трех понятий, так как каждое из них имеет свой определенный смысл.

3. С помощью мгновенно-комплексной кажущейся мощности однозначно можно определить реактивную мощность как мгновенную, так и среднюю.

Величина реактивной мощности, определенная таким образом, соответствует той величине, которую обычно измеряют, то-есть той величине, выражение которой было предложено Ильовичем и комитетом № 16 CIGRE [12].

4. О мощности асимметрии [2] следует говорить только в том случае, когда комплексная кажущаяся мощность отлична от нуля. В противном же случае, как и было показано (84) мгновенная комплексная кажущаяся мощность равняется пульсирующей комплексной кажущейся мощности.

5. При оценке несимметрии режима работы любой электротехнической установки необходимо исходить из наличия пульсирующей мощности данной установки.

6. Несмотря на то, что комплексные величины широко используются в электротехнике, возможность этих величин при анализе электромагнитных процессов в цепях переменного тока ограничены. Более широкие возможности в этом отношении предоставляют так называемые векторы Френеля, с помощью которых легко связать мгновенные величины с их комплексными изображениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Buchholtz* — Die Darstellung der Begrieff Scheinleistung und Scheinarbeit bei Mehrphasenstrom. Elektro-Journal, Bd9, S. 15—21 1921.
2. *Л. С. Лурье* — Кажущаяся мощность трехфазной системы. Электричество, № 1, 1951, 47—51.
3. *Р. А. Воронов, Г. Э. Пухов* — Кажущаяся мощность электрической цепи. Электричество, № 4, 1954, 81.
4. *Л. С. Лурье* — Кажущаяся мощность эл. цепи. Эл-во, № 4, 1954, 81.
5. *C. I. Budeanu* — Puissances réactives et fictives. Bucarest, IRE, 1927.
6. *C. I. Budeanu* — Les différentes opinions et conceptions concernant la notion de puissance réactive en régime quelconque. CIGRE, 1929.
7. *C. I. Budeanu* — Problème de la presence des puissances réactives. CIGRE, 1929.
8. *Б. А. Телешев* — Необходимое уточнения терминологии в вопросе измерения реактивной мощности. Эл-во, № 11, 1952, 72—74.
9. *А. Френкель* — Теория переменных токов. ОНТИ, 1933, стр. 51—52.

10. *V. N. Nedelcu* — Die einheitliche Leistungstheorie der Mehrphasensysteme, ETZ. — A. Bd. 84, 1963, H. 5, S. 153—157.
11. *И. Г. Шабак* — Курс высшей математики. Том II (Спец. главы). Бухарест, 1956, 59—65.
(*I. G. Şabac* — Curs de Matematici Superioare. Capitole speciale. Vol. II. T.I.S. Bucureşti, 1956).
12. *C. I. Budeanu* — Rapport du Comité d'études des phénomènes réactives et déformants. CIGRE, 1948.
13. *A. Iliovici* — Les coordonées symmetriques en électrotehnique. J. B. Bailliere & Fils, Paris, 1934.
14. *В. И. Смирнов* — Курс высшей математики Т, III, часть, I, ГИТТЛ, 1951, 117—119.
15. *И. С. Антониу* — Специальные вопросы по электротехнике. Изд. АН. Р.Н.Р. 1956.
(*I. S. Antoniu* — Chestiuni Speciale de Electrotehnica. Ed. Ac. R.P.R., Bucureşti, 1956.).

Кафедра эл. машин,
Бухарестского политехнического института

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОНЯТИЯ КАЖУЩЕЙСЯ МОЩНОСТИ ТРЕХФАЗНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

(Краткое содержание)

После обзора различных формулировок кажущейся мощности многофазных систем, встречаемых в технической литературе, данная величина для трехфазных несимметричных систем определяется, исходя из понятия „кажущаяся комплексная мгновенная мощность", ранее введенная автором. Устанавливается связь между кажущейся, комплексной, активной и реактивной мощностями многофазных систем.

CONCERNING THE DEFINITION OF APPARENT POWER IN ASYMMETRICAL THREE-PHASE SYSTEMS

(Summary)

After reviewing the diferent definitions of apparent power in poly-phase systems met iwth in the technical literature, one defines this magnitude for the case of asymmetrical threephase systems starting from the notion of „instantaneous complex apparent power' introduced earlier by the author. The interrelation of apparent, complex apparent, active and reactive powers in poly-phase systems is pointed out.

LA DEFINITION DE LA PUISSANCE APPARENTE DES SISTÈMES TRIPHASÉS NON SYMÉTRIQUES

(Résumé)

Après avoir passé en revue différents définitions données dans la littérature technique pour la puissance apparente des systèmes poliphasés, en prenant pour point de départ la notion de „puissance apparente complexe instantanée" établie antérieurement par l'auteur. On précise les relations qui existent entre les puissances apparente, apparente complexe, active et réactive des systèmes polyphasés.

IM ZUSAMMENHANG MIT DER DEFINITION DER SCHEINLEISTUNG NICHTSYMMETRISCHER DREHSTROMSYSTEME

(Zusammenfassung)

Nach einer Übersicht der verschiedenen in der Fachliteratur erwähnten Definitionen der Scheileinstung mehrphasiger Systeme, wird diese Grösse für den Fall nichtsymmetrischer Drehstromsysteme definiert, wobei vom nachträglich vom Verfasser eingeführten Begriff „augenblickliche komplexe Scheinleistung" ausgegangen wird. Es wird der Zusammenhang zwischen der Scheinleistung, der komplexen Scheinleistung, der aktiven und reaktiven Leistung der mehrphasigen Systemen dargelegt.

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 10734

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

F 1130

REFERÁLVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 5

SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE

1963

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в шестых годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

* ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT *

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 5

SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE
1963

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.: Acad. Prof. *M. Bercovici*: Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.: Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădisteanu*, cand. St. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Conf. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

SUMAR

MATEMATICĂ

I. M. MIU — Contribution à la théorie des equations algébriques 13

RADU BĂDESCU, EUG. DUMITRESCU, C. SĂULESCU — Asupra unei ecuații diferențiale de ordinul II . . 29

MECANICĂ

N. MANOLESCU, V. MANAFU — Sur la détermination du degré de mobilité des mécanismes 45

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. BLUM, FR. BARCA — Posibilități de utilizare a smoalelor obținute din prelucrarea gudroanelor de cocsificare și semicarbonizare, în brichetarea cărbunilor . 67

TERMOTEHNICĂ

B. GRÜNWALD — Cu privire la împărțirea pe faze a procesului de ardere în motorul cu aprindere prin scînteie 81

ELECTRONICĂ

C. VASILIU — Contribuții la sinteza rețelelor în domeniul timp 103

ELECTROTEHNICĂ

EUG. POTOLEA — Reactanțele mașinii în teoria componentelor simetrice 117

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

И. МИУ — Вклад в теорию алгебрических уравнений 13

Р. БЭДЕСКУ, Е. ДУМИТРЕСКУ, К. СЭУЛЕСКУ — О некотором дифференциальном уравнении n-го порядка 29

МЕХАНИКА

Н. МАНОЛЕСКУ, В. МАНАФУ — Относительно определения степени подвижности механизмов . . 45

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

И. БЛУМ, ФР. БАРКА — Возможность использования коксовых и полукоксовых пеков для брикетирования углей 67

ТЕРМОТЕХНИКА

Б. ГРЮНВАЛЬД — Относительно разделения на фазы процесса горения в двигателе с искровым зажиганием 81

ЭЛЕКТРОНИКА

К. ВАСИЛИУ — Вклад к синтезу электрических цепей в области времени 103

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Е. ПОТОЛЯ — Реактансы синхронной машины в теории симметрических составляющих 117

CONTENTS

MATHEMATICS

I. MIU — Contribution upon the theory of the algebraical equations 13

R. BĂDESCU, E. DUMITRESCU, C. SĂULESCU — On a diferential equation 29

MECHANICS

N. MANOLESCU, V. MANAFU — On the determination of the degrees of freedom of mechanisms 45

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. BLUM, FR. BARCA — The possibility of using bitumen resulting from the distillation of coking and semicoking tars in the manufacture of coal briquettes 67

THERMODYNAMICS

B. GRÜNWALD — On dividing into stages the combustion process in the spark ignition engine 81

ELECTRONICS

C. VASILIU — Contribution to the time domain network synthesis 103

ELECTRICITY

E. POTOLEA — The reactances of the synchronous machine studied by means of the theory of symmetrical components 117

SOMMAIRE

MATHEMATIQUE

I. MIU — Contribution à la théorie des équations algébriques 13

R. BADESCU, E DUMITRESCU, C. SĂULESCU — Sur une équation différentielle du n-ième ordre . . . 29

MECANIQUE

N. MANOLESCU, V. MANAFU — Sur la détermination du degré de mobilité des mécanismes 45

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

I. BLUM, FR. BARCA — Possibilités d'employer les bitumes solides résultant de la distillation des goudrons de coke et de semi-coke dans la fabrication des briquettes 67

TERMOTECHNIQUE

B. GRÜNWALD — Sur la division par phases du processus de combustion à l'ntérieur du moteur à allumage par étincelle 81

ELECTRONIQUE

C. VASILIU — Contributions à la synthèse des réseaux dans le domaine du temps 103

ELECTROTECHNIQUE

E. POTOLEA — Les reactances des machines synchrones à polis millantas 117

INHALT

MATHEMATIK

I. M. MIU — Beiträge zur allgebraischen Gleichungstheorie 13

R. BĂDESCU, E. DUMITRESCU, C. SĂULESCU — Über eine Differentialgleichung n-ter Ordnung 29

MECHANIK

N. MANOLESCU, V. MANAFU — Über die festsetzung des Beweglichkeitsgrades der Mechanismen . . . 45

TECHNOLOGISCHE CHEMIE

I. BLUM, GR. BARCA — Möglichkeiten für die Verwendung des Peches aus der Verarbeitung der Kokerei-und Halbkokereiteere in der Herstellung vor Briketten . . 67

TERMOTECHNIK

B. GRÜNWALD — Auf Phaseneintellung des Brennprozesses im Motor mit Funkenzündung 81

ELEKTRONIK

C. VASILIU — Beiträge zur Synthese der Netzwerke im Zeitbereich 103

ELEKTROTECHNIK

E. POTOLEA — Die Reaktanzen der Synchronmaschinen in der Theorie der symmetrischen Komponentent . . 117

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 5

MATEMATICĂ

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

I. M. MIU

Dans ce qui suit, nous donnerons deux théorèmes sur la théorie des équations algébriques. Un de ces théorèmes est une généralisation d'un autre théorème établi par nous dans [1]. Le second théorème permet de séparer les racines d'une équation algébrique à coefficients réels ou complexes. Nous donnerons des applications diverses et d'autres extensions de ces théorèmes.

CHAPITRE I

THÉORÈMES RELATIFS AUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

§ 1. Théréme I

Le théorème qui a été établi en [1] et que nous proposons de généraliser est :

Soit l'équation :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{1}$$

avec les coefficients réels ou complexes.

Si toutes les racines de l'équation (1) sont situées à l'extérieur ou sur le cercle C ayant le centre en z_0 et le rayon R, alors toutes les racines d'équation :

$$nf(z) - (z - z_0) f'(z) = 0$$

sont aussi situées à l'extérieur ou sur ce cercle.

La généralisation de ce théorème est la suivante :

Théorème I.

Etant donnée l'équation

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{1}$$

avec des coefficients a_j réels ou complexes, on considère l'équation

$$\varphi(z) = pf(z) - (z - z_0) f'(z) = 0 \tag{2}$$

où le nombre p est réel $\geqslant n$, et z_0 réel ou complexe.

Toutes les racines de l'équation (2) sont situées à l'extérieur ou au plus sur les cercles $\{C\}$, qui contiennent à l'interieur ou sur le contour le point z_0 et ont en extérieur ou au plus sur le contour toutes les racines de l'équation (1).

Démonstration.

Nous démontrerons le théorème successivement :

A. Soit un cercle C qui contient à l'intérieur le point z_0, et tel que les racines de l'équation (1) se trouvent à l'extérieur ou au plus sur lui. Considérons la transformation conforme $z - z_0 = \dfrac{1}{Z - z_0}$, qui transforme le cercle C en un autre cercle C' ; le domaine intérieur du cercle C correspond au domaine exterieur du cercle C' et le domaine extérieur correspond au domaine intérieur.

Il résulte que l'équation

$$F(Z) = (Z - z_0)^n f\left(z_0 + \frac{1}{Z - z_0}\right) = 0$$

a toutes les racines à l'intérieur du cercle C' ou au plus sur son contour.

En appliquant le théorème de Lucas, il résulte que l'équation $F'_Z(Z) = 0$ a toutes les racines à l'intérieur ou au plus sur le cercle C'. En conséquence, l'équation

$$F'_Z(Z) = n(Z - z_0)^{n-1} f\left(z_0 + \frac{1}{Z - z_0}\right) - (Z - z_0)^{n-2} f'_Z\left(z_0 + \frac{1}{Z - z_0}\right) = 0$$

a toutes ses racines à l'éxterieur du cercle C' ou au plus sur son contour. En revenant à la variable z, il résulte que l'équation :

$$nf(z) - (z - z_0) f'(z) = 0$$

a toutes ses racines à l'exterieur du cercle C ou au plus sur son contour.

B. Le théorème étant démontré seulement pour $p = n$, nous démontrerons qu'il est valable pour tout nombre p qui est $\geqslant n$. Nous démontrerons d'abord la lemme suivante :

Etant donné l'équation :

$$b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0 \qquad (3)$$

avec $b_1 \neq 0$, si b_0 tend vers zero, une racine de l'équation tend vers l'infini et les autres deviennent les racines de l'équation :

$$b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0$$

Nous procéderons par induction complète.

— Le théorème est vrai pour l'équation du deuxième degré :

$$az^2+bz+c=0\,,\quad \text{avec } b\neq 0$$

$$\lim_{a\to 0} z_1=\lim_{a\to 0}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\infty$$

$$\lim_{a\to 0} z_2=\lim_{a\to 0}\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})'_a}{(2a)'_a}=-\frac{c}{b}\,.$$

— Admettons la propriété vraie pour l'équation de degré n et montrons qu'elle subsiste pour l'équation de degré $n+1$:

$$b_0 z^{n+1}+b_1 z^n+b_2 z^{n-1}+\ldots+b_n z+b_{n+1}=0\,,\quad b_1\neq 0. \tag{4}$$

Prenons $b_{n+1}=0$, on trouve :

$$\begin{aligned} &b_0 z^n+b_1 z^{n-1}+\ldots+b_n=0\,,\\ &z=0 \end{aligned} \tag{5}$$

Par hypothèse, la propriété est vraie pour l'équation (5), d'où il résulte qu'elle est vraie pour (4).

L'hypothèse $b_{n+1}=0$ considérée pour l'équation (4), n'affecte pas la généralité, parce qu'on peut considérer l'origine des axes dans une des racines de l'équation.

Observation : La lemme peut être démontrée aussi en transformant l'équation par la relation $z=\dfrac{1}{Z}$.

Une conséquence de cette lemme est la suivante :

Étant donnée l'équation :

$$\begin{aligned} \Phi(z)=A_0 z^p+A_1 z^{p-1}+\ldots+A_{p-n-1} z^{n+1}+a_0 z^n+\\ +a_1 z^{n-1}+\ldots+a_{n-1} z+a_n=0 \end{aligned} \tag{1 a}$$

avec

$$a\neq 0$$

si on fait $A_0\to 0, A_1\to 0, \ldots, A_{p-n-1}\to 0$, alors $p-n$ racines de cette équation tendent vers l'infini et les autres n deviennent les racines de l'équation :

$$a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_{n-1} z+a_n=0\,.$$

Nous appliquons cette dernière lemme pour démontrer le théorème considéré. En appliquaant le théorème du point A, il résulte que l'équation

$$p\Phi(z)-(z-z_0)\Phi'(z)=0 \tag{2 a}$$

a ses racines à l'extérieur ou sur le cercle C_1.

Le cercle C_1 est soumis à condition qu'il contienne à l'extérieur ou sur son contour les racines d'équation (1 a).

Dans l'équation (1 a) on fait $A_0\to 0$, $A_1\to 0, \ldots A_{p-n-1}\to 0$.

Conformément à la lemme précédente, $p - n$ racines de l'équation (1 a) tendent vers l'infini et les autres deviennent les racines de l'équation (1).

L'équation (2 a) devient l'équation :

$$pf(z) - (z - z_0) f'(z) = 0 \tag{2 b}$$

où p est un nombre naturel $\geqslant n$.

Ce résultat s'obtient par le raisonnement suivant : L'équation (1 a) a toutes ses racines à l'exterieur du cercle C_1. Quand les coefficients A_0, A_1, $A_2 \ldots A_{p-n-1}$, tendent vers zero, les racines restent à l'extérieur d'une suite de cercles qui contiennent à l'intérieur le point z_0 et ont comme limite le cercle C, pendant que l'équation (1 a) devient l'équation (1) et l'équation (2 *a*) devient l'équation (2 *b*).

Par conséquent le théorème est démontré pour un nombre p naturel $\geqslant n$.

C. Démontrons le théorème pour le cas où le nombre $p \geqslant n$ est rationnel.

L'équation $f(z) = 0$ ayant toutes ses racines à l'extérieur du cercle C, il y a la même chose pour l'équation $f^q(z) = 0$ où q est nombre naturel.

En appliquant à cette dernière équation le théorème démontré dans le cas B il résulte que l'équation :

$$p'f(z) - q(z - z_0)f'(z) = 0 \tag{2*)}$$

où p' est un nombre naturel $\geqslant qn$, a ses racines en dehors ou sur le cercle C.

Si on met en 2 *), $p = \dfrac{p'}{q} \geqslant n$, il résulte que l'équation

$$pf(z) - (z - z_0)f'(z) = 0 \tag{2 c}$$

où p est rationnel $\geqslant n$, a ses racines à l'extérieur ou sur le cercle C.

D. Démontrons le théorème dans le cas où $p \geqslant n$ est irrationnel.

On définit le nombre irrationnel p, comme limite commune de deux suites de nombres rationnels.

$$n \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_m \leqslant \ldots \leqslant p \leqslant \ldots p'_m \leqslant \ldots \leqslant p'_2 \leqslant p'_1 \tag{6}$$

où

$$\lim_{m \to \infty} p_m = \lim_{m \to \infty} p'_m = p \quad \text{et} \quad p_m > n\,,\ p'_m > n$$

Le théorème établi à C) est valable pour tous les termes p_m et p'_m des suites qui définissent le nombre p. Donc les équations

$$p_m f(z) - (z - z_0) f'(z) = 0 \tag{2 d$_1$}$$

$$p'_m f(z) - (z - z_0) f'(z) = 0 \tag{2 d$_2$}$$

ont leur racines à l'extérieur du même cercle C pour tout $m \in N$.

On peut dire que pour les deux suites (6) il correspond une suite de cercle dont tous les termes sont égaux au cercle C. Par conséquent

à la limite commune p des suites (6) correspond le cercle C. Il résulte donc que le théorème I, énoncé plus haut est démontré.

Nous donnerons à ce théorème la forme suivante :

Considérons z_i et z_{2i} (avec $i = 1, 2 \ldots, n$) respectivement les racines des équations (1) et (2) et menons tous les cercles C_{oij} par les points z_0, z_i, z_j, de telle manière que toutes les autres racines de l'équation (1) restent à l'extérieur ou au plus sur leurs contours.

S'il est possible, on mène les droites Δ_h, Δ_k respectivement par les points z_0, z_h et z_0, z_k, de telle manière que les racines de l'équation (1) restent de la même partie de chaque droite ou au plus sur elles.

Soit C^1_{0ij} tous les domaines ouverts bornés par les cercles C_{0ij} et s'il est le cas, Δ^1_h, Δ^1_k, respectivement les domaines ouverts situés de la même partie de l'une des droites Δ_h, Δ_k, où ne se trouvent pas les racines de l'équation (1).

Soit le domaine $A = U\, C^1_{0ij}\, U\, \Delta^1_h\, U\, \Delta^1_k$ et notons par D le domaine complémentaire de A.

L'équation (2) a toutes ses racines dans le domaine D.

Observation.

D'une façon analogue on peut généraliser le théorème de Lucas :

Si l'équation (1) a toutes ses racines à l'extérieur ou sur une courbe convexe Γ l'équation :

$$qf(z) + (z - z_0)f'(z) = 0$$

avec q réel $\geqslant 0$ et z_0 intérieur ou sur Γ, a toutes les racines à l'intérieur ou sur le contour de la courbe considérée.

§ 2. Le théorème II

Ce théorème s'énonce ainsi :

a) En considérant les équations (1) et (2) du théorème I, tous les cercles qui passent par z_0 et par une racine z_{2j} de l'équation (2) contiennent à l'intérieur ou sur le contour, au moins une racine de l'équation (1).

b) Chaque droite Δ_i menée par z_0 et par une racine z_{2j} de l'équation (2) divise le plan en deux semi-plans $\bar{\Delta}_{i1}$ et $\bar{\Delta}_{i2}$ que nous considérons domaines fermés sur la droite Δ_i.

L'équation (1) a au moins une racine en chaque semi-plan $\bar{\Delta}_{i1}$ et $\bar{\Delta}_{i2}$.

Démonstration.

a) Nous considérons le cas (fig. 1) lorsque le domaine D, dans lequel se trouvent les racines de l'équation (2) est borné seulement par des arcs appartenant aux cercles menés chaqun par z_0 et par deux racines de l'équation (1) dans les conditions du théorème I.

Dans la fig. 1 ces arcs passent par les racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de l'équation (1). Un cercle quelconque mené par $P(z_0)$ et par une racine z_{2j} de l'équation (2) rencontre tout au plus une seule fois l'un des arcs

frontières A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 ou tout au plus se confond avec l'un d'eux.

Il en résulte que le cercle considéré rencontre deux arcs et par conséquent contient à l'intérieur ou sur son contour au moins une racine de l'équation (1).

— Si le domaine $\bar{D}$ (fig. 2) où se trouvent les racines de l'équation (2) est borné par des arcs des cercles menés comme dans le cas précédent

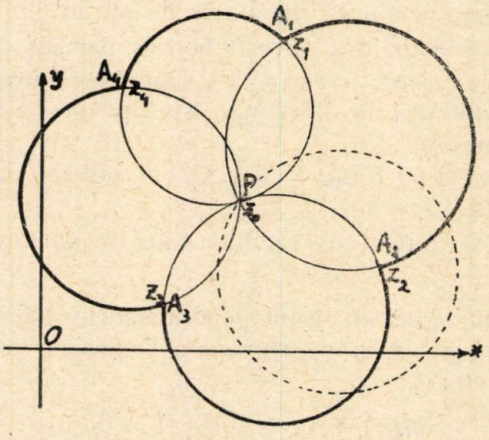


Fig. 1

et par deux semi-droites menées par z_0 et respéctivement par les racines z_h, z_k de l'équation (2) nous faisons le même raisonnement comme dans le cas précédent.

Un cercle quelconque qui passe par $P(z_0)$ et par une racine z_{2j} de l'équation (2), rencontre deux arcs qui bornent le domaine $\bar{D}$, ou un arc et une des semi-droites considérées, à l'extérieur de PA_h et PA_k ou les deux semi-droites à l'extérieur de PA_h et PA_k. Dans tous les cas, à l'intérieur ou sur le cercle mené par $P(z_0)$ et z_{2j} se trouve au moins une racine de l'équation (1).

b) Dans le cas b) du théoréme nous avons deux cas :

1) Quand le domaine D est borné seulement par les arcs (fig. 1) la propriété est evidente, parce que en cas contraire resulte que le domaine $\bar{D}$ aurait été borné par une droit et par les arcs.

2) Quand le domaine $\bar{D}$ est borné par les arcs et par deux semi droits menées par P (z_0) (Fig. 2), la propriété résulte parceque l'hypothèse contraire mene à la conclusion que l'angle où sont situées les recines de l'équation (2) doit être diminué, ce qui est imposible.

On remarque de même que b) est un cas particulier de a) quand on mene par z_0 et z_{2j} un cercle de rayon infini.

Ce théorème permet de séparer les racines des équation algébriques.

§ 3. La séparation des racines de l'équation algébrique f(z) = 0

Des conséquences directes des théorèmes précédents

En appliquant successsivement le théorème I à l'équation (1) on obtient :

$$f_1(z) = p_1 f(z) - (z - z_0) f'(z) = 0 \quad , \quad p_1 \geqslant n$$

$$f_2(z) = p_2 f_1(z) - (z - z_0) f_1'(z) = 0 \quad , \quad p_2 \geqslant n$$

. . . . . .

$$f_m(z) = p_m f_{m-1}(z) - (z - z_0) f_{m-1}'(z) = 0 \, , \, p_m \geqslant n$$

Soit $\{C_{0ij}\}$ l'ensemble des cercles qui passent par $P(z_0)$ et par les racines z_i, z_j de l'équation $f(z) = 0$, de telle manière que toutes ses autres racines restent à l'extérieur ou sur les cercles considérés.

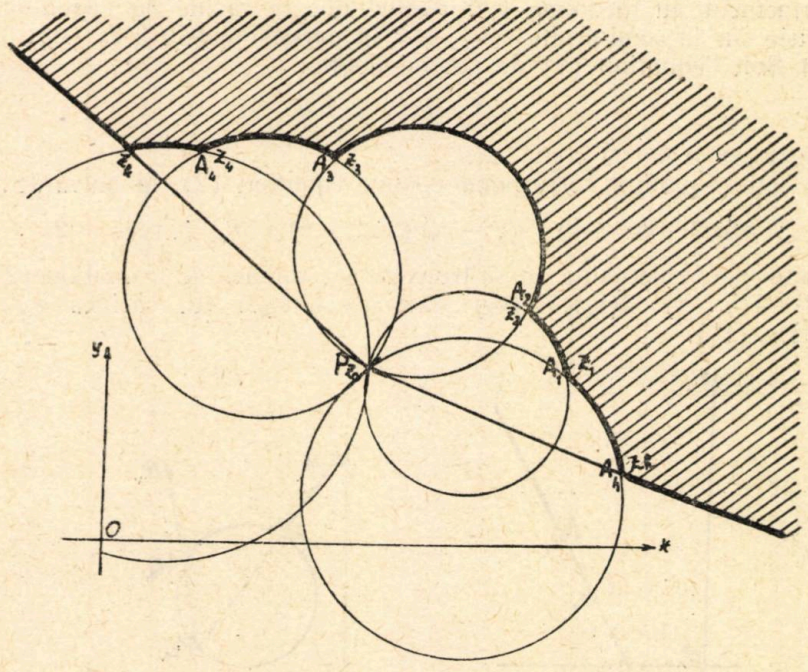


Fig. 2

Du théorème I il résulte que toutes les racines des équations $f_2(z) = 0$, $f_3(z) = 0, \ldots f_m(z) = 0$ se trouvent situées à l'extérieur ou sur les cercles $\{C_{0ij}\}$.

Comme une conséquence du théorème II il résulte que chaque cercle qui passe par $P(z_0)$ et par une racine z_{mj} de l'équation $f_m(z) = 0$ contient

à l'intérieur ou sur son contour au moins une racine de chaque équation : $f(z)=0$, $f_1(z)=0$, ... $f_{m-1}(z)=0$

De ce qui précède il résulte, qu'en utilisant les théorème I et II, on peut par, des essais, séparer les racines de l'équation $f(z)=0$.

CHAPITRE II

APPLICATIONS ET AUTRES QUESTIONS CONNEXES

§ 1. Application à quelques équations algébriques

a) Considérons l'équation (1) de premier degré :

$$z - z_1 = 0 \tag{1'}$$

À l'équation (2) correspond l'équation :

$$p(z - z_1) - (z - z_0) = 0 \qquad p \text{ réel} > 1 \tag{2'}$$

Conformément au théorème I il résulte que la racine de l'équation (2') est située sur la semi-droite $z_1\infty$, sur la partie opposée à z_0. (fig. 3).

b) Soit l'équation (1) de second degré :

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{1''}$$

à coefficients réels ou complexes.

À cette équation correspond comme équation (2), la suivante :

$$p(az^2 + bz + c) - (z - z_0)(2az + b) = 0\,, \quad p \text{ réel} \geqslant 2 \tag{2''}$$

Il résulte que le domaine où se trouvent les racines de l'équation (2'') est $MABN$ (fig. 4) $A(z_1)$, $B(z_2)$ sont les images des racines z_1, z_2 de l'équation (1'').

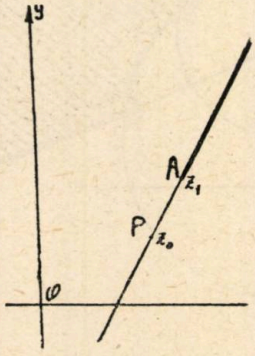


Fig. 3

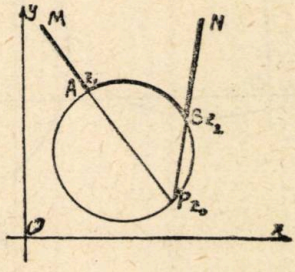


Fig. 4

c) Quand l'équation (1) est de troisième degré et se présente sous la forme :

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{1'''}$$

l'équation (2) correspondante est :

$$p(az^3 + bz^2 + cz + d) - (z - z_0)(3az^2 + 2bz + c) = 0 \qquad (2''')$$

avec p réel $\geqslant 3$.

Les racines de l'équation (2''') sont situées dans le doimaine $M\,A\,B\,C\,N$ (fig. 5). $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ sont les images des racines de l'équaiton (1''').

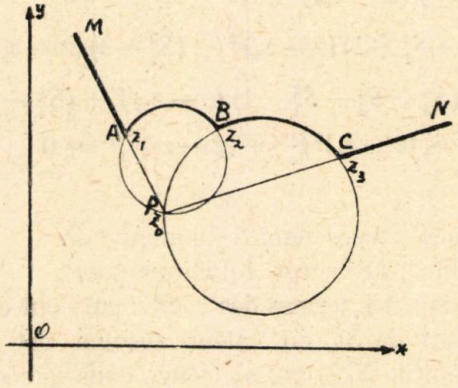


Fig. 5

D'une manière analogue on peut procéder pour chaque équation algébrique.

Application 1. Les équations :

$$\psi(z) = az^2 + bz + c = 0$$

$$p\psi(z) - (z - z_0)\,\psi'(z) = 0,$$

ont leurs racines situées sur la même droite pour p réel $\geqslant 2$, quand z_0 est situé sur la droite déterminée par les images des racines de l'équation

$$\psi(z) = 0$$

Cette propriété résulte comme conséquence immédiate de l'application b) (fig. 4).

§ 2. L'extension du théoréme I

Dans l'hypothèse où l'équation (1) a toutes ses racines à l'extérieur ou sur une suite de cercles (C), qui contiennent à l'intérieur ou sur le contour le point z_0, on peut appliquer le théorème I à une suite d'équations, de la manière indiquée au chapitre I, § 3.

De manière analogue, si pour l'équation (1) on considère le domaine $\overline{D}$ spécifié au chap. I, § 1, toutes les racines des équations qui se déduisent successivement l'une de l'autre avec le théorème I, se trouvent aussi dans ce domaine.

Considérons les nombres réels $p_1, p_2, p_3, \dots p_j$ qui sont $\geqslant n$. Désignons par $S_k^j = \sum p_1 p_2 \dots p_k$, la somme des produits formés avec les nombres $p_1, p_2, p_3 \dots p_j$ (on considère $S_0^j = 1$).

Les équations :

$$p_1 f - (z - z_1) f' = 0$$

$$p_1 p_2 f - (S_1^2 - 1)(z - z_0) f' + (z - z_0)^2 f'' = 0$$

$$p_1 p_2 p_3 - (S_2^3 - S_1^3 + 1)(z - z_0) f' + (S_1^3 - 3)(z - z_0)^2 f'' - (z - z)_0^3 f''' = 0$$

$$p_1 p_2 p_3 p_4 f - (S_3^4 - S_2^4 + S_1^4 - 1)(z - z_0) f' + (S_2^4 - 3 S_1^4 + 7)(z - z_0)^2 f'' - \\ - (S_1^4 - 6)(z - z_0)^3 f''' + (z - z_0)^4 f^{IV} = 0$$

. . . . . etc.

ont toutes les racines situées dans le domaine $\overline{D}$.

Les règles pour trouver ces équations sont :

— Leurs termes et les termes des coefficients ont des signes alternatifs.

— Le coefficient de S_k^j en valeur absolue, est égal avec la valeur absolue du coefficient de S_{k+1}^j qui se trouve dans le coefficient de la dérivée précédente à laquelle s'ajoute le coefficient en valeur absolue du terme précédent du même coefficient multiplié avec l'ordre de la derivée respective. Par exemple pour les termes d'une équation :

$$-(\dots + \alpha_{i+1,j} S_{i+1}^j - \dots)(z - z_0)^k f^{(k)} + (\dots \beta_{i+1,j} S_{i+1}^j + \\ + \beta_{ij} S_i^j - \dots)(z - z_0)^{k+1} f^{(k+1)} - \dots$$

nous avons :

$$\beta_{ij} = \alpha_{i+1,j} + (k + 1)\, \beta_{i+1,j}.$$

Application 2. Soit l'équation :

$$\psi(z) = az^2 + bz + c = 0 \qquad (\alpha)$$

avec les coefficients réels ou complexes ayant les racines z_1 et z_2.

On considère un nombre z_0 sur la droite Δ qui passe par z_1 et z_2 et on forme l'équation :

$$p_1 p_2 p_3 \dots p_j \psi - [S_{j-1}^j - S_{j-2}^j + \dots + (-1)^{j-1}](z - z_0)\psi' + \\ + [S_{j-2}^j - 3 S_{j-3}^j + 7 S_{j-4}^j + \dots + (-1)^j (2^{j-1} - 1)](z - z_0)^2 \psi'' = 0 \qquad (\beta)$$

où $p_1, p_2, p_3, \dots p_j$ sont des nombres réels $\geqslant 2$.

L'équation (α) et toutes les équations (β) ont les racines situées sur la droite Δ.

La démonstration de cette application résulte immédiatement de ce qui précède.

§ 3. Le probléme inverse

Considérons donnée l'équation (2) et trouvons l'équation (1). Donc supposons donnée l'équation algébrique.

$$\varphi(z) = 0 \tag{7}$$

et il faut trouver l'équation

$$f(z) = 0 \tag{8}$$

Les fonctions $\varphi(z)$ et $f(z)$ sont des polynomes à coefficients réels ou complexes de degrès respectifs m et p_1 de telle sorte que $m < p_1$ (m, p_1 nombres naturels).

La fonction $f(z)$ est donnée par l'équation différentielle :

$$p_1 f(z) - (z - z_0) f'(z) = \varphi(x). \tag{9}$$

Considérons $\varphi(z)$ développée d'après la formule de Taylor sous la forme :

$$\varphi(z) = A_0 + A_1 (z - z_0) + \ldots + A_m (z - z_0)^m \tag{10}$$

L'équation différentielle (9) donne :

$$f(z) = (z - z_0)^{p_1} \left[C_1 - \int (z - z_0)^{-p_1 - 1} \varphi(z)\, dz \right],$$

d'où, en tenant compte de (10) on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{A_0}{p_1} + \frac{A_1}{p_1 - 1}(z - z_0) + \frac{A_2}{p_1 - 2}(z - z_0)^2 + \ldots \\ + \frac{A_m}{p_1 - m}(z - z_0)^m + C_1 (z - z_0)^{p_1} \end{aligned} \tag{11}$$

Ici C_1 est une constante arbitraire réele ou complexe. Si l'équation (11) a toutes les racines à l'extérieur ou sur un cercle qui contient à l'intérieur ou sur son contour le point z_0, alors l'équation (10) a aussi ses racines à léxtérieur ou sur ce cercle.

Si l'on considère le domaine $\overline{D}$ déterminé comme dans le cas du théorème I pour l'équation (11), alors l'équation (10) a toutes ses racines dans ce domaine.

Avec l'équation (11) on procède de la même façon et après un nombre de j opérations on trouve l'équation :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{A_k}{(p_1 - k)(p_2 - k) \ldots (p_j - k)} (z - z_0)^k + \sum_{i=1}^{j} C_i (z - z_0)^{p_i} = 0 \tag{12}$$

où $p_1, p_2, \ldots p_j$ sont des nombres naturels qui satisfont aux conditions $m < p_1 < p_2 < \ldots < p_j$ et C_i sont des constantes arbitraires réelles ou complexes.

En faisant $j = j_1$, $j = j_2$ on obtient de (12) les équations $f_{j_1}(z) = 0$, $f_{j_2}(z) = 0$. Dans l'hypothèse $j_1 < j_2$ si l'équaiton $f_{j_2}(z) = 0$ a toutes ses racines à l'extérieur ou sur un cercle qui contient à l'intérieur ou sur son contour le point z_0, alors les racines de l'équation $f_{j_1}(z) = 0$ ont la même propriété.

Considérons le même problème, et soient $p_1, p_2, \ldots p_j$ des nombres quelconques positifs qui satisfassent les conditions

$$m < p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_j$$

On procède d'une manière analogue et on considère toutes les constantes nulles. On obtient l'équation :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{A_k (z - z_0)^k}{(p_1 - k)(p_2 - k) \ldots (p_j - k)} = 0 \tag{13}$$

Les équation (13) ont les mêmes propriétés que les équations (12). Si certains des nombres p_i sont entiers positifs, on peut considérer les constantes respectives différentes de zéro.

§ 4. Sur la séparation des racines d'une équation algébrique

En utilisant les thèorèmes précédents, on peut, par des essais, séparer les racines d'une équation algébrique à coefficients réels ou complexes. Ainsi, si $z_{j_1}^{(i)}$ est une racine de l'équation (12) pour $j = j_1$, alors dans tous les cercles menés par z_0 et $z_{j_1}^{(i)}$ il existe au moins une racine de chaque équation (12) pour laquelle $j < j_1$.

Considérons l'équation :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \tag{1}$$

et un nombre z_0 (les coefficients a_i et z_0 réels ou complexes) pour lequel $f'(z_0) \neq 0$.

Identifions l'équation (12) avec l'équation (1).

Pour cela nous écrivons l'équation (1) sous la forme :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) = 0$$

Dans l'équation (12) faisons :

$$m = 1, \; j = n - 1, \; p_1 = 2, \; p_2 = 3, \; p_3 = 4 \; \ldots p_j = p_{n-1} = n.$$

Elle devient :

$$\frac{A_0}{n!} + \frac{A_1}{(n-1)!}(z - z_0) + C_2 (z - z_0)^2 + C_3 (z - z_0)^3 + \ldots + C_n (z - z_0)^n = 0. \tag{14}$$

Ici nous prenons :

$$\frac{A_0}{n!}=f(z_0),\ \frac{A_1}{(n-1)!}=f'(z_0),\ C_q=\frac{f^{(q)}(z_0)}{q!},\ q=2,\ 3,\ldots n.$$

L'équation (14) s'obtient par les intégrations successives indiquées au § 3, en partant de l'équation :

$$\varphi(z)=A_0+A_1(z-z_0)=0 \tag{15}$$

qui a une racine

$$3_0=z-\frac{nf(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Il résulte que à l'intérieur de chaque cercle qui passe par z_0 et 3_0 il existe au moins une racine de l'équation (1). En particulier, l'équation (1) a au moins une racine à l'intérieur du cercle de diamètre $|z_0-3_0|=n\left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right|$ qui passe par z_0 et 3_0, c'est-à-dire à l'interieur du cercle :

$$\left|z-z_0+\frac{nf(z_0)}{2f'(z_0)}\right|\leqslant\frac{n}{2}\left|\frac{f(z_0)}{f'(z_0)}\right|$$

Par plusieurs opérations, succesives nous pouvons isoler les racines de l'équation (1) en donnant diverses valeurs à z_0.

Observations.

1. En vertu de ce qui précède, nous pouvons affirmer : si l'équation (1) n'a aucune racine sur la droite menée par z_0 et 3_0 alors cette équation a au moins une racine d'un côté et de l'autre de la droite Δ, et aussi au moins une de ces racines est située à l'intérieur d'une demi-cercle de diamètre $|z_0-3_0|$ mené par z_0 et 3_0 de la même partie de la droite considérée.

2. D'une manière analogue on peut considérer l'équation :

$$A_0+A_1(z-z_0)+A_2(z-z_0)^2=0 \tag{16}$$

ou une équation déduite de (10) avec un degré plus grand, et pour chaque équation on peut tirer des conclusions analogues.

Application 3. Considérons l'équation :

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_pz^{n-p}+a_{n-1}z+a_n=0 \tag{17}$$

avec les coefficients réels ou complexes et $n\geqslant 2p+2$. Prenons $z_0=0$ et identifions l'équation (17) avec (12). En (12) faisons :

$$m=2,\ j=p+1,\ p_1=n-p,\ p_2=n-p+1,\ldots p_j=p_{p+1}=n,$$

nous obtenons :

$$\frac{A_0}{(n-p)(n-p+1)(n-p+2)\ldots n}+\frac{A_1z}{(n-p-1)(n-p)(n-p+1)\ldots(n-1)}+$$
$$+C_1z^{n-p}+C_2z^{n-p-1}+\ldots+C_{p+1}z^n=0$$

Prenons :

$$\frac{A_0}{(n-p)(n-p+1)(n-p+2)\ldots n} = a_0, \quad \frac{A_1}{(n-p-1)(n-p)(n-p+1)\ldots(n-1)} = a_1.$$

L'équation (15) devient :

$$a_0(n-p-1) + a_1 nz = 0 \tag{18}$$

qui donne la racine :

$$z = -\frac{n a_1}{(n-p-1)\, a_1}. \tag{19}$$

Il résulte :

— L'équation (17) a au moins une racine z_1 de telle sorte que :

$$|z_1| \leqslant \frac{n}{n-p-1}\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

— L'équation (17) a au moins une racine à l'intérieur ou sur le cercle :

$$\left|z + \frac{n a_0}{2(n-p-1)a_1}\right| \leqslant \frac{n}{2(n-p-1)}\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

L'équation (17) considérée, généralise l'équation de Landau [3]) (Landau a trouvé que l'équation $az^n + z + 1 = 0$ a au moins une racine z_1 de telle sorte que $|z_1| < 2$ pour $n \geqslant 2$).

La chaire de mathématique

BIBLIOGRAPFIE

(1) *I. M. Miu* — Asupra zerorurilor unor funcții. (Gazeta Matematică și Fizică, nr. 9, septembrie 1962).
(2) *N. Obrechkoff* — Sur les racines des équations algébriques (The Tâhoku Math. Journ., vol. 38, 1933, p. 93).
(3) *E. Landau* — Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard Annales de l'École Normale Eupérieure, t. XXIV, 1907, p. 179).

ВКЛАД В ТЕОРИЮ АЛГЕБРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Краткое содержание)

В этой работе выдвигаются теоремы, в которых обнаруживаются свойства алгебрического уравнения с реальными или комплексными коэффициентами.

При помощи других уравнений устанавливаются области в которых находятся ноли многочленов.

Выдвинутые теоремы широко истолковываются и применяются к отдельным частным случаям.

CONTRIBUTIONS UPON THE THEORY OF THE ALGEBRAICAL EQUATIONS

(Summary)

In this work one gives theorems in which are made evident the propertis of an algebraical equation with real and complexe coefficient.

Domains where the palynominal zeros are found by means of other equations are establisched.

In connection with the given theorems extensions and applications concerning some particular cases are made.

CONTRIBUTION À LA THEORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

(Résumé)

Dans ce travail on donne des théorèmes où sont mis en évidence des propriétés d'une équation algébrique avec les coefficients réels ou complexes.

On établit les domaines où sont situés les zéros des polynomes en utilisant d'autres équations.

On fait aussi d'autres extensions des théorèmes établis et on donne des applicatoins sur les cas particuliers.

BEITRÄGE ZUR ALLGEBRAISCHEN GLEICHUNGSTHEORIE

(Zusammenfassung)

In diesem Beitrag werden Regeln angeführt, in welchen die Eigenschaften einer algebraischen Gleichung mit reelen oder komplexen Koeffizienten hervorgehoben werden.

Mit Hilfe anderer Gleichungen werden Gebiete festgelegt wo sich die Nullen der Polynomen befinden.

Im Zusammenhang mit den angeführten Regeln werden Erweiterungen und Anwendungen in Bezug auf einige Sonderfälle gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 5

ASUPRA UNEI ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n

RADU BĂDESCU, EUGENIU DUMITRESCU și CONSTANTIN SĂULESCU

Ecuațiile diferențiale de tipurile Lagrange sau Clairaut au fost generalizate în diverse direcții fie ținîndu-se seama de caracterul lor liniar în x și y, fie derivîndu-se întreaga ecuație și apoi utilizîndu-se schimbarea $y' = p$. Această din urmă metodă, aplicată fără a se introduce noua funcție p, permite imediat determinarea soluției $y(x)$ a ecuației diferențiale liniare de ordinul n și de tipul Euler

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{x^i y^{(i)}}{i!} = f(x) \tag{1}$$

unde $f(x)$ este o funcție integrabilă pe un anumit interval al axei reale R. Același procedeu, convenabil modificat, conduce la integrarea ecuației diferențiale de ordinul n ce generalizează ecuația (1)

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{P_i(x)}{i!} y^{(i)} = f(x) \tag{2}$$

unde șirul $P_m(x)$, $(m = 0,1 \ldots)$ face parte din clasa polinoamelor Appell, de grad egal indicelui și care satisfac relația

$$\frac{dP_m(x)}{dx} = m P_{m-1}(x), \qquad (m \in N). \tag{3}$$

În privința gradului de generalitate al ecuației (2), să observăm că *) ecuațiile diferențiale de ordinul n, liniare, omogene și cu coeficienți constanți sau de tipul Euler, depind de n coeficienți arbitrari **), proprietate pe care o regăsim și la ecuația (2). În adevăr, expresia generală a acestor polinoame fiind ***)

$$P_m(x) = \int_0^1 (x - t)^m g(t)\, dt = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} \tag{4}$$

*) În afara unei transformări liniare $x = aX + b$.
**) Căci se poate împărți ecuația diferențială cu coeficientul lui $y^{(n)}$.
***) A se vedea A. ANGELESCU. Buletinul Soc. Științe. Cluj. T. I. 1921, p. 44—59. Sur les polynogonaux en rapport avec d'autres polynames.

unde $g(x)$ este o funcție integrabilă arbitrară, se vede imediat că toate polinoamele P_0, $P_1(x), \ldots P_n(x)$ depind numai de $(n+1)$ integrale

$$\int_0^1 t^i g(t) \cdot dt \ , \quad (i = 0,1,\ldots,n). \tag{5}$$

Este deajuns pentru aceasta să dezvoltăm binomul $(x-t)^m$ și să identificăm ultimele două expresii (4) ale lui $P_m(x)$, obținînd

$$a_i = (-1)^i C_m^i \int_0^1 t^i g(t)\, dt \ ^{****}) \tag{6}$$

de unde, împărțind ecuația (2) cu $a_0 = \int_0^1 g(t)\ dt$ care este diferit de zero prin ipoteză *), rezultă că ecuația (2) depinde de n coeficienți arbitrari, rapoartele celor n integrale (5) $(i = 1,2,\ldots,n)$ către a_0. Ecuația diferențială (2) are deci, în privința mulțimii constantelor de care depind polinoamele $P_i(x)$, același grad de arbitrar ca și ecuațiile diferențiale liniare de ordinul n și cu coeficienți constanți, sau de tipul Euler.

Între toate aceste ecuații diferențiale există însă o deosebire în privința scrierii integralei generale a ecuației omogene $[f(x) \equiv 0]$ căci dacă pentru ultimele două tipuri trebuie rezolvată o ecuație algebrică de ordinul n, ecuația caracteristică, determinarea acestei integrale generale pentru ecuația omogenă (2) se poate face imediat, fără a avea dificultățile problemei de algebră menționate.

Să trecem întîi la rezolvarea ecuației diferențiale (1).

1) O derivare a întregii ecuații **) și reducerea termenilor asemenea ne conduce la ecuația diferențială de ordinul $(n+1)$

$$\frac{x^n}{n!} y^{(n+1)} = f'(x) \quad \text{sau} \quad y^{(n+1)} = \frac{n!\, f'(x)}{x^n} \tag{7}$$

care admite integrala generală ***)

$$y = y_0 + Y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{t^n}\, dt, \quad (a \neq 0) \tag{8}$$

unde y_0 este soluția generală a ecuației omogene (7) $[f'(x) \equiv 0]$

$$y_0 = Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i\, x^{n-i} \tag{9}$$

****) C_m^i sînt numerele combinărilor de m obiecte luate cîte i.

*) Dacă $a_0 = 0$, $P_m(x)$ n-ar mai fi de gradul m.

**) In ipoteza că $f(x)$ este derivabilă, dar vom vedea că $f(x)$ poate fi numai integrabilă.

***) N. CIORANESCU. Curs de Algebră și de Analiză mat. Editura tehnică. Ed. I. 1955, p. 619.

cu C_i constante arbitrare, iar Y integrala particulară a întregii ecuații (7), dată de integrala din formula (8).

Dar soluția (8) depinde de $n+1$ constante arbitrare, așa că ea nu poate verifica și ecuația (1) decît în anumite condiții. Pentru a găsi aceste condiții, să observăm întîi că polinomul arbitrar $Q_n(x)$ nu verifică ecuația (1) omogenă decît dacă $C_n = 0$, rezultat care se poate obține direct prin integrarea ecuației omogene $y^{(n+1)} = 0$. Un calcul simplu de verificare permite stabilirea acestei propoziții introducînd pe $Q_n(x)$ și primele lui n derivate în ecuația omogenă (1).

Avem deci integrala generală a ecuației omogene (1), polinomul

$$y_0 = x \cdot Q_{n-1}(x), \tag{10}$$

arbitrar

așa că ne rămîne să găsim o integrală particulară Y_p a ecuației neomogene (1). Dar integrala Y din formula (8) verifică ecuația (1) derivată, astfel că, integrînd această ecuație și notînd cu C constanta de integrare, vom avea identic

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{x^i}{i!} Y^{(i)} + C = f(x). \tag{11}$$

Funcția Y și primele ei n derivate se anulează pentru $x = a$ *); făcînd deci în (11) pe $x = a$, găsim valoarea lui $C = f(a)$. Cum coeficientul lui Y în această identitate este $(-1)^n$, punînd $Y_p = Y + K$ și înlocuind în (1), găsim integrala particulară $Y_p = Y + (-1)^n C = Y + (-1)^n f(a)$, căci $K = (-1)^n f(a)$.

Integrala generală a ecuației diferențiale de tipul Euler (1) va fi prin urmare**)

$$y = x\, Q_{n-1}(x) + (-1)^n f(a) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{t^n}\, dt, \tag{12}$$

și sub această formă se vede că scrierea ei necesită derivabilitatea funcției $f(x)$. O integrare prin părți ne conduce însă la o expresie în care figurează numai $f(x)$

$$y = x\, Q_{n-1}(x) + \left[(-1)^n - \left(\frac{x}{a} - 1\right)^n\right] \cdot f(a) + nx \int_a^x (x-t)^{n-1} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\, dt \tag{13}$$

și verificarea acestei soluții se poate face imediat introducînd-o în ecuația (1). Sub această formă se vede că scrierea integralei generale, precum și verificarea ei, nu necesită decît *integrabilitatea funcției cunoscute* $f(x)$, cu condiția ca intervalul $[a, x]$ să nu conțină originea. Dacă această ultimă condiție nu este satisfăcută, apar noi condiții de existență a integralei riemanniene din (13).

*) Y este soluția particulară a ecuației (7) care verifică toate condițiile lui Cauchy, adică funcția Y și primele ei n derivate sînt nule pentru $x = a$.

2) Să considerăm acum ecuația mai generală (2) și să-i aplicăm același procedeu ca și ecuației (1). Vom nota cu $T(y)$ operatorul liniar definit de primul membru al ecuației (2) și, derivînd ecuația (2), vom putea scrie

$$\frac{d}{dx}[T(y)] = \frac{P_n(x)}{n!}\, y^{(n+1)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{P_m' - m P_{m-1}}{m!}\, y^{(m)} = f'(x) \tag{14}$$

ecuație care devine în baza relațiilor (3)

$$y^{(n+1)} = n!\, \frac{f'(x)}{P_n(x)}. \tag{15}$$

și care are ca și ecuația (7), integrala generală

$$y = y_0 + Y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n\, \frac{f'(t)}{P_n(t)}\, dt, \tag{16}$$

Polinomul arbitrar $Q_n(x)$ este dat de relația (9), iar limitele integralei sînt astfel alese încît nici una dintre rădăcinile polinomului $P_n(x)$ să nu cadă în intervalul $[a, x]$.

Să procedăm ca pentru ecuația (1) și să căutăm să verificăm soluția $y_0 = Q_n(x)$ introducînd-o în ecuația omogenă (2). y_0 depinde de $n+1$ constante arbitrare așa că ea nu va fi o soluție a acestei ecuații decît în anumite condiții. Dacă ținem seamă de reprezentarea prin integrala (4) a polinoamelor $P_i(x)$, ecuația omogenă (2), pentru $y = y_0(x)$, se scrie, permutînd simbolele $\int$ și $\sum$

$$\int_0^1 g(t) \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(t-x)^i}{i!}\, y_0^{(i)}(x) \right] dt = 0 \tag{17}$$

sau, observînd că suma din paranteză este tocmai dezvoltarea polinomului $y_0(t)$ cu formula lui Taylor în vecinătatea punctului $t = x$, condiția (17) devine

$$\int_0^1 g(t)\, y_0(t)\, dt = 0, \tag{18}$$

și se vede că ea nu mai depinde de x. Să înlocuim atunci pe $y_0(t)$ prin expresia (9) și să ținem apoi seamă de relația (4) în care am făcut $x = 0$

$$(-1)^m P_m(0) = \int_0^1 t^m g(t)\, dt = \tau_m. \tag{19}$$

Condiția (18) va avea forma

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \int_0^1 t^{n-i} g(t)\, dt = 0$$

sau după (19)

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \gamma_{n-i} = 0 \tag{20}$$

care arată că termenul liber C_n al polinomului arbitrar $Q_n(x)$ se exprimă liniar în funcție de constantele abitrare C_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ dacă $y_0(x)$ este o soluție a ecuației omogene (2).

Să căutăm acum o soluție particulară $Y_p(x)$ a ecuației neomogene (2) procedînd la fel ca și pentru ecuația (1). Vom pune

$$y = y_0 + Y_p = y_0 + Y + K \tag{21}$$

și apoi vom integra ecuația (14), înlocuind pe y prin Y dat de relația (16)

$$T(Y) + C = f(x). \tag{22}$$

In această identitate, verificată de integrala Y, să facem pe $x = a$; vom găsi, observînd că integrala Y și primele ei n derivate se anulează pentru $x = a$,

$$C = f(a).$$

Să înlocuim acum în (22) pe C prin $f(a)$ și pe Y prin $y_0 + Y_p - K$; ținînd seama de liniaritatea operatorului $(T(y)$, vom obține

$$T(y_0) + T(Y_p) - T(K) + f(a) = f(x)$$

și cum $T(K) = (-1)^n K.P_0$ și $T(y_0) = 0$ dacă relația (20) este satisfăcută, rezultă că Y_p va fi o soluție particulară a ecuației neomogene (2) dacă vom lua $K = \dfrac{(-1)^n f(a)}{P_0}$, adică la fel ca și în cazul ecuației (1). Integrala generală căutată se va scrie

$$y = Q_n(x) + \int_a^x (x-t)^n \frac{f'(t)}{P_n(t)}\,dt + (-1)^n \frac{f(a)}{P_0} \tag{23}$$

sau, integrînd prin părți pentru a pune în evidență numai funcția $f(x)$,

$$y = Q_n(x) + \left[\frac{(-1)^n}{P_0} - \frac{(x-a)^n}{P_n(a)}\right] \cdot f(a) +$$

$$+ n \int_a^x (x-t)^{n-1} \cdot \frac{P_n(t) + (x-t)\,P_{n-1}(t)}{P_n^2(t)} \cdot f(t) \cdot dt. \tag{24}$$

In această expresie, polinomul $Q_n(x)$ se poate scrie, eliminînd pe C_n între cele două relații (9) și (20),

$$y_0 = Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n=1} C_i \left[x^{n-i} - (-1)^{n-i} P_{n-i}(0)\right] \tag{25}$$

astfel că integrala generală a ecuației diferențiale (2) este complet determinată în funcție de polinoamele $P_m(x)$, de funcția integrabilă $f(x)$ și de cele n constante arbitrare C_i. Soluția particulară Y va fi și ea perfect determinată dacă intervalul $[a, x]$ va fi cuprins între două rădăcini consecutive ale polinomului $P_n(x)$.

3. *Generalizare*

Problema studiată admite o generalizare prin considerarea ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul n cu coeficienții polinomiali, de o formă analogă cu (3) :

$$T_p(y) \equiv \sum_{i=0}^{n} P_i(x)\, y^{(i)}(x) = f(x) \tag{26}$$

care, derivate de p ori, se reduc la ecuația

$$P_n(x)\, y^{(n+p)}(x) = f^{(p)}(x) \tag{27}$$

$f(x)$ fiind o funcție din clasa $C^p\ [a, b]$

Pentru determinarea polinoamelor $P_i(x)$, vom integra succesiv de p ori ecuația (27) :

$$\int_a^x P_n(t)\, y^{(n+p)}(t)\, dt^p = \int_a^x f^{(p)}(t)\, dt^p \tag{28}$$

și folosind formula *)

$$\int_a^x F(t)\, dt^m = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-t)^{m-1} F(t)\, dt$$

precum și formula integrării prin părți generalizată **)

$$\int_a^x UV^{(n)}\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left[U^{(i)} V^{(n-1-i)}\right]_a^x + (-1)^n \int_a^x VU^{(n)}\, dt$$

membrul întîi M_1 al ecuației (28) se poate scrie

$$M_1 = \int_a^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} P_n(t)\, y^{(n+p)}(t)\, dt$$

sau

$$M_1 = \sum_{i=0}^{n+p-1} (-1)^i \left[U^{(i)}(t,x)\, y^{(n+p-1-i)}(t)\right]_a^x + \\ + (-1)^{n+p} \int_a^x U^{(n+p)}(t,x)\, y(t)\, dt \tag{29}$$

*) N. Ciorănescu, Curs de Algebră și Analiză matematică, București Editura Tehnică, 1955, pag. 422.

**) Op. cit. pag. 421.

unde am notat

$$U(t,x)=\frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}\ P_n(t)$$

și

$$U^{(i)}(t,x)=\frac{\partial^i U(t,x)}{\partial t^i}$$

Formula lui Leibniz a derivatei de ordinul i dă

$$U^{(i)}(t,x)=\sum_{j=0}^{i} C_i^j \left[\frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}\right]^{(j)} P_n^{(i-j)}(t)$$

însă cum

$$\left[\frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}\right]^{(j)}=\begin{cases}(-1)^j\dfrac{(x-t)^{p-1-j}}{(p-1-j)!}\ , & \text{pentru } j<p-1\\ (-1)^{p-1}\ , & \text{pentru } j=p-1\\ 0\ , & \text{pentru } j>p-1\end{cases}$$

vom avea

$$U^{(i)}(x,x)=\begin{cases}0\ , & \text{pentru } i<p-1\\ (-1)^{p-1}\ C_i^{p-1}\ P_n^{[i-(p-1)]}(x)\ , & \text{pentru } i\geqslant p-1\end{cases}$$

și

$$U^{(i)}(a,x)=\sum_{\substack{j=0\\(j\leq p-1)}}^{i}(-1)^j\ C_i^j\ P_n^{(i-j)}(a)\ \frac{(x-a)^{p-1-j}}{(p-1-j)!}$$

Vom mai pune condiția ca integrala din (29) să fie identic nulă pentru a nu ajunge la o ecuație integro-diferențială

$$U^{(n+p)}(t,x)\equiv 0$$

din care rezultă $P_n(x)$ are cel mult gradul n.

In aceste condiții vom putea scrie (29) astfel:

$$M_1=\sum_{i=p-1}^{n+p-1}(-1)^{i+p-1}\ C_i^{p-1}\ P_n^{[i-(p-1)]}(x)\ y^{(n+p-1-i)}(x)\ +$$

$$+\sum_{i=0}^{n+p-1}(-1)^{i+1}\ y^{(n+p-1-i)}(a)\sum_{\substack{j=0\\(j\leq p-1)}}^{i}(-1)^j\ C_i^j\ P_n^{(i-j)}(a)\ \frac{(x-a)^{p-1-j}}{(p-1-j)!}\qquad(30)$$

Se observă că cea de-a doua sumă (dublă) reprezintă un polinom în x, de gradul $(p-1)$.

Analog procedînd și cu membrul al doilea M_2 al egalității (28), obținem:

$$M_2 \equiv \int_a^x \frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)\, dt = f(x) - \sum_{i=0}^{p-1} f^{(p-1-i)}(a) \frac{(x-a)^{p-1-i}}{(p-1-i)!} \tag{31}$$

unde ultima sumă reprezintă tot un polinom de gradul $(p-1)$ în x.

Ținînd seama de aceste expresii, (30) și (31), egalitatea (28) devine

$$\sum_{i=p-1}^{n+p-1} (-1)^{i+p-1} C_i^{p-1} P_n^{[i-(p-1)]}(x)\; y^{(n+p-1-i)}(x) = f(x) + R_{p-1}(x)$$

unde $R_{p-1}(x)$ este un polinom de gradul $(p-1)$.

În fine, schimbînd indicele i de însumare și notînd $f_0(x) \equiv f(x) + R_{p-1}(x)$, obținem ecuația diferențială căutată sub forma:

$$T_p(y) \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{i+p-1}^{p-1} P_n^{(i)}(x)\; y^{(n-i)}(x) = f_0(x) \tag{32}$$

unde $P_n(x)$ este un polinom arbitrar de gradul n în x.

4. *Rezolvarea ecuației omogene*

Soluția ecuației (27) omogene este un polinom arbitrar de gradul $(n+p-1)$

$$y_0 \equiv Q_{n+p-1}(x) \equiv \sum_{j=0}^{n+p-1} q_j x^j \equiv \int_0^1 h(u) \frac{(x-u)^{n+p-1}}{(n+p-1)!}\, du \tag{33}$$

cu $h(u)$ arbitrar, dar integrabil pe $[0,1]$.

Se vede că y_0 depinde de $(n+p)$ constante arbitrare și deci nu va verifica ecuația (32) omogenă decît cu anumite condiții care trebuie să formeze un sistem compatibil de p ecuații cu p necunoscute.

Cînd vom integra de p ori ecuația (27) omogenă, identic satisfăcută de (33), vom obține o expresie ca aceea din (30), de asemenea identic satisfăcută de y_0. Deci vom putea scrie

$$T_p(y_0) + \sum_{i=0}^{n+p-1} (-1)^{i+1} y_0^{(n+p-1-i)}(a) \sum_{\substack{j=0 \\ (j \le p-1)}}^{i} (-1)^j C_i^j P_n^{(i-j)}(a) \frac{(x-a)^{p-1-j}}{(p-1-j)!} \equiv 0 \tag{30'}$$

Pentru a avea $T_p(y_0) \equiv 0$, va trebui ca și suma dublă din (30'), reprezentînd un polinom de gradul $(p-1)$, să fie identic nulă, ceea ce oferă cele p condiții suplimentare pe care y_0 trebuie să le îndeplinească pentru a fi soluție a ecuației (32) omogenă.

În polinomul reprezentat de sumă dublă și în primele $(p-1)$ derivate ale acestuia, care se scriu astfel:

$$\sum_{i=0}^{n+p-1} (-1)^{i+1} y_0^{(n+p-1-i)}(a) \sum_{\substack{j=0 \\ j \leq p-1-k}}^{i} (-1)^j C_i^j P_n^{(i-j)}(a) \frac{(x-a)^{p-1-j-k}}{(p-1-j-k)!} \equiv 0$$

(unde $k = 1, 2, \ldots, p-1$ indică ordinul derivatei), vom face $x = a$. Modificînd convenabil indicele de însumare, găsim cele p condiții sub forma

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l y_0^{(n+k-l)}(a) P_n^{(l)}(a) \cdot \frac{(e+p-1-k)!}{l!} = 0$$

pentru $k = 0, 1, \ldots p-1$.

Dacă vom pune $a = 0$ și, în plus, vom considera polinomul $P_n(x)$ de forma

$$P_n(x) \equiv \sum_{j=0}^{n} p_j x^j \equiv \int_0^1 g(t)(x-t)^n dt \tag{35}$$

unde $g(t)$ este o funcție arbitrară, integrabilă pe $[0, 1]$, vom putea scrie

$$y_0^{(n+k-l)}(0) = (n+k-l)! \; q_{n+k-l}$$

$$P_n^{(l)}(0) = l! \; p_l$$

și deci obținem condițiile

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l (n+k-l)! \; (p-1-k+l)! \; p_l \; q_{n+k-l} = 0 \tag{36}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots p-1$.

Așadar, soluția ecuației (32) omogenă este un polinom de gradul $(n+p-1)$ dat de (33) și satisfăcînd p condiții de forma (36).

Aceste p condiții se pot obține și pe altă cale folosind expresia sub forma de integrală (35) a lui $P_n(x)$. În adevăr, ținînd seama de (35), operatorul $T_p(y)$ dat de (32) devine, după permutarea simbolului Σ cu simbolul $\int$

$$T_p(y_0) = n! \int_0^1 g(t)\, dt \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_{n+p-1-i}^{p-1} \frac{1}{i!} (x-t)^i y_0^{(i)}(x)$$

Dacă notăm cu S suma de sub semnul integrală

$$S = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_{n+p-1-i}^{p-1} \frac{1}{i!} (x-t)^i y_0^{(i)}(x)$$

și dezvoltăm în serie Taylor pe y_0 și derivatele sale

$$y_0^{(i)}(x) = \sum_{m=i}^{n+p-1} \frac{(x-t)^{m-i}}{(m-i)!} y^{(m)}(t) \; ; \; (i = 0,1,\ldots,n+p-1)$$

obținem

$$S = \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=i}^{n+p-1} (-1)^{n-i} C_{n+p-1-i}^{p-1} \frac{1}{i!(m-i)!} (x-t)^m y^{(m)}(t) =$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{n+p-1} \sum_{i=0}^{inf\,(m,n)} (-1)^i C_{n+p-1-i}^{p-1} \frac{1}{i!(m-i)!} (x-t)^m y^{(m)}(t) =$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{n+p-1} \alpha_m (x-t)^m y^{(m)}(t).$$

Folosind apoi formula

$$C_{a-m}^{b} = \sum_{i=0}^{inf\,(m,b)} (-1)^i C_m^i C_{a-i}^{b-i} \quad (a = n+p-1 \; ; \; b = n)$$

care generalizează relația $C_{a-1}^{b} = C_a^b - C_{a-1}^{b-1}$ și care se poate demonstra prin inducție completă (ea avînd sens pentru $m \leqslant a - b = p - 1$, și dacă observăm că pentru $m > a - p = p - 1$, rezultă $a_m = 0$, găsim

$$m!\, \alpha_m = \begin{cases} C_{n+p-1-m}^{n} \text{ , pentru } m \leqslant p-1 \\ 0 \text{ , pentru } m > p-1 \end{cases}$$

Rezultă

$$T_p(y_0) = n!\,(-1)^n \int_0^1 g(t)\,dt \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} C_{n+p-1-m}^{n} (x-t)^m y_0^{(m)}(t)$$

Dezvoltînd pe $(x-t)^m$ și ordonînd după puterile lui x, obținem

$$T_p(y_0) = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^n \frac{x^j}{j!} \int_0^1 g(t)\,dt \sum_{m=j}^{p-1} (-1)^{m-j} \frac{(n+p-1-m)!}{(p-1-m)!\,(m-j)!} t^{m-j} y_0^{(m)}(t) =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(p-1)!} \sum_{j=0}^{p-1} C_{p-1}^{j} x^j \int_0^1 g(t)\, t^{n+p-j} \left(\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right)^{(p-1-j)} dt .$$

și deci condițiile căutate, echivalente cu cele din (36), se scriu sub forma

$$\int_0^1 g(t)\, t^{n+p-j} \left(\frac{y_0^{(j)}(t)}{t^{n+1}} \right)^{(p-1-j)} dt = 0 \qquad (34')$$

pentru $j = 0, 1, \ldots, p-1$.

În fine, considerînd expresia lui y_0 sub formă de integrală, ca în (33), putem obține încă o altă formă a condițiilor (36), anume

$$\int_0^1 \int_0^1 g(t)\, h(u)\, (t-u)^n\, u^{p-1-j}\, dt\, du = 0 \qquad (34'')$$

$$(j = 0, 1, \ldots, p-1)$$

Această formă se poate deduce, fie din expresia (37) a operatorului T_p, fie din expresia (36) a condițiilor căutate.

5. *Rezolvarea ecuației neomogene*

O soluție a ecuației neomogene (27) este

$$Y = \frac{1}{(n+p-1)!} \int_0^x (x-t)^{n+p-1} \frac{f^{(p)}(t)}{P_n(t)}\, dt \qquad (38)$$

unde am presupus că în intervalul de integrare $[0, x]$ nu se află nici o rădăcină a polinomului $P_n(x)$.

Înlocuind pe y cu Y în (27) și integrînd de p ori, obținem identitatea dintre expresiile (30) și (31), pentru $a = 0$. Observînd că avem

$$Y_{x=0} = Y'_{x=0} = \ldots = Y^{(n+p-1)}_{x=0} = 0$$

rezultă

$$T_p(Y) \equiv f(x) - \sum_{i=0}^{p-1} f^{(i)}(0)\, \frac{x^i}{i!}. \qquad (39)$$

Vom căuta o soluție a ecuației omogene de forma

$$Y_p(x) = Y(x) + W_{p-1}(x) \qquad (40)$$

unde W_{p-1} este un polinom de gradul $p-1$, așa că, ținînd seama de liniaritatea operatorului T_p, obținem

$$T_p(Y_p) \equiv T_p(Y) + T_p(W_{p-1}) \equiv f(x). \qquad (41)$$

Din (39) și (41) deducem identitatea dintre cele două polinoame de gradul $p-1$

$$T_p(W_{p-1}) \equiv \sum_{i=0}^{p-1} f^{(i)}(0)\, \frac{x^i}{i!}$$

care permite determinarea celor p coeficienți ai polinomului W_{p-1}.

De exemplu, folosind condițiile (34') pentru aflarea coeficienților lui W_{p-1}, obținem condițiile sub forma

$$\int_0^1 g(t)\cdot t^{n+p-j}\left(\frac{W^{(j)}(t)}{t^{n+1}}\right)^{(p-1-j)} dt = (-1)^n \frac{(p-1-j)!}{n!} f^{(j)}(0) \qquad (43)$$

pentru $j = 0, 1, \ldots, p-1$.

6. *Exemple*

Un exemplu simplu pentru ecuația (2) este

$$\frac{x^2-1}{2} y'' - x y' + y = f(x) \qquad (44)$$

a cărei soluție generală se scrie

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \int_a^x (x-t)^2 \frac{f'(t)}{t^2-1} dt + f(a)$$

sau sub forma (24)

$$y = C_0(x^2+1) + C_1 x + \left[\frac{1}{2} - \frac{(x-a)^2}{a^2-1}\right] f(a) + 2\int_a^x (x-t)\frac{tx-1}{(t^2-1)^2} f(t)\, dt$$

cu condiția $a^2 \neq 1$ dacă $f(a) \neq 0$.

Soluția problemei lui Cauchy ($x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$) poate fi găsită cu ușurință dacă se ia $a = x_0 \neq \pm 1$.

Un exemplu pentru ecuația (26) este dat de ecuația hipergeometrică pentru p întreg și pozitiv

$$(x - x^2) y'' - p(1-2x) y' - p(p+1) y = f(x) \qquad (45)$$

unde $\alpha = \gamma = -p$, $\beta = -(p+1)$, a cărei soluție clasică nu poate fi pusă sub forma cunoscută reprezentată printr-o integrală, β fiind un întreg negativ,

Soluția (33) a ecuației omogene (45), a cărei coeficienți verifică relațiile (36) ce iau forma simplă

$$(j+1) q_{j+1} + (p-j+1) q_j = 0 \quad ; \quad (j = 0, 1, \ldots, p-1)$$

se scrie în funcție de C_1 și C_2, constante arbitrare

$$y_0 = C_1 x^{p+1} + C_2 \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_{p+1}^i x^i .$$

Această soluție are forma mai simplă

$$y_0 = \int_0^1 h(u) \frac{(x-u)^{p+1}}{(p+1)!} du$$

cu condițiile

$$\int_0^1 h(u)\,du = A_1 \;;\; \int_0^1 h(u)\,u^i\,du = A_2 \;;\; (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

A_1 și A_2 fiind constante arbitrare.

Soluția generală a ecuației neomogene (45) va fi atunci

$$y = y_0 + \frac{1}{(p+1)!}\int_a^x (x-t)^{p+1}\,\frac{f^{(p)}(t)}{t-t^2}\,dt + \sum_{i=0}^{p-1} w_i\,x^i \;;\; (a \neq 0,1)$$

unde

$$w_i = \frac{1}{(p-i+1)!\;i!}\sum_{j=i}^{p-1}(-1)^{j-i+1}\,(p-j-1)!\;f^{(j)}(0)$$

expresie care poate fi scrisă cu ușurință sub o formă mai restrînsă.

Verificarea soluției y_0 este imediată căci $y_1 = x^{p+1}$ și $y_2 = (1-x)^{p+1}$ sînt soluții ale ecuației omogene (45). La fel și pentru soluția generală a ecuației neomogene (45) care poate fi derivată de $(p+2)$ ori în ipotezele făcute.

Observații finale

1. O integrare prin părți a soluției generale pentru ecuația (26) permite ca să se presupună că $f(x)$ aparține clasei $C^{p-1}[a, b]$, la fel ca și în cazul studiat la început.

2. Se poate studia și existența soluției generale în vecinătatea unei rădăcini c a polinomului $P_n(x)$. Astfel, pentru soluția (16), dacă $f'(x) = (x-c)^q\,f_1(x)$, cu $f_1(c) \neq 0$, și $q \geqslant m$, c este o singularitate aparentă pentru $\dfrac{f'(t)}{P_n(t)}$, și numai cazul $m-1 < q < m$ conduce la integrale generalizate absolut convergente.

La chaire de mathématique

О НЕКОТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ n — го ПОРЯДКА

(Краткое содержание)

Авторы изучают линейное дифференциальное уравнение n — го порядка с коэффициентами, являющимися многочленами класса Аппеля, разрешение которого можно произвезти элементарным путём. Это разрешение обеспечивает единство изложения главы дифференциальных уравнений классического курса по математическому анализу. Следует

заметить, что уравнение (3) обладает той же общностью с уравнениями с постоянными коэффициентами или же с уравнениями типа Эйлера, перед которыми оно имеет преимущество не вводить характеристическое алгебраическое уравнение ; фундаментальные функции непосредственно выявлены. Одно обобщение уравнения (3) привело К. Саулеску к уравнениям (20) и (22), зависящим от одного целого параметра $p > 0$. Пример гипергеометрического уравнения (24) позволяет непосредственно проверить некоторые результаты слишком сжато изложенные.

ON A DIFFERENTIAL EQUATION

(S u m a r y)

The authors Study a differential linear equation of the n order (3), with the coefficients, polynomials of the Appel class, which may be solved in an elementary manner and ensures a unity of exposition to the chapter of differrential equations in the classic course of Mathematical Analysis. It should be noted that equations (3) have the same generality as the equations with constant coefficients or as those of the Euler type, over which it offers the advantage of not introducing a characteristic algebraic equation, the fundamental system of solutions being immediately. An extension of equation (3) led C. Săulescu to equations (20) and (22) depending on an entire parameter $p > 0$, the example of the hypergeometrical equation (24) allows dircet verification of results too synthetically set forth.

SUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU n-ième ORDRE

(R é s u m é)

Les auters étudient une équation différentielle linéaire du n-ième ordre (3), à coefficients polynomes de la classe Appell, dont la résolution peut se faire par une voie élémentaire et qui assure une unité d'exposition au chapitre des équations différentielles du cours classique d'Analyse. Il est à remarquer que l'équation (3) a la même généralité que les équations à coefficients constants ou du type d'Euler sur lesquelles elle a l'avantage de ne pas introduire une équation algébrique caracteristique, le système fondamental étant immédiatement mis en évidence. Une extension de (3) a conduit M. C. Săulesco aux équations (20) ou (22) qui dépendent d'un paramètre entier $p > 0$, et l'exemple de l'équation hypergéométrique (24) permet la vérification directe des résultats exposés d'une manière trop succinte.

ÜBER EINE DIFFERENTIALGLEICHUNG n-ter ORDNUNG

(Zusammenfassung)

Die Verfasser erforschen eine Lineardifferentialgleichung n-ter Ordnung mit Koeffizienten, Polynom der Appel Klasse, deren Lösung auf elementaren Wege durchfuhrbar ist und dem Abschnitt uber Differentialgleichungen in der klassischen Abhandlung mathematischer Analyse die Darstellungseinheit sichert. Es ist bemerkenswert dass Gleichung (3) denselben allgemeinen Charakter aufweist wie die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, bzw, die Euler'schen Typus ; ihr Vorteil ist jedoch keine charakteristische algebraische Gleichung einzuführen, da die Fundamentalfunktionen unmittelbar heraustreten, Eine Verallgemeinerung von Gleichung (3) führte Const. Săulescu zu den von einem ganzen Parameter $p>0$ abhängigen Gleichungen (20) und (22) ; das Beispiel der hypergeometrischen Gleichung (24) ermöglicht die unmittelbare Überprüfung von zu synthetisch ausgeführten Ergebnissen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 5

MECANICĂ

SUR LA DÉTERMINATION DU DEGRÉ DE MOBILITÉ DES MÉCANISMES

par N. MANOLESCU et V. MANAFU

1. Introduction

Ce problème a fait l'objet de nombreuses recherchers et les résultats de certaines d'entre elles sont devenus classiques.

1. *La formule de Tchebytcheff*

$$3e - 2C_5 - 4 = 0 \tag{1}$$

indiquée dans son ouvrage de 1870 établit la condition de désmodromie d'un mécanisme plan articulé.

Ci dessus :

e — signifie le nombre total des *éléments* d'un mécanisme, et

C_5 — est le nombre total des couples *cinématiques* de cinquième classe (articulations).

2. Dans son „Getriebelehre" de 1917, *Grübler* présente la même formule sous la forme :

$$2e - 3n + 4 = 0 \tag{2}$$

dans laquelle :

e — est le nombre total des couples cinématiques inférieurs, et

n — est le nombre total des élements du mécanisme plan articulé.

En partant de la formule (2) on peut déterminer le nombre des couples inférieurs (articulations) d'un mécanisme plan désmodrome en fonction du nombre de ses éléments :

$$e = \frac{1}{2}(3n - 4) \tag{3}$$

résultat qui a été déjà mis en évidence par Tchebytcheff en formulant que le nombre des éléments d'un mécanisme plan articulé désmodrome avec un degré de mobilité doit être paire.

3. *La formule Somoff-Malytcheff* 1928 établit le degré de mobilité d'un mécanisme spatial dans le cas le plus général lorsque dans sa structure on trouve des couples cinématiques de cinques classes :

$$M = 6n - 5C_5 - 4C_4 - 3C_3 - 2C_2 - C_1 \tag{4}$$

Ici :

M — signifie le degré de mobilité ;
n — est nombre des éléments *mobiles* et
C_5, C_4, C_3, C_2, C_1 — le nombre des couples cinématiques de la classe indiquée par l'indice.

Cette formule s'applique seulement aux mécanismes spatiaux de famille zéro, c'est-à dire aux mécanismes dont les éléments avant d'être liés en chaîne cinématique n'ont aucune condition commune de liaison entre leurs mouvements.

4. *Assur* a établi la clasification des mécanismes plans articulés en introduisant la notion *de groupe* (nommé aujourd'hui „groupe assurique") — chaîne cinématique ouverte qui ajoutée ou extraite d'un mécanisme plan articulé n'en modifie pas le degré de mobilité.

A l'aide de cette méthode le nombre des degrés de mobilité d'un mécanisme est déterminé par la mobilité des mécanismes fondamentaux qui restent aprés l'extraction de tous les „groupes assuriques".

5. C'est *V. V. Dobrovolski* (1943) qui a donné la formule générale pour déterminer le nombre des degrés de mobilité des mécanismes de différentes familles :

$$M_f = (6 - f)\, n - \sum_{m=f+1}^{5} (m - f)\, C_m \tag{5}$$

dans laquelle :

M_f — est le degré de mobilité du mécanisme de famille „f"
n — est le nombre des éléments du mécanisme, ($n = e - 1$, ou „e" est le nombre total des éléments).
f — est la famille du mécanisme ($f = 0, 1, 2, 3, 4$).
C_m — est le nombre des couples cinématiques de classe „m" ($m = 1, 2, 3, 4, 5$).

On voit facilement qu'en donnant à „f" différentes valeurs (0,1,2,3,4) on obtient 5 formules parmis lesquelles on reconnaît celle de Somoff-Malytscheff (4) pour $f = o$, et celle de Tchebytcheff (1) pour $f = 3$ (et $n = e - 1$).

6. La formule établie par *Alt* pour le degré de mobilité des mécanismes plans avec des couples cinématiques supérieurs et inférieurs indiquée par W. Lichtenheld [1a] n'est q'une particularisation de la formule de Dobrovolski pour $f = 3$.

Cette formule est :

$$2\left(e_1 + \frac{e_2}{2}\right) - 3n + 3 + F = 0 \tag{6}$$

où :

e_1 — est le nombre des couples cinématiques inférieurs = C_5 dans les formules (4) et (5).

e_2 — est le nombre des couples cinématiques supérieurs, identique avec C_4 des formules (4) et (5).

n — est le nombre total des éléments du mécanisme = „e" dans la formule (1) de Tchebytcheff et $n + 1$ dans les formules (4) et (5).

$F = M_f$ où $f = 3$ dans la formule (5).

7. Dans notre pays :

a. *E. Bugaevski, R. Bogdan* et *Chr. Pelecudi* [3] ont établi une classification des chaînes cinématiques spatiales et étudient les mécanismes spatiaux de diverses familles avec des couples cinématiques „uniformisés" et spécialement avec des couples inférieurs (C_5).

Le tableau de classification donne le degré de mobilité de toutes les chaînes cinématiques en fonction de n (nombre des éléments), z (nombre des contours fermés déformables) et p (nombre des couples cinématiques inférieurs = C_5).

b. *Radu Voinea et M. Atanasiu* [4] utilisent la même formule que Moroskine [5] :

$$W = N - r \tag{7}$$

où :

$W = M$ — est le degré de mobilité de la chaîne cinématique.

N — est le nombre de tous les paramètres scalaires cinematiques de la chaîne.

r — est le rang de la matrice du système linéaire et homogène des paramètres cinématiques ω_j, ou v_j qui détermine l'état du mouvement de la chaîne [formule (199 page 46)].

Pour trouver le rang „r" de la matrice d'nu mécanisme, ces auteurs introduisent la notion nouvelle d'ensemble des vis comme extension de la notion connue d'ensemble des droites.

Basés sur un théorème qu'ils établissent relativement à l'équivalence d'un couple cinématique de classe k à 6-k couples vis, ils arrivent à des chaînes cinématiques qui ne contiennent que des couples vis (en particulier des couples de rotation).

La configuration des axes de ces vis, ainsi que les valeurs de leurs paramètres déterminent le rang „r" de la matrice et en appliquant la formule (7) on obtient la valeur du degré de mobilité du mécanisme.

c. Les premiers résultats des recherches des auteurs du présent article furent publiés es 1956 [6 a].

Ainsi qu'on le verra dans la suite, le premier des auteurs développe la méthode utilisée par Assur dans le plan, en déterminant pour l'éspace

les chaînes cinématiques ouvertes à mobilité additionelle donnée M_g, ou nulle nomées groupes et on détermine la mobilité du mécanisme par la formule :

$$M = M_f + \sum M_{gf'} \quad , \qquad f' \leqslant f \tag{8}$$

où M_f est la valeur de la mobilité connue d'un mécanisme auquel on attache les groupes de mobilité additionelle $\sum M_{gf}$, (avec $f \geqslant f'$).

Le second auteur considère que le mécanisme donné est formé par la liaison de plusieurs mécanismes (à chaîne cinématique fermée) et arrive à la formule :

$$M = \sum M^j - M^l \tag{13}$$

où M^j est la mobilité d'un des mécanismes composants et M^l la mobilité du mécanisme de liaison formé par les éléments et couples communs aux mécanismes composants.

Dans le cas où les mécanismes composants sont tous à chaîne cinématique simple, la formule (13) devient :

$$M = M_0 + \sum f_j \tag{14}$$

— où M_0 est la valeur du degré de mobilité du mécanisme entier, calculée en appliquant la formule de Malytcheff (4) et f_j la famille de la chaîne cinématique de décomposition j.

Enfin dans le cas où les divers décompositions possibles d'un mécanisme donneraient des valeurs différentes, les formules (13) et (14) deviennent :

$$M = max\ (\sum M^j - M^l) \tag{13'}$$

$$M = M_0 + max \sum f_j \tag{14'}$$

2. La méthode et la formule pour la détermination du degré de mobilité d'un mécanisme quelconque

La complexité des divers mécanismes existants en technique et l'analyse de leur structure ont prouvé qu'en beaucoup de cas la formule la plus générale du degré de mobilité établie par V. V. Dobrovolski (5) ne donne pas des résultats en concordance avec la réalité.

Cette remarque a été mise en évidence par nous dix ans auparavant et nous avons cherché d'expliquer la cause.

Dans le livre publié en 1956, cité plus haut [6 a] et ultérieurement dans une étude [6 b], nous avons proposé la formule suivante pour la détermination du degré de mobilité d'un mécanisme auquel on ne peut pas appliquer la formule (5) de V. V. Dobrovolski :

$$M = M_f + \sum M_{gf'} \qquad f' \leqslant f \tag{8}$$

où :

M_f — le degré de mobilité du mécanisme fondamental de famille „f" qui reste après l'extraction du mécanisme initial des groupes assuriques à mobilité nulle ou à mobilité additionelle donnée (positive ou négative).

$\sum M_{gf'}$ — la somme des degrés de mobilité des groupes de différentes familles.

Cette somme est :

— nulle en cas des groupes assuriques ;

— négative ou positive pour le cas des groupes nonassuriques (à mobilité additionelle). Dans cette catégorie sont inclus aussi les groupes et les éléments à caractère passif.

L'étude comporte premièrement l'identification des groupes assuriques de différentes familles en utilisant la formule structurelle du groupe assurique de famille „f" proposée par V. V. Dobrovolski :

$$(6-f)n' - \sum_{m=f+1}^{5} (m-f)C'_m = 0 \qquad (5)$$

et particularisée pour $f = 0, 1, 2, 3, 4$.

Les groupes assuriques de différentes familles sont inscrits dans les tableaux Nr. 1, 2, 3, 4 et 5.

Dans chaque tableau les groupes assuriques sont classés suivant leurs structures et leurs couples cinématiques en groupes simples ou complexes, avec ou sans couples uniformisés.

Les cinq tableaux ci dessus donnent une classification des groupes et des mécanismes dépassant largement les besoins de la pratique.

La même méthode, en utilisant les formules inscrites au dessus de chaque tableau, pourrait conduire à des groupes et à mécanismes ayant un plus grand nombre d'éléments et de couples cinématiques, qui n'ont pourtant qu'un intérêt théorique.

La formule (8) impose la condition d'identifier préalablement les éléments passifs et les groupes cinématiques de diverses familles avec ou sans caractère d'éléments passifs.

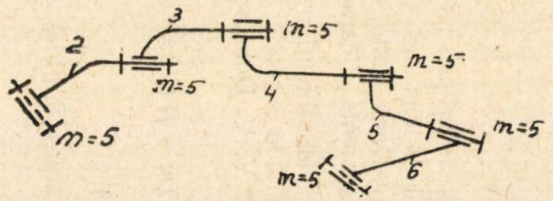
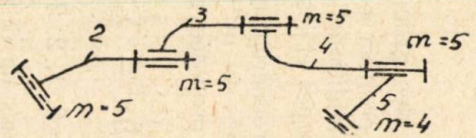
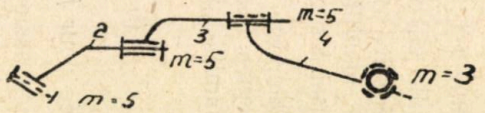
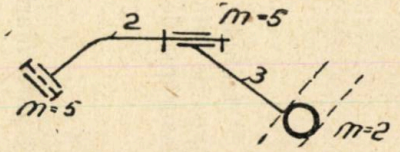
Pour éliminer l'éventualité d'une fausse analyse d'un mécanisme donné, il faut partir d'un mécanisme fondamental dont la famille est supérieure ou égale aux familles des groupes qui „amplifient" ou „allongent" ce mécanisme fondamental.

L'application de la formule (8) proposée par nous est présentée sur des exemples de mécanismes, parallèment à la „méthode de liaison des mécanismes", exposée au paragraphe suivant, (§ 4) ce qui constituie le but du présent article.

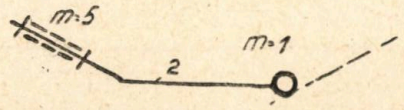
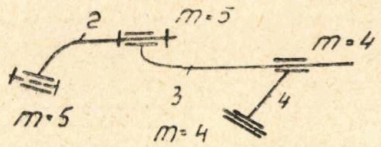
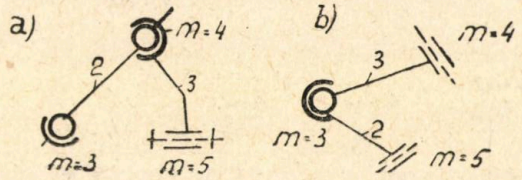
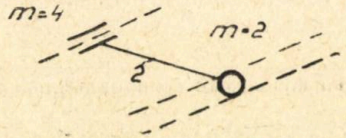
Tableau no. 1

Groupes assuriques simples et complexes de famille zéro

$$n' = \frac{1}{6}\left(5\,C_5' + 4\,C_4' + 3\,C_3' + 2\,C_2' + C_1'\right)$$

No. crt.	Nombre des couples cinématiques du groupe assurique					Nombre des éléments du groupe assurique n'	La configuration du groupe cinématique	La caractéristiques du groupe assurique
	C_5'	C_4'	C_3'	C_2'	C_1'			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6	—	—	—	—	5		Groupe assurique simples avec des couples uniformisés
2	4	1	—	—	—	4		Groupes assuriques simples
3	3	—	1	—	—	3		
4	2	—	—	1	—	2		

Groupes assuriques simples et complexes de famille zéro — *Tableau no. 1 (suite)*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	1	—	—	—	1	1		Groupes assuriques simples
6	2	2	—	—	—	3		
7	1	1	1	—	—	2		
8	—	1	—	1	—	1		

Groupes assuriques simples et complexes de famille zéro — *Tableau no. 1 (suite)*

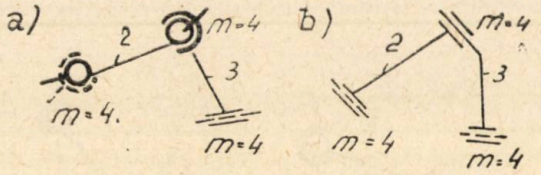
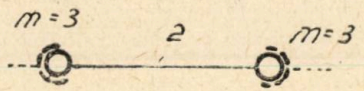
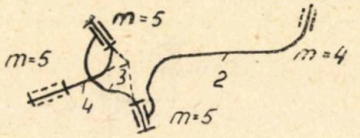
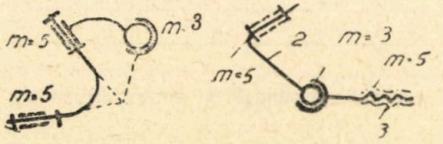
No. crt.	Nombre des couples cinématiques du groupe assurique					Nombre des éléments du groupe assurique n'	La configuration du groupe cinématique	La caractéristique du groupe assurique
	C'_5	C'_4	C'_3	C'_2	C'_1			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	—	3	—	—	—	2		Groupes assurique simples avec des couples uniformisés
10	—	—	2	—	—	1		
11	—	6	—	—	—	4		Groupes assuriques complexes avec des couples uniformisés
12	—	—	6	—	—	3		
13	—	—	—	6	—	2		
14	—	—	—	—	6	1		
15	—	—	4	—	—	2		

Tableau no. 2

Groupes assuriques simples et complexes de première famille

$$n' = \frac{1}{5}\left(4C'_5 + 3C'_4 + 2C'_3 + C'_2\right)$$

No. crt.	Nombre des couples cinématiques du groupe assurique				Nombre des éléments du groupe assurique	La configuration du groupe cinématique	La caractéristique du groupe assurique
	C'_5	C'_4	C'_3	C'_2			
1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	—	—	—	4		Groupe assurique simple avec des couples uniformisés
2	3	1	—	—	3		Groupe assurique simple
3	2	—	1	—	2		

Groupes assuriques simples et complexes de **première famille** *Tableau no. 2 (suite)*

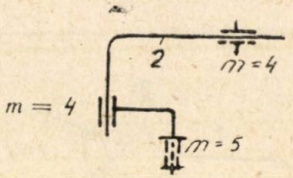
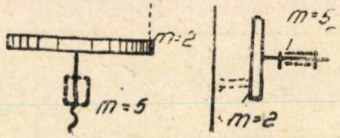
No. crt.	Nombre des couples cinématiques du groupe assurique				Nombre des éléments du groupe assurique n'	La configuration du groupe cinématique	La caractéristique du groupe assurique
	C_5'	C_4'	C_3'	C_2'			
1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	2	—	—	**2**		Groupe assurique simple
5	1	—	—	1	1		
6	—	1	1	—	1		
7	1	1	1	1	**2**	sans application pratique	Groupes assuriqes complexes
8	1	—	3	—	2		
9	—	5	—	—	3		Groupes assuriques complexes avec des couples uniformisés
10	—	—	5	—	2		
11	—	—	—	5	1		

Tableau no. 3

Groupes assuriques simples et complexes de seconde famille

$$n' = \frac{1}{4}\left(3\,C_5' + 2\,C_4' + C_3'\right)$$

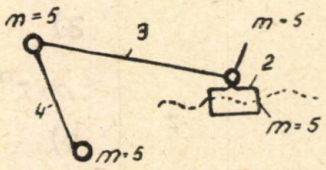
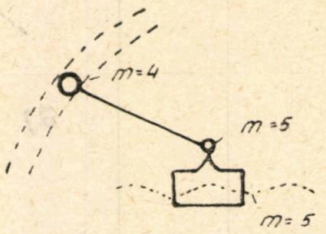
No. crt.	Nombre des couples cinématiques du groupe assurique			Nombre des éléments du groupe assurique n'	La configuration du groupe cinématique	Le caractéristique du groupe assurique
	C_5'	C_4'	C_3'			
1	2	3	4	5	6	7
1	4	0	0	3		Groupe assurique simple avec des couples uniformisés
2	2	1	0	2		Groupe assurique simple
3	1	—	1	1		
4	—	2	—	1		Groupe assurique simple avec des couples uniformisés
5	—	4	—	2		Groupes assurique complexes avec des couples uniformisés
6	—	—	4	1		

Tableau no. 4

Groupes assuriques simples et complexes de troisième famille

$$n' = \frac{1}{3}(2C'_5 + C'_4)$$

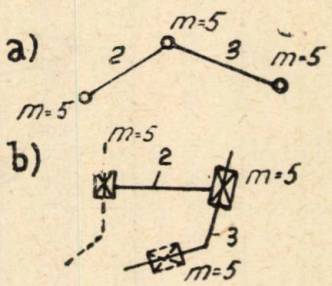
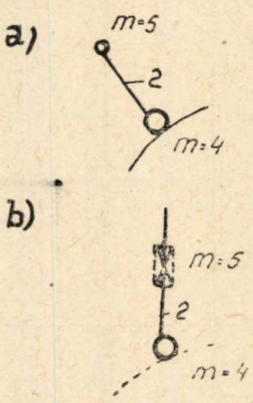
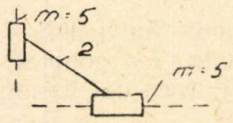
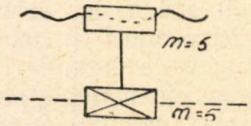
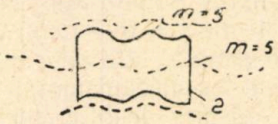
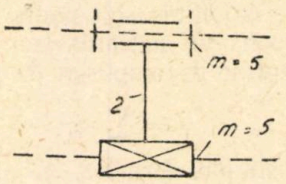
No. crt.	Nombre des couples cinématiques du groupe assurique		Nombre des éléments du groupe assurique n'	La configuration du groupe cinématique	La caractéristique du groupe assurique
	C'_5	C'_4			
1	2	3	4	5	6
1	3	—	2		Groupe assurique simple avec des couples, uniformisés (diade)
2	1	1	1		Groupe assurique simple
3	—	3	1		Groupe assurique simple avec des couples uniformisés
4	3	—	2		Groupes assuriques complexes avec des couples uniformisés
5	6	—	4		
6	9	—	6		
7	2	2	2		Groupes assuriques complexes
8	1	4	2		

Tableau no. 5

Groupes assuriques simples et complexes de quatrième famille

$$n' = \frac{1}{2} C_5'$$

No. crt.	Nombre des éléments et couples du groupe assurique		la configuration du groupe cinématique	Le caractéristiques du groupe assurique
	C_5'	n'		
1	2	3	4	5
1	2	1	a)  b)  c)  d) 	Groupes assuriques simples avec des couples uniformisés
2	4	2		
3	6	3		Groupes assuriques complexes avec des couples uniformisés
4	8	4		
5	10	5		

3. La détermination du nombre de degrés de mobilité d'un mécanisme par la méthode de liaison des mécanismes

L'utilisation de la formule Somoff-Malytcheff :

$$M_o = 6\,n - \sum m\,C_m \tag{4}$$

ou de la formule Dobrovolski, plus générale :

$$M_f = (6 - f)\,n - \sum (m - f)\,C_m \tag{5}$$

pour déterminer le nombre des degrés de mobilité d'un mécanisme sont limitées.

La formule Somoff-Malytcheff — suppose qu'il n'y a pas de relations de position entre les couples cinématiques du mécanisme ce qui auraient pour conséquence de diminuer le nombre des liaisons representées par leurs classes.

La formule Dobrovolski s'applique en pratique à beaucoup de mécanismes dans le cas où aucun des éléments du mécanisme n'exécute les mêmes „f" des six composantes du mouvement élémentaire.

On va démontrer que la formule Dobrovolski est valable pour tous les mécanismes à chaîne cinématique simple, „f" étant la différence entre le nombre de degrés de mobilite réele du mécanisme et M_f la même valeur M_o calculée d'aprés Somoff-Malytcheff.

On vérifie aisémet que $f = 6 - r$, où „r" est le rang de la matrice de la chaîne cinématique simple, utilisée par Moroskine, Voinea et Atanasiu.

En ce qui concerne les mécanismes à chaînes cinématiques complexes décomposables en mécanismes de différentes familles, ainsi qu'il a été déjà montré [2 b] on ne peut pas trouver toujours un nombre „f" tel que le nombre des degrés de mobilités soit donné par la formule (5).

En effet, considérons un mécanissme à chaîne cinématique complexe. Ce mécanisme peut se décomposer, de plusieurs manières, en :

$$z = \sum c_m - n \tag{9}$$

chaînes cinématiques simples fermées, ce qui permet d'écrire :

$$M_f = (6 - f)\,n - \sum (m - f)\,C_m = M_0 + f \cdot z \tag{10}$$

Donc :

1). Dans le cas des mécanismes à chaîne cinématique simple :

$$z = 1 \quad \text{et} \quad f = M_f - M_0 \tag{11}$$

2). Pour les mécanismes décomposables en chaînes cinématiques simples de familles différentes, on peut déterminer un nombre „f" tel que la mobilité soit donnée par la formule de Dobrovolski seulement si :

$$f = \frac{M_f - M_0}{z} \tag{12}$$

est un nombre entier.

Dans la méthode de liaison des mécanismes, [2] le mécanisme à étudier est considéré comme étant obtenu par la réunion de plussieurs mécanismes (a chaînes cinématiques fermées).

Les éléments et les couples cinématiques communs aux mécanismes composants, forment ce que nous avons appelé, le mécanisme de liaision.

Les mécanismes composant un mécanisme donné, peuvent être choisis de plusieurs façons, à condition d'avoir tous un élément commun qui peut être fixe ou non. Ils peuvent être à chaîne cinématique simple ou complexe, mais dans la plupart des cas on préfère ceux à chaîne cinématique simple dont on détermine plus facilement la mobilité et la famille.

La différence avec la méthode du paragraphe 2, où le mécanisme est obtenu par l'addition des chaînes cinématiques ouvertes et où chaque élément et chaque couple cinématique n'appartient qu'à une seule chaîne cinématique, est évidente et donne en même temps la possibilité d'étudier dans le cas des mécanismes spatiaux, le fonctionnement des groupes cinématiques de diverses familles dans les mécanismes où elles entrent.

La valeur de la mobilité du mécanisme résultant s'obtient en partant des valeurs des mobilités des mécanismes composants et du mécanisme de liaison conformément aux théorèmes :

Théorème I. Si M_j est la valeur du degré de mobilité du mécanisme de décomposition j est M^l la mobilité du mécanisme de liaison, la valeur du degré de mobilité du mécanisme donné, est :

$$M = \sum M^j - M^l . \tag{13}$$

En effet en supposant les mécanismes composants indépendants, à l'aide de $\sum M^j$ paramètres on détermine les mobilités de tous ces mécanismes, c'est à dire en même temps la mobilité du mécanisme donné „M" et du mécanisme de liaison „M^l" qu'ils forment après leur réunion.

Théorème II.

Dans le cas où tous les mécanismes de décomposition sont à chaîne cinématique simple, la valeur de la mobilité est :

$$M = M_0 + \sum f_j \tag{14}$$

où M_0 est la valeur du nombre des degrés de mobilité, calculée en appliquant la formule Somoff-Malytcheff au mécanisme entier, et f_j la famille du mécanisme de décomposition j.

La formule (14) se deduit de (13) et (9) en observant que pour le mécanisme de liaison à chaîne ouverte :

$$M = M_0 \text{ et } f = 0$$

Pour appliquer correctement les formules (13) et (14) il faut prendre pour valeur du degré de mobilité, la plus grande des valeurs obtenues pour les différentes décompositions possibles, afin de tenir compte des relations supplémentaires de position qui existeraient éventuellement entre

les couples cinématiques, qui n'appartiennent pas aux mécanismes de liaison.

Donc les formules (13) et (14) deviennent :

$$M = max\ (\sum M^j - M^l) \tag{13'}$$

et :

$$M = M_0 + max \sum f_j. \tag{14'}$$

On n'arrive pratiquement pas à utiliser les formules (13') et (14'), car les autres mécanismes, sauf ceux qui sont choisis normalement pour la décomposition, sont longs et, n'appartiennent pas à une même famille au sens Dobrovolski, il sont de la famille zéro, où les positions des couples cinématiques sont indépendantes.

Dans la fig. 2 on a construit comme exemple un mécanisme pour montrer la façon dont il faut utiliser les formules (13') et (14').

Le théorème II est d'une application plus générale que le théorème I en ce sens que les mécanismes de décomposition n'y sont plus restreints à avoir un élément commun.

4. Exemples

Dans la suite on donne des exemples de mécanismes qui n'appartiennent pas a une famille au sens Dobrovolski et dont les valeurs des nombres des degrés de mobilité sont déterminées par les formules (8), (13), — (13') et (14) — (14').

a) Le mécanisme dont le schéma est donné dans la figure No. 1, se compose d'un quadrilatère plan ABCD, au balancier (3) duquel on a lié un groupe assurique de famille zéro EFG (pos. 7. tab. 1). La mobilité n-en est évidement pas changée conformément à la formule (8). On obtient la même valeur de la mobilité en regardant le mécanisme formé par la réunion d'un quadrilatère plan ABCD et d'un quadrilatère spatial DEFG — ayant en commun le mécanisme de liaison formé par le couple de rotation D et par l'élement DEC. La mobilité de chaque mécanisme de décomposition ainsi que la mobilité du mécanisme de laision sont égales à l'unité ce qui donne pour la mobilité du mécanisme final d'après la formule (13) :

$$M = M^1 + M^2 - M^l = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Pour appliquer la formule (14) il faut remarquer que les deux mécanismes de décomposition sont respectivement de famille zéro et trois et que la valeur de la mobilité calculée avec la formule Somoff-Malytcheff est égale à „—2".

Donc :

$$M = M_0 + \sum f_j = -2 + 0 + 3 = 1.$$

On obtient le même résultat si $\sum f_j$ correspond aux gorupes assuriques de famille zéro et trois.

b) L'éxemple de la fig. 2 montre le même mécanisme plan à la bielle duquel on a lié le groupe de famille zéro EFG, en obtenant un nouveau

mécanisme de mobilité égale à l'unité. Quant aux mécanismes de décomposition, on peut les choisir de deux façons : ABCD + ABEFG (ou DCEFG), ou bien ABEFG + DCEFG. La première décomposition donne la valeur maximum de la mobilité, avec les formules (13) et (14). On rappelle que ce mécanisme a été, construit pour montrer la façon d'appliquer les formules (13')et (14').

c) L'exemple de la fig. 3 emprenté à Lichtenheld, [1 b] montre le mécanisme de fermeture d'un récipient de haute pression.

d) L'exemple 4 emprenté à H. Boden [7], montre un mécanisme composé de plusieurs chaînes planes et spatiales. Le mécanisme a deux degrés de mobilité et sert à actionner une cisaille.

On observe que le deuxième et troisième groupes assuriques de famille zéro [(8, 9) et respectivement (2, 3)] sont compris dans la structure des mécanismes de liaison (3, 8, 9, 10, 13) et (1, 2, 3, 13) tous les deux de la famille zéro. Le groupe assurique de troisième famille (10, 11) est compris dans la structure du mécanisme quadrilatère plan (12, 11, 10,, 13) de même famille (troisième).

Dans le cas de la première formule (14) le degré de mobilité est :

$$M = M_o + \sum f_j = -7 + (3 + 3 + 0 + 0 + 3) = 2$$

Dans le cas de la méthode de liaison des mécanismes la formule (13) donne le même resultat :

$$M = M_o + \sum f_j = -1 + 3 = 2$$

$M_0 = -1$ est différent du premier cas parce que dans l'ensemble du mécanisme on a negligé les deux groupes assuriques (4, 5) et (6, 7) de troisième famille.

e) La fig. 5 montre un mécanisme de machine à coudre en „Zig-Zag".

L'application des méthodes indiquées plus haut est trés avantageuse. On voit que l'application de la formule (14) est valable pour les deux méthodes du §§ 2 et 3.

L'exemple de la fig. 6, ainsi que ceux des fig. 1 et 2, ont été composés à des fins démonstratives.

Enfin, l'exemple de la fig. 7 reproduit celui de la fig. 3, auquel on a changé les longueurs des éléments.

5. CONCLUSIONS

Pour déterminer la valeur du degré de mobilité d'un mécanisme, il est de la plus grande utilité de connaître les mécanismes à chaîne cinématique simple, ayant les mobilités usuelles : 1, 2, 3, ... ainsi que les groupes assuriques contenus dans leurs structures, pour chacune des cinques familles.

Pour ci faire, on peut appliquer soit la méthode directe géométrique, soit la méthode Dobrovolski, soit enfin la méthode des matrices dont on

déterminera le rang ; soit directement par calcul, soit par la méthode des ensembles des vis de Voinea et Atanasiu.

Dans l'étude pratique d'un mécanisme, on commence par le décomposer en chaînes cinématiques simples, dont on examine le fonctionnement, et on détermine la mobilité et la famille. Comme consequence directe, il en résultent les groupes „assuriques" ou non qui entrent dans la structure du mécanisme donné.

La valeur de la mobilité peut alors être déterminée à l'aide de l'une des formules (8), (13) ou (14), ce qui permet en même temps une vérification.

Il est de la plus grande importance de remarquer que l'identification des „groupes assuriques" conduit directement à la décompostion en chaînes cinématiques simples, qui donne la valeur maximum pour la mobilité, selon les formules (13′) et (14′).

La chaire des mécanismes

BIBLIOGRAPHIE

1. *I. Lichtenheld W.* — a) Konstruktionslehre der Getriebe — Akademie Verlag Berlin 1961 — pag. 37.
   b) Maschinenbau Technik — Heft 8 — 1957, pag. 462.
2. *Manafu V.* — Metoda legării mecanismelor.
   a) Sez. Ştiinţifică a Inst. Agronomic Bucureşti 1955 — reprodus în (b) pag. 169.
   b) Structura şi Cinematica Mecanismelor pag. 104—107 Ed. Tehnică Bucureşti 1959.
3. *Bugaevski E., Bogdan R., Pelecudi Cr.* — Contribuţii la clasificarea mecanismelor spaţiale, Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicată, — Acad. R.P.R. T. VIII, nr. 2, 1957.
4. *Voina R.* şi *Atanasiu M.* — a) Contributions à la théorie géometrique des vis — Buletinul Inst. Politehnic, 1959 — III.
   b) Contribution à l'étude de la stucture des chaînes cinématiques — Bul. Inst. Politehnic Bucureşti, 1960 — I.
5. *Moroskine Iu. F.* — Osnovî analitiveskoi teorii mehanizmov. Trudî seminara T.M.M. An U.R.S.S. T. XIV—54—1954.
6. *Manolescu I. N.* — a) Teoria Mecanismelor şi a Maşinilor vol. I, 1956 — Lit. Inst. Căi Ferate Bucureşti.
   b) Asupra mecanismelor formate din lanţuri cinematice de diferite familii. Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicată Nr. 3/XII/1961 pages 589—614 şi Revue de Mécanique Appliquée, tome VII/1962 pages 335—361 (en langue Russe).
7. *Boden H.* — Zum Zwanglauf gemischt räumlich - ebener Getriebe — Manschinenbau Technik Heft 11/1962 page 612.

ОТНОСИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ ПОДВИЖНОСТИ МЕХАНИЗМОВ

(Краткое содержание)

Вначале представлены классические методы Чебышева, Грюблера, Г. Альта, Сомова-Малышева, Ассура и Добровольского, а также и некоторых исследователей из нашей страны: Богдана, Бугаевского, Пелекуди, Раду Войня и М. Атанасиу.

Разбираются затруднения, появляющиеся в случае пространственных механизмов, в которых не всегда возможно определить степень подвижности путём прямого применения одной из формул, установленных исследователями из других стран.

Работа является синтезом исследований произведенных авторами за восемь лет.

а) Первый метод развивает метод применённый Ассуром для плоских механизмов, определяя для случая пространственных механизмов кинематические цепи данной аддитивной подвижности либо нулевых названных групп.

Эти результаты записаны в таблицах для каждой семьи механизмов. Подвижность данного механизма получается прибавляя к подвижности основного механизма подвижности неассурийных групп либо равна подвижности механизма в том случае, когда все группы являются ассурийными (нулевой подвижности).

б) Второй метод считает, что данный механизм образован путём соединения нескольких механизмов.

Подвижность результирующего механизма получается вычитывая из суммы подвижностей составляющих механизмов подвижность механизма соединения, образованного из звеньев, общих для составляющих механизмов, соединённых между собой.

В том случае, когда составляющие механизмы образованы все из простых кинематических цепей, подвижность получается путём прибавления суммы семей составляющих механизмов к подвижности расчитанной по формуле Сомова-Малышева

$$M = M_0 + \Sigma f_j$$

Эта формула действительна и в случае первого метода, где Σf_j является суммой семей ассурийных либо неассурийных групп, образованных из простых кинематических цепей.

Представляются примеры различных механизмов, степень подвижности которых определена обоими методами, выявляя структурную связь, существующую между составляющими механизмами и ассурийными либо неассурийными группами.

THE DETERMINATION OF THE DEGREES OF MOBILITY OF THE MECHANISMS

(Summary)

The paper begins with the presentation of the well known methods of Tchebychef, Grübler, Alt, Somoff-Malytchef — and the recent works of Rumanians research workers Bogdan, Bugaevski, Pelecudi, R. Voinea and M. Atanasiu.

The difficulties which appear in space mechanisms, where it is not always possible to determine the number of degrees of mobility by direct application of any known formula is being discussed.

The paper is the synthesis of the researches of the two authors.

a). The method of the first author develops that utilised by Assur for the plane mechanisms. It will be determined for the space the cinematic chains with or without additional degrees of mobility, designated cinematic groups. These groups are shown for each family of mechanisms. The number of degrees of mobility of any given mechanism is obtained by adding to the number of degrees of mobility of the base mechanism the number of degrees of the groups of non-Assur type or else is equal if the added groups are of Assur-type.

b). The second author considers the given mechanism as a connection of several known mechanisms, having a common link. The resulting degree of mobility is obtained by subtracting the degrees of mobility of the connecting mechanism, composed by the common links and couples from the sum of degrees of mobility of the connected mechanisms.

When all the connected mecanisms are of simple cinematic chain type, the degree of mobility will be obtained by adding to the value M_0, resulting from the formula of Somoff-Malytchef, the sum of the family numbers of the connected mechanisms.

$$M = M_o + \sum f_j$$

This formula applies also for the first method, „f" being then the sum of the family numbers of the conected group (Assur or non-Assure type).

Examples of different mechanism are schown, their degrees of mobility having been determined by the two methods.

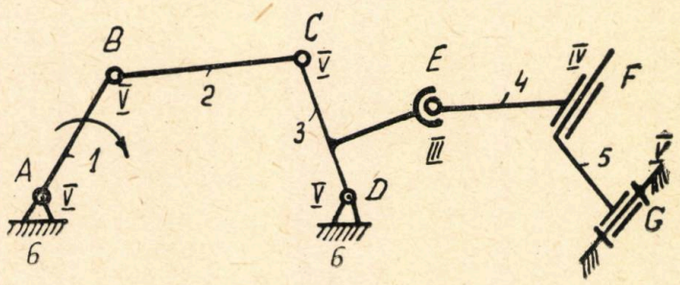
The structural relation of the connected mechanisms of the second method with the cinematic groups (Assur type or non Assur type) utilized in the first method are also shown.

SUR LA DETERMINATION DU DEGRÉ DE MOBILITÉ DES MÉCANISMES

(Résumé)

On commence par présenter les méthodes classiques de Tchebytcheff Gruebler, Alt, Somoff-Malytceff, Assur et Dobrowolski ainsi que les études faites en Roumainie par Bogdan, Pelecudi, Bugaewski, Voinea et Atanasiu.

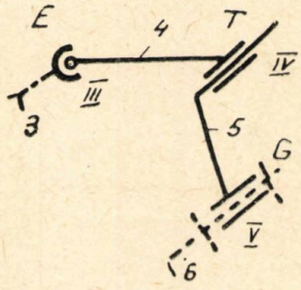
Détermination du degré de mobilité du mécanisme



par :

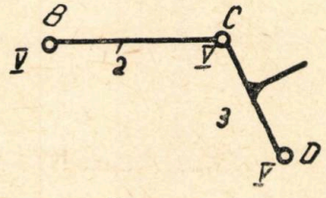
Les formules (8) et (14) :

Le premier groupe assurique :



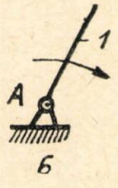
$f' = 0 \quad M'_{g_0} = 0$ (pos. 7 tab. 1)

Le second groupe assurique :



$f'' = 3 \quad M''_{g_3} = 0$ (pos, 1 tab. 4)

Le mécanisme fondamental :



$f = 3 \quad M_3 = 1$

La formule (8) donne :

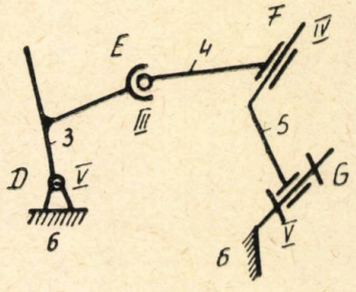
$M = M_3 + M'_{g_0} + M''_{g_3} = 1 + 0 + 0 = 1$

La formule (14) donne :

$M = M_0 + \Sigma f = -2 + (0 + 3) = 1$

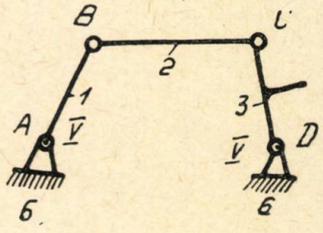
Les formules (13) et (14) :

Le premier mécanisme :



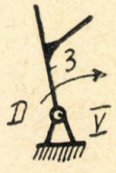
$f' = 0 \quad M'_0 = 1$

Le second mécanisme :



$f'' = 3 \quad M''_3 = 1$

Le mécanisme de liaison :



$M^l = 1$

La formule (13) donne :

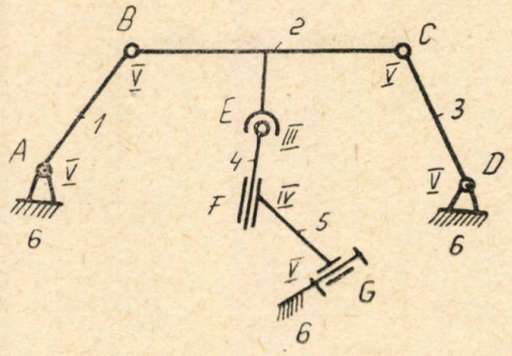
$M = M'_0 + M''_3 - M^l_3 = 1 + 1 - 1 = 1$

La formule (14) donne :

$M = M_0 + \Sigma f = -2 + 3 = 1$

Fig. 1

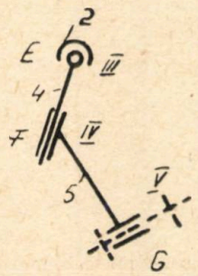
Détermination du degré de mobilité du mécanisme



par :

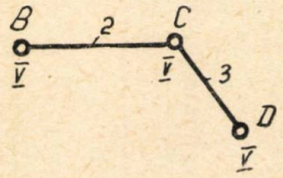
Les formules (13) et (14) :

Le premier groupe assurique :



$f' = 0 \quad M'_{g_0} = 0$ (pos. 7 tab. 1)

Le second groupe assurique :



$f'' = 3 \quad M''_{g_3} = 0$ (pos. 1 tab. 4)

Le mécanisme fondamental :

$f = 3 \quad M_3 = 1$

La formule (8) donne :

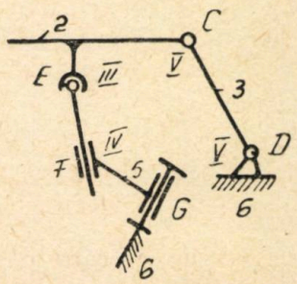
$M = M_3 + M'_{g_0} + M''_{g_3} = 1 + 0 + 0 = 1$

La formule (14) donne :

$M = M_0 + \Sigma f = -2 + (0 + 3) = 1$

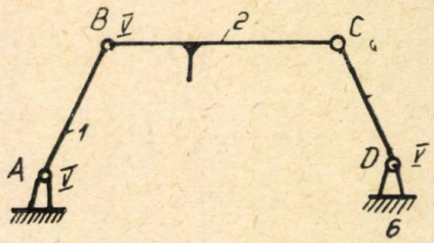
Les formules (8) et (14) :

Le premier mécanisme :



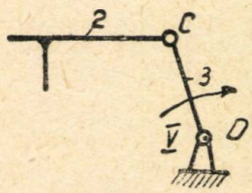
$f'' = 0 \quad M''_0 = 2$

Le second mécanisme :



$f' = 3 \quad M'_3 = 1$

Le mécanisme de liaison :



$f^l = 3 \quad M^l_3 = 2$

La formule (13) donne :

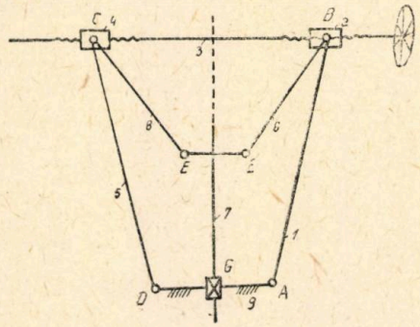
$M = M'_3 + M''_0 - M^l_3 = 1 + 2 - 2 = 1$

La formule (14) donne :

$M = M_0 + \Sigma f = -2 + 3 = 1$

Fig. 2

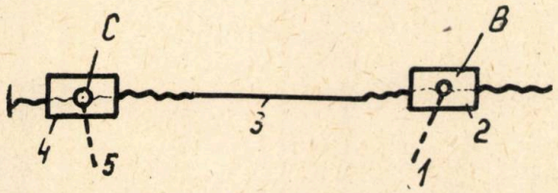
Détermination du degré de mobilité du mécanisme



par :

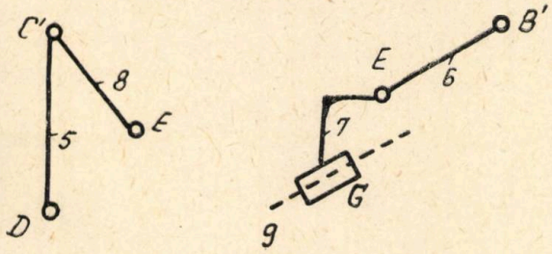
Les formules (8) et (14) :

Le premier groupe assurique :



$f'_g = 2 \quad M'_{g_2} = 0$ (pos. 1 tab. 3)

Le second et le trosième groupes assuriques :



$f'' = f''' = 3 \quad M''_{g_3} = M'''_{g_3} = 0$ (pos. 1 tab. 4)

Le mécanisme fondamental :

$f = 3 \quad M_B = 1$

La formule (8) donne :

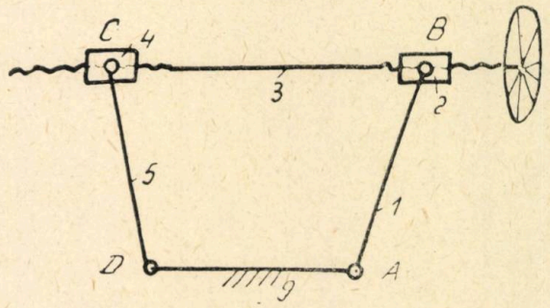
$M = M_3 + \Sigma M_g = 1 + 0 = 1$

La formule (14) donne :

$M = M_0 + \Sigma f = -7 + 2 + 3 + 3 = 1$

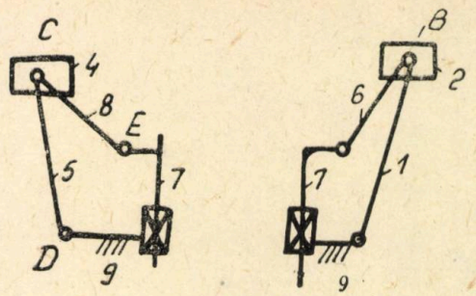
Les formules (13) et (14) :

Le premier mécanisme :



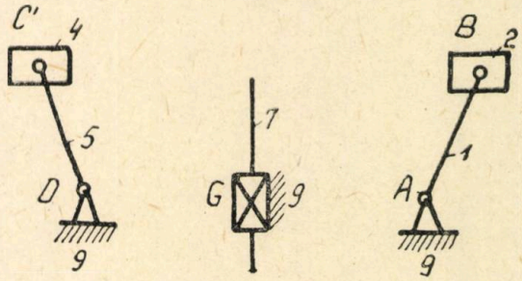
$f' = 2 \quad M'_2 = 4n - 2C_5 = 4.5 - 3.6 = 2$

Le second et le troisième mécanisme :



$f'' = f''' = 3 \quad M''_3 = M'''_3 = 2$

Le mécanisme des liaisons :



$M'_3 = 2 + 1 + 2 = 5$

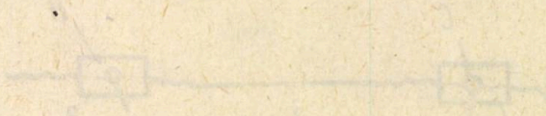
La formule (13) donne :

$M = M^l - M^l = 6 - 5 = 1$

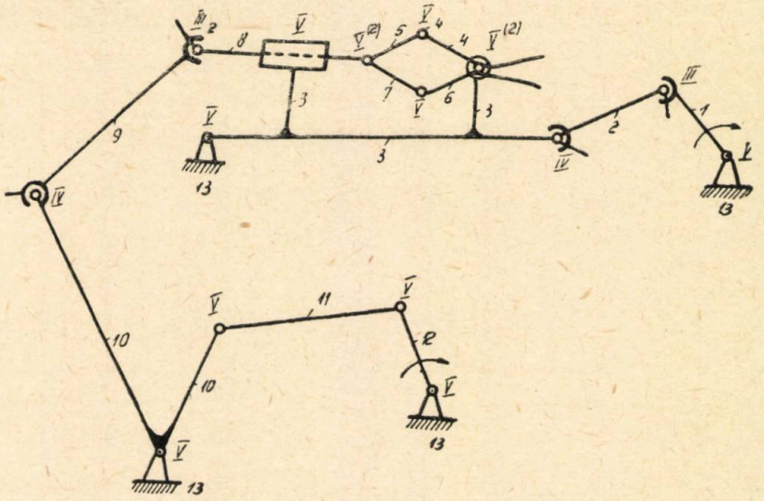
La formule (14) donne :

$M = M_0 + \Sigma f = -7 + 2 + 3 + 3 = 1$

Fig. 3



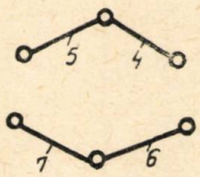
Détermination du degré de mobilité du mécanisme



par·

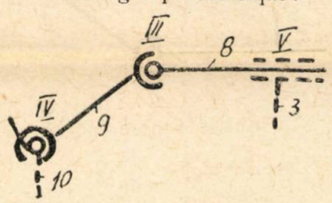
Les formules (8) et (14) :

Les premiers (deux) groupes assuriques :



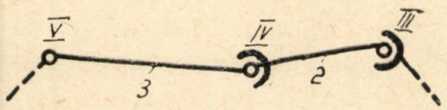
$f' = 3 \quad M'_{g_3} = 0$ (pos. 1 tab. 4)

Le second groupe assurique :



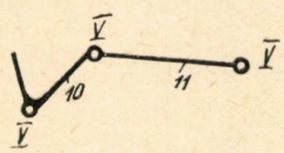
$f'' = 0 \quad M''_{g_0} = 0$ (pos. 7 tab. 1)

Le troisième groupe assurique :



$f''' = 0 \quad M'''_{g_0} = 0$ (pos. 7 tab. 1)

Le quatrième groupe assurique :



$f^{IV} = 3 \quad M^{IV}_{g_3} = 0$ (pos. 1 tab. 4)

Les deux mécanismes fondamentaux :

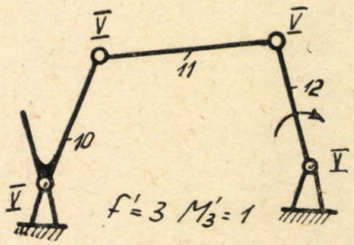
$M = 1 \quad \Sigma M_3 = 2$

La formule (8) donne : $M = \Sigma M_3 + \Sigma M_{gf'} = 2$

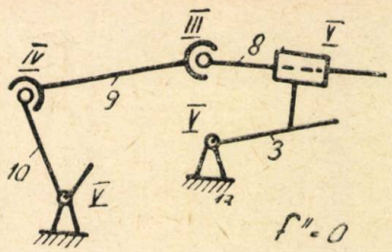
La formule (14) donne) : $M = M_0 + \Sigma f = -7 + (3+3+0+0+3) = 2$

Les formules (13) et (14) :

Le premier mécanisme :

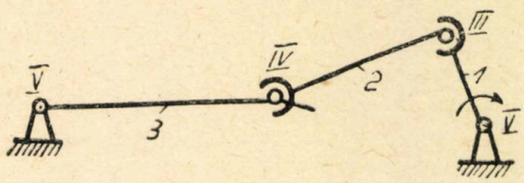


Le second mécanisme :



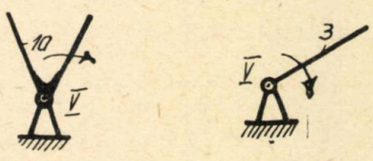
$f'' = 0 \quad M''_0 = 2$

Le troisième mécanisme :



$f''' = 0 \quad M'''_3 = 1$

Le mécanisme de liaison :



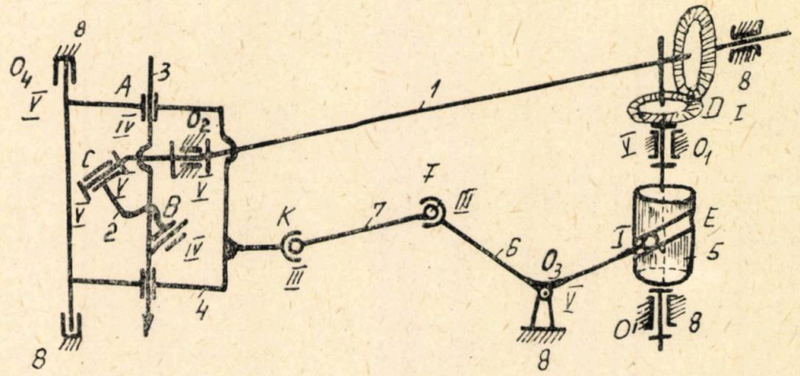
$M^l_3 = 2$

La formule (13) donne) : $M = M'_3 + M''_0 + M'''_3 - M^l_3 = 2$

La formule (14) donne : $M = M_0 + \Sigma f = -1 + 3 = 2$

Fig. 4

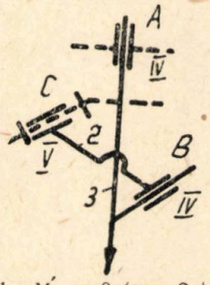
Détermination du degré de mobilité du mécanisme



par :

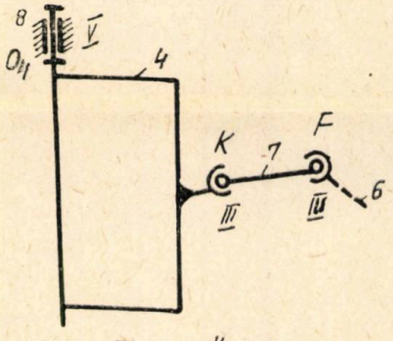
Les formules (8) et (14) :

Le premier groupe assurique :



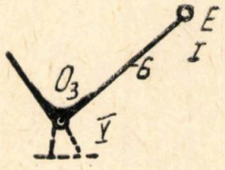
$f' = 1 \quad M'_{g_1} = 0$ (pos. 2 tab. 2)

Le second groupe nonassurique :



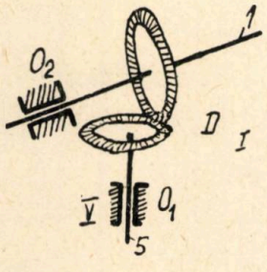
$f''' = 0 \quad M''_{g_0} = 1$

Le troisième groupe assurique :



$f''' = 0 \quad M'''_{g^0} = 0$ (pos. 5 tab. 1)

Le mécanisme fondamental :



$f = 0 \quad M_a = 6.2 - 5.2 - 1 = 1$

La formule (8) donne :

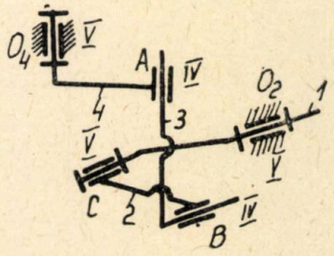
$M = M_f + \Sigma M_{gf'} = 1+1 = 2 f \geqslant f$

La formule (14) donn :

$M = M_0 + \Sigma f = 1+1+0+0+0 = 2$

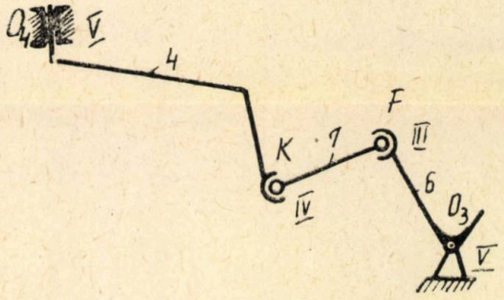
Les formules (13) et (14) :

Le premier mécanisme :



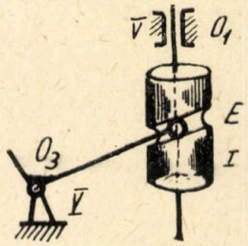
$f' = 1 \quad M'_1 = 2$

Le second mécanisme :



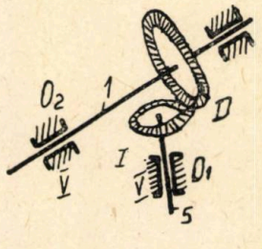
$f'' = 0 \quad M''_0 = 2$

Le troisième mécanisme :



$f''' = 0 \quad M'''_0 = 1$

Le quatrième mécanisme :



Les 4 mécanismes de liaison : sont placés en : O_1 ; O_2 ; O_3 ; et O pour chacun $M_1^l = 1$; $\Sigma M^L = 4$

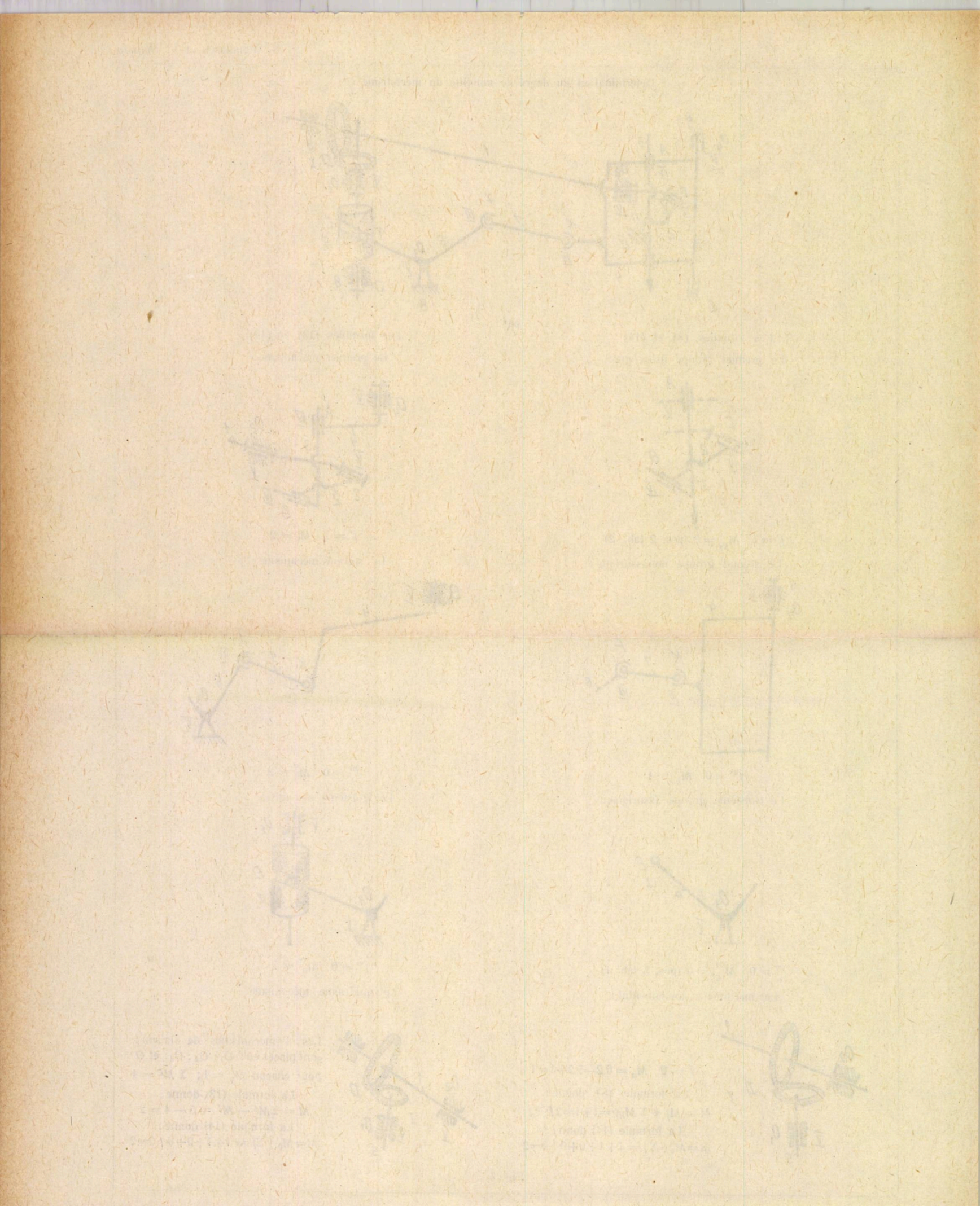
La formule (13) donne :

$M = \Sigma M^l - M^L = 6 - 4 = 2$

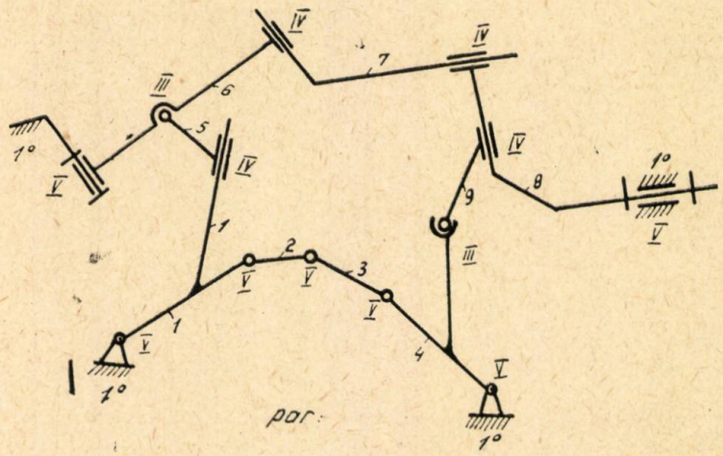
La formule (14) donne :

$M = M_0 + \Sigma f = 1+1+0+0+0 = 2$

Fig. 5



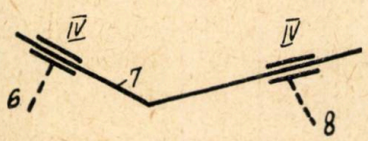
Détermination du degré de mobilité du mécanisme



par :

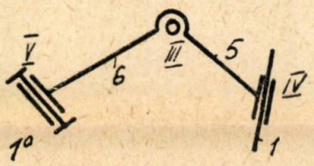
Les formules (8) et (14) :

Le premier groupe nonassurique :



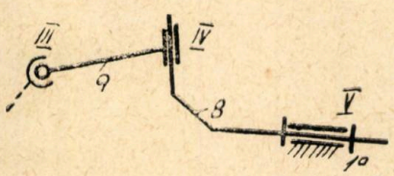
$f' = 1 \quad M_1' = -1$

Le second groupe assurique :



$f'' = 0 \quad M'_{g_0} = 0$ (pos. 7 tab. 1)

Le troisième groupe assurique :

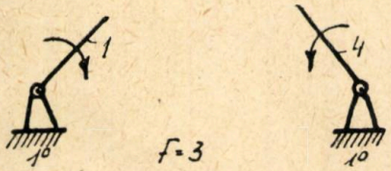


$f''' = 0 \quad M''_{g_0} = 0$ (pos. 7 tab. 1)

Le quatrième groupe assurique :

$^{IV}f^{IV} = 3 \quad M^{IV}_{g_0} = 0$ (pos. 1 tab. 4)

Les deux mécanismes fondamentaux :



$f = 3$

$f = 3 \quad \Sigma M_3 = 2$

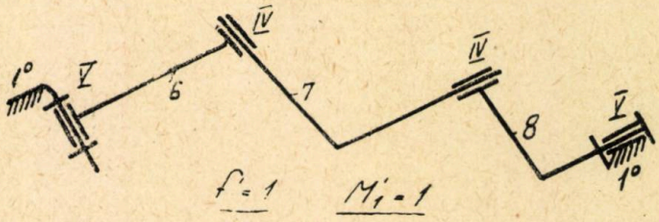
La formule (8) donne :

$M = \Sigma M_3 + M''_{g_0} + M'''_{g_0} + M^{IV}_{g_0} + M_1' = 2 + 0 + 0 + 0 - 1 = 1$

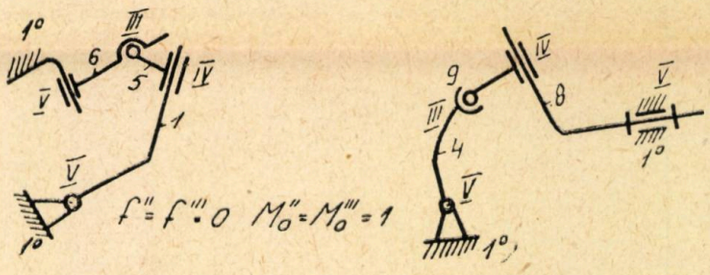
La formule (14) donne : $M = M_0 + \Sigma f = -3 + 4 = 1$

Les formules (13) et (14) :

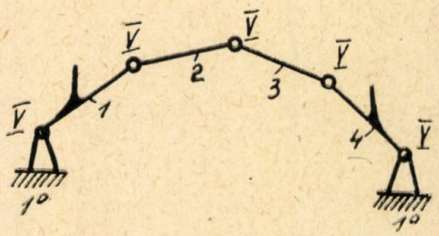
Le premier mécanisme



Le second et le troisième mécanisme.

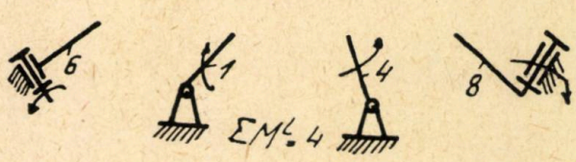


Le quatrième mécanisme :



$f^{IV} = 3 \quad M_3^{IV} = 2$

Les quatres mécanismes de liaison :



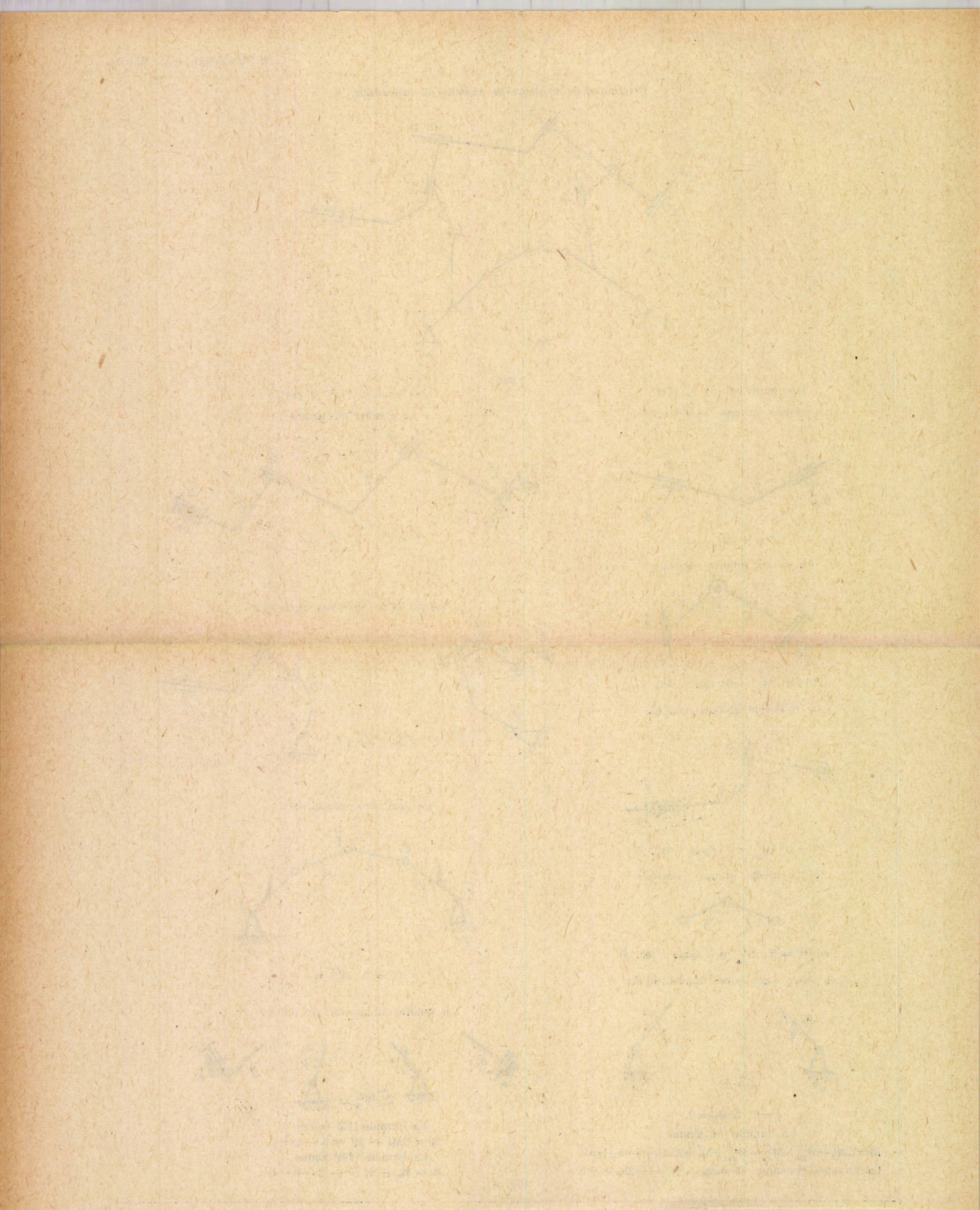
La formule (13) donne :

$M = \Sigma M^i - M^l = 5 - 4 = 1$

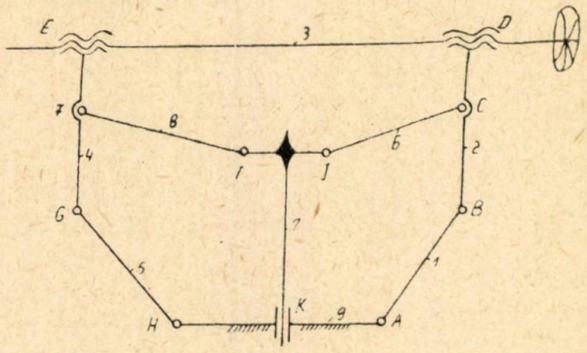
La formule (14) donne :

$M = M_0 + \Sigma f = -3 + 4 = 1$

Fig. 6

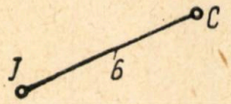


Détermination du degré de mobilité du mécanisme



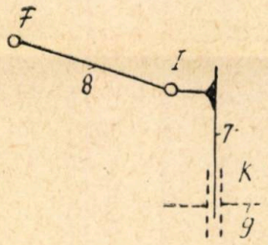
Les formules (8) et (14) :

Le premier groupe nonassurique simple



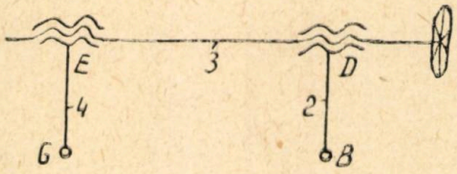
$f'_g = 3$
$M'_{g_3} = -1$

Le second groupe assurique simple :



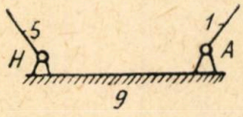
$f'' = 3$
$M''_3 = 2$

Le troisième groupe assurique simple :



$f'''_g = 2$
$M'''_{g_3} = 0$

Les mécanismes fondamentaux :

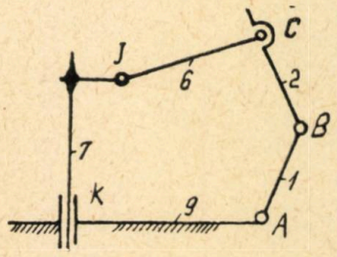


$f = 3$
$M_3 = 2$

La formule (8) donne :
$M = M_3 + \Sigma M_{gf'} = 2 + (-1+0+0) = 1$
La formule (14) donne :
$M = M_0 + \Sigma f_j = -7 + (3+3+2) = 1$

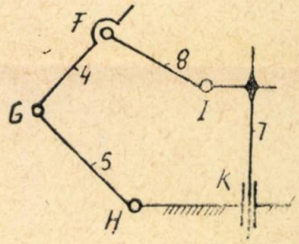
Les formules (13) et (14) :

Le premier mécanisme de décomposition :



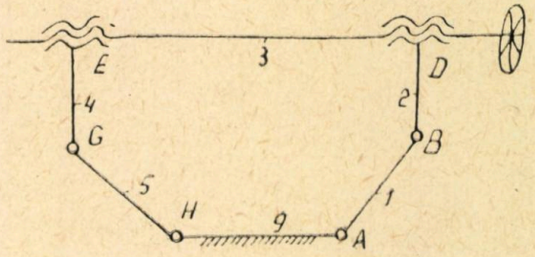
$f'_3 = 3$
$M'_3 = 2$

Le deuxième mécanisme de décomposition :



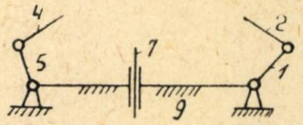
$f''_{g_3} = 3$
$M''_{g_3} = 0$

Le troisième mécanisme de décomposition :



$f''' = 2$
$M''_2 = 2$

Le mécanisme de liaison :



$f = 3$
$M^l = 5$

La formule (13) donne :
$M = \Sigma M^l - M^l = (2+2+2) - 5 = 1$
La formule (14) donne :
$M = M_0 + \Sigma f_j = -7 + (3+3+2) = 1$

Fig. 7

On analyse les difficultés qui apparaissent dans le cas des mécanismes spatiaux où il n'est pas toujours possible de détérminer le nombre des degrés de mobilité d'un mécanisme par l'application directe d'une des formules connues.

Ce travail est le résultat des recherches faites dans deux voies différentes, pendant les dernières années :

a. — Le premier auteur développe la méthode utilisée par Assur pour les mécanismes planse en déterminant pour les mécanismes spatiaux les chaînes cinématiques ouvertes de mobilité additionnelle donnée ou nulle nommés groupes. Ces résultats sont inscrits dans des tableaux, pour chaque famille de mécanismes. La mobilité d'un mécanisme donné s'obtient en ajoutant à la mobilité du mécanisme de base, les mobilité des groupes non Assuriques respectives, ou est égale à la mobilité du mécanisme de base losque tous les groupes sont assuriques (à mobilité nulle).

b. — Le second auteur considère le mécanisme à étudi obtenu par la réunion de plusieurs mécasimes connus, ayant un élement commun. La mobilité du mécanisme résultant s'obtient en retranchant de la somme des mobilités des mécanismes composants la mobilité du mécanisme de liaison, formé par les éléments et couples cinématiques communs aux mécanismes liés.

Lonsque tous les mécanismes composants sont à chaînes cinématiques simples, la mobilité s'obtient en ajoutant à la valeur M_0 obtenue en appliquant la formule Somoff-Malytcheff la somme des nombres qui indiquent les familles des mécanismes composants

$$M = M_o + \sum f_j$$

Cette formule est valable aussi dans le cas de la première méthode, $\sum f_j$ étant alors la somme des familles de tous les groupes assuriques ou non riquesà chaînes cinématiques simples. On présente des exemples de diffe-differents mécanismes dont le degré de mobilité est determiné par les deux méthodes en mettant en évidence la liaison structurelle existent entre les mécanismes composants utilisés dans la seconde méthode et les groupes, assuriques ou non, utilisés dans la première.

ÜBER DIE FESTSETZUNG DES BEWEGLICHKEITSGRADES DER MECHANISMEN

(Zusammenfassung)

Es werden am Anfang die klassischen Methoden von Tschebischew, Grübler, H. Alt, Somov-Malischew, Assur und Dobrowolski vorgeführt, sowie auch vor Forschern unseres Landes : Bogdan, Bugaevski, Pelecudi, Radu Voinea und M. Atanasiu.

Es werden die Schwierigkeiten geprüft welche im Falle der räumlichen Mechanismen auftreten, wo es nicht immer möglich ist den Beweglichkeitsgrad durch direkte Anwendung einer durch die Forscher anderer Länder festgesetzten Formeln, festzustellen.

Die Arbeit stellt eine Synthese der Forschungen dar, die von den Autoren im Laufe von acht Jahren gemacht wurden.

a) Die erste Methode entwickelt die von Assur für ebene Mechanismen verwendete Methode, indem für den Fall der räumlichen Mechanismen, die kinematischen Ketten der gegebensen zusätzlichen oder Null-Beweglichkeit festgestellt werden, Gruppen genannt.

Diese Ergebnisse sind in den Tabellen für jede Mechanismenfamilie angegeben. Die Beweglichkeit eines gegebenen Mechanismus wird erhalten, indem der Beweglichkeit des Grundmechanismus die Beweglichkeiten der nichtassurischen Gruppen zuaddiert werden oder ist sie gleichwertig mit der Beweglichkeit desselben, im Falle wo alle Gruppen assurisch sind (Beweglichkeit Null).

b) Eine zweite Methode betrachten den gegebenen Mechanismus als durch Verbindung mehrerer Mechanismen entstanden.

Die Beweglichkeit des resultierenden Mechanismus wird erhalten, indem von der Summe der Beweglichkeiten der komponenten Mechanismen, die Bewegung des Verbindungsmechanismus welcher aus den, den komponenten Mechanismen gemeinsemen, untereinander verbundenen Teilen zusammengesetzt ist, abgezogen wird.

Im Falle wenn alle komponenten Mechanismen aus einfachen kinematischen Ketten bestehen, wird die Beweglichkeit durch addierung zur der nach der Formel Somow-Malischew berechneten Beweglichkeit, der Summe der Familien der komponenten Mechanismen, erhalten.

$$M = M_o + \Sigma f_j$$

Fiese Formel ist auch im Falle der ersten Methode gültig, wo Σf_j die Summe der Familen der assurischen oder nichtassurischen Gruppen, die aus einfeachen kinematischen Ketten bestehen, darstellt.

Es werden Beispiele von verschiedenen Mechanismen gegeben, deren Beweglichkeitsgrad durch beide Methoden festgesetzt ist, indem die strukturelle Verbindung welche zwischen den komponenten Mechanismen und den assurischen oder nichtassurischen Gruppen besteht, unterstrichen wird.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 5

TEHNOLOGIA CHIMICĂ

POSIBILITĂŢI DE UTILIZARE A SMOALELOR OBŢINUTE DIN PRELUCRAREA GUDROANELOR DE COCSIFICARE ŞI SEMICARBONIZARE, ÎN BRICHEAREA CĂRBUNILOR *)

I. BLUM şi FR. BARCA

Datorită interesului pe care îl prezintă astăzi brichetarea cărbunilor cu diverse tipuri de smoale este cazul a prezenta pe scurt, cîteva aspecte din literatură în legătură cu influenţa liantului asupra calităţii brichetelor.

De la început trebuie să constatăm că cu toate preocupările susţinute ale cercetătorilor din diverse ţări în vederea caracterizării susceptibilităţii pentru utilizare, în industria de brichetare, a smoalelor, nu s-a ajuns pînă astăzi la un indice uşor determinabil şi caracteristic pentru această însuşire.

Kegel (1) arată că pentru a cunoaşte însuşirile unei smoale pentru brichetare şi posibilităţile ei de legare sînt necesare următoarele determinări: temperatura de înmuiere, vîscozitatea, posibilitatea de măcinare, ductibilitatea, substanţele extractibile din smoală, precum şi rezistenţa mecanică şi comportarea la depozitare şi la ardere a brichetelor obţinute.

Broche, Nedelmann, Spilker, Born, Simek, Clark [1] caută să stabilească corelaţii între capacitatea de legare a smoalelor şi fracţiunile ce se pot extrage cu diferiţi solvenţi şi anume:

Fracţiunea α insolubilă în benzen şi benzină.
Fracţiunea β solubilă în benzen şi insolubilă în benzină.
Fracţiunea γ solubilă în benzen şi benzină.

Ei arată că deşi brichetarea cu fiecare fracţiune în parte se soldează cu brichete slabe, totuşi fiecare dintre ele şi în special fracţiunile $\beta + \alpha$ au un rol important în procesul de legare. Ei prezintă totodată proporţiile relative dintre aceste fracţiuni existente în smoalele bune pentru brichetare.

Reering şi Gőeche (2) arată că deoarece procesul de brichetare este influenţat de temperatura de lucru este mai just ca diferitele proprietăţi ale smoalei să fie determinate la temperatura de lucru. Astfel ei arată importanţa vîscozităţii smoalei la temperatura de lucru şi scot

*) Lucrare comunicată din sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul Politehnic Bucureşti 7—8 aprilie 1962.

în evidență susceptibilitatea deosebită pentru brichetare a smoalelor cu vîscozitate 0,2 g/cm² și chiar mai mică.

Cercetările efectuate în Franța (3) propun o nouă metodă de apreciere a puterii de legare a smoalelor prin determinarea cantității procentuale de cărbuni pe care o reține o cantitate determinată de smoală topită.

În țara noastră bitumurile petroliere au fost și sînt încă disponibile în cantități mai mari decît smoalele din gudron de cărbune; de aceea, primele au căpătat o folosire mai largă în industria de brichetare. Diferiți cercetători (4) scot în evidență superioritatea bitumurilor petroliere pentru brichetare, în raport cu smoalele de cocserie.

Necesitatea utilizării smoalelor obținute din distilarea gudroanelor de cocsificare și semicarbonizare pentru brichetarea cărbunilor, necesitate actuală a industriei noastre, a dus la reluarea cercetărilor în fază de laborator, pentru lămurirea parametrilor ce condiționează brichetarea cu acești lianți.

Noile procedee de obținere a cocsului din cărbuni neaglutinați (4,5) în curs de experimentare și aplicare în țara noastră impun deasemeni cunoașterea profundă a condițiilor de brichetare cu aceste smoale.

Datorită faptului că în standardele romînești, punctul de înmuiere constitue una din caracteristicile principale pentru clasificarea și livrarea smoalelor, s-a considerat indicat a se studia în această lucrare influența lui asupra calității brichetelor obținute și posibilitățile obținerii unor brichete de bună calitate cu smoalele de cocserie și semicarbonizare cu diverse puncte de înmuiere, probleme în care literatura ne poate orienta destul de puțin.

Calitatea brichetelor obținute caracterizată prin determinarea rezistenței la rupere prin încovoiere s-a considerat principalul indice pentru caracterizarea susceptibilității liantului folosit, pentru brichetare.

Materia primă cărbunoasă folosită în încercările de laborator a fost cărbunele PALV de granulație 0—10 mm, spălat normal.

Cărbunele de PALV **) a fost ales pentru studiu, deoarece în prezent la Petrila se întîmpină greutăți în ceea ce privește obținerea unor brichete de calitate constantă cu aceste smoale, iar în viitor, la fabricarea cocsului brichete prin noua tehnologie de cocsificare, materia primă cărbunoasă ce urmează a fi luată în considerare va fi deasemeni, în primul rînd, cărbunele din estul Văii Jiului, deci din minele: Lonea, Petrila, Aninoasa, Vulcan.

Caracteristicile chimico-tehnice ale cărbunelui utilizat sînt prezentate în tabela nr. 1.

Din proba medie de 200 kg cărbuni primită de la I.P.C. — Petrila, cu aceste caracteristici chimico-tehnice, s-au alcătuit sfertuire, probele folosite în încercările pentru obținerea brichetelor. Cărbunele a fost măcinat integral la 0—5 mm într-o moară cu discuri, obținîndu-se rețeta gra-

**) PALV spălat, amestec de cărbuni de Petrila, Aninoasa, Lonea și cărbuni necocsificabili de la Vulcan, așa cum îi livrează I.P.C.-Petrila.

Tabela 1

Caracteristicile chimico-tehnice ale cărbunilor de PALV spălați, utilizați

Cărbunele	Analiza tehnică				
	Raportat la proba de laborator			Raportat la proba uscată	Raportat la masa comb.
	Umiditate	Cenușă	Materii volatile	Cenușă	Materii volatile
	W^a	A^a	V^a	A^{anh}	V^{mc}
	%	%	%	%	%
PALV spălat**)	4,6	17,6	35,5	18,4	45,2

nulometrică din diagrama 1, ce se încadrează în rețetele favorabile prezentate de literatură (1).

Drept liant au fost folosite: smoale rezultate din distilarea gudroanelor de la cocsificarea și semicarbonizarea cărbunilor și bitum petrolier neparafinos, ca etalon.

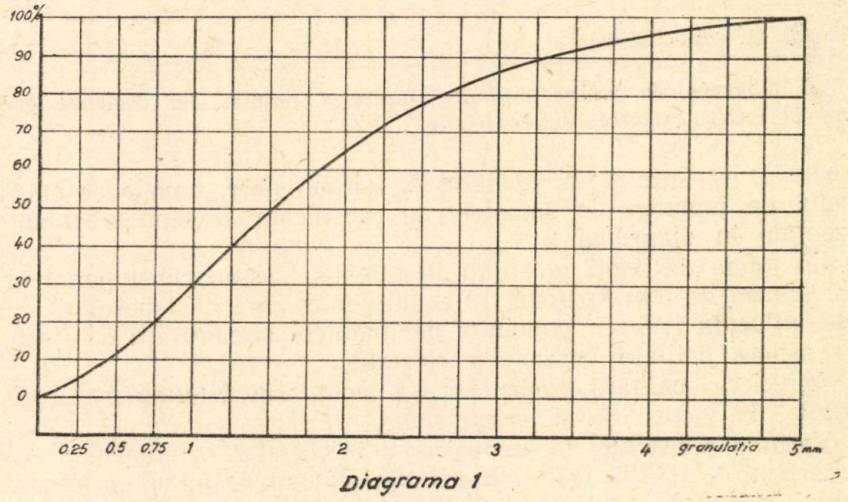


Diagrama 1

Curba granulometrică integrală a cărbunilor

Smoalele de semicarbonizare și de cocsificare cu puncte de înmuiere inițial ridicate, au fost fluxate cu cantități crescînde de ulei greu, respectiv ulei de antracen, provenit din distilarea gudroanelor de semicarbonizare și respectiv de cocsificare, obținîndu-se gama de smoale cu punctele de înmuiere prezentate în tabela nr. 2.

Tabela 2

Caracteristicile lianţilor utilizaţi

LIANTUL	Punct de înmuiere °C	Carbon liber %
Bitum petrolier parafinos tip D	89	0,80
Smoală de cocserie	39	6,62
Smoală de cocserie	50	7,56
Smoală de cocserie	61	8,55
Smoală de cocserie	73,5	19,70
Smoală de cocserie	82	11,70
Smoală de cocserie	94	13,10
Smoală de semicarbonizare ***)	42	5,47
Smoală de semicarbonizare	37	5,95
Smoală de semicarbonizare	68	6,28
Smoală de semicarbonizare	76	7,79

***) Smoală de semicarbonizare utilizată a rezultat din distilarea gudronului obţinut în vechile cuptoare Ab-Der-Halden

Curbele de variaţie ale procentului de carbon liber, funcţie de punctul de punctul de înmuiere la smoalele de cocsificare şi semicarbonizare sînt prezentate în diagrama 2

Cu gama de lianţi prezntaţi în tab. nr. 2 s-au confecţionat brichete la presiunea de 300 Kgf/cm², în condiţii obişnuite de laborator, urmărindu-se influenţa naturei, punctului de înmuiere şi cantităţii de liant adăugate asupra calităţii brichetelor obişnuite.

Aprecierea calităţii brichetelor s-a făcut prin determinarea rezistenţei mecanice la încovoiere şi compresiune.

Variaţia rezistenţei la încovoiere a brichetelor cu smoală de cocserie din cărbuni de PAVL spălaţi funcţie de punctul de înmuiere şi cantitatea liantului adăugat, în raport cu aceea obţinută cu bitum industrial neparafinos tip D, este redată în diagrama 3 ; variaţia acelorași parametrii pentru brichetele obţinute cu smoală de semicarbonizare, în diagrama 4

Variaţia rezistenţei la compresiune a brichetelor din cărbuni de PAVL spălaţi, cu smoală de cocserie, funcţie de punctul de înmuiere şi cantitatea liantului adăogat, în raport cu cea a brichetelor obţinute cu bitum industrial neparafinos tip *D* este arătată în diagrama 5, iar în diagrama 6

variația aceloraşi parametrii pentru brichetele obținute cu smoală de semicarbonizare.

Pentru a aprecia acțiunea agenților atmosferici și a posibilităților de transport și depozitare a acestor materiale s-a determinat deasemeni și

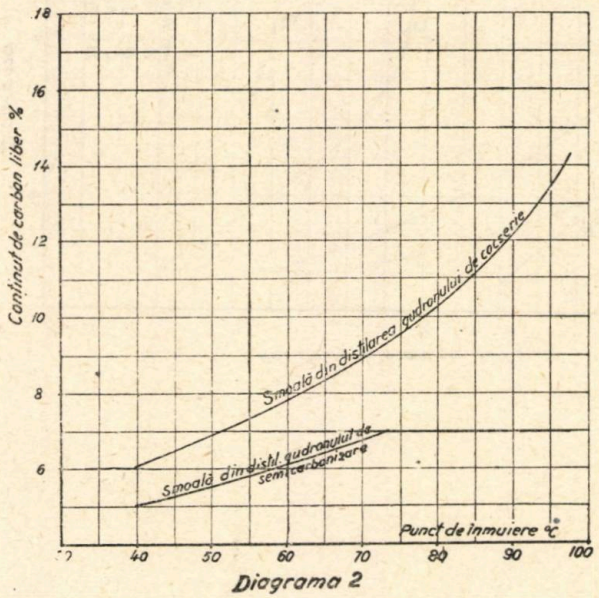


Diagrama 2

Variația conținutului de carbon liber funcție de punctul de înmuiere, în cazul smoalelor rezultate din distilarea gudroanelor de cocsificare și semicarbonizare

rezistența la încovoiere în condiții limită de solicitare la îmbibație, adică menținerea sub apă timp de 24 ore.

Variația rezistenței la încovoiere, determinate în aceste condiții, deci după îmbibație cu apă, în raport cu cantitatea și punctul de înmuiere a liantului, adăogat, este prezentată în diagrama 7 pentru brichetele cu smoală de cocserie și în diagrama 8 pentru brichetele cu smoală de semicarbonizare.

În toate cazurile curba obținută în aceleași condiții cu bitum petrolier neparafinos tip *D* a fost considerată etalon.

Din cercetarea figurilor rezultă următoarele:

— Rezistența mecanică a brichetelor din cărbunii de PAVL spălat, încovoierea și compresiunea, crește cu creșterea cantității de liant adăugate, atît în cazul folosirii smoalei de cocserie cît și în cazul folosirii smoalei de semicarboinzare. Dacă în cazul folosirii bitumului industrial neparafinos tip *D* se observă un maxim la cca. 10% liant, în cazul folosirii smoalelor de cocserie și semicarbonizare se vede că curbele tind către un maxim

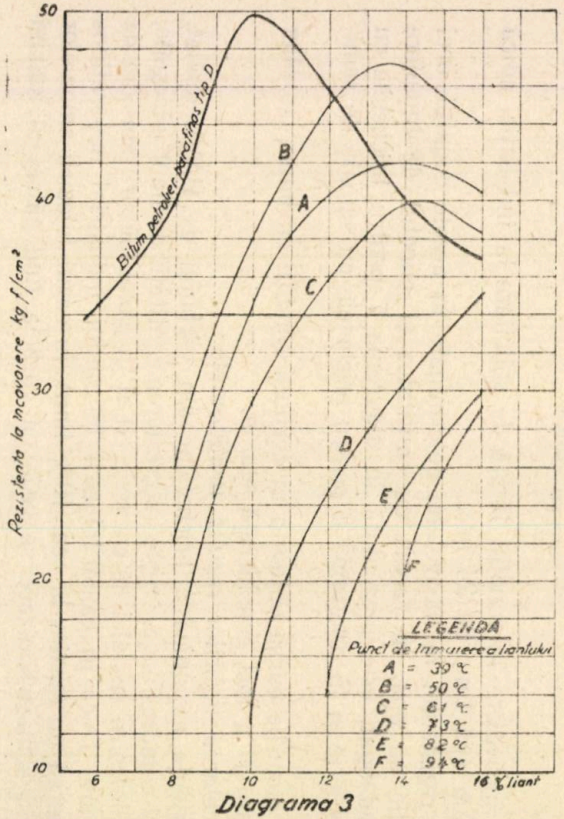


Diagrama 3

Variația rezistenței la încovoiere, funcție de cantitatea de liant și punctul de înmuiere a liantului, la brichetele obținute din cărbuni de PALV cu smoală de cocs (s-a trasat pentru comparație curba variației rezistenței la încovoiere pentru brichete cu bitum parafinos tip D ca liant)

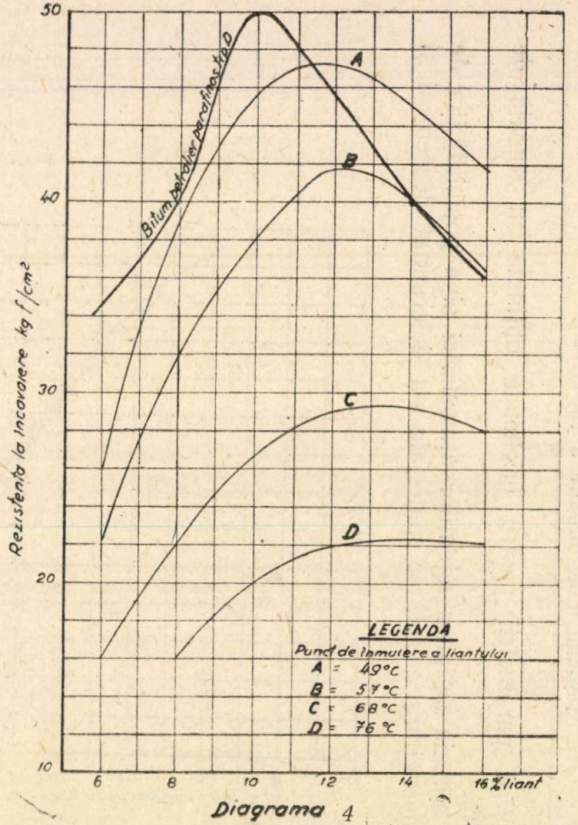


Diagrama 4

Variația rezistenței la încovoiere, funcție de cantitatea de liant și punctul de înmuiere al liantului, a brichetelor obținute din cărbuni de PALV cu smoală de semicarbonizare (s-a trasat pentru comparație și curba variației rezistenței la încovoiere pentru brichete cu bitum petrolier parafinos tip D ca liant

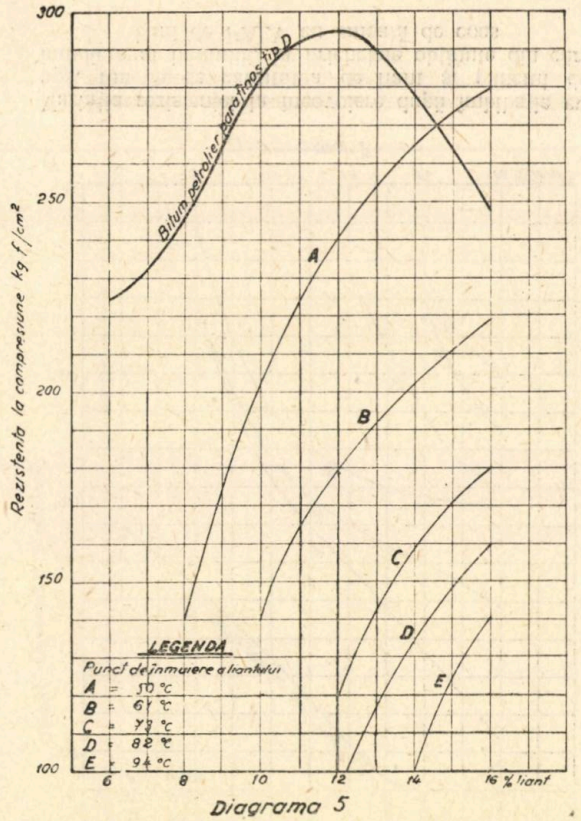


Diagrama 5

Variația rezistenței la compresiune, funcție de cantitatea de liant și punctul de înmuiere a liantului, la brichetele obținute din cărbuni de PALV cu smoală cocs. (S-a trasat pentru comparație și curba de variație a rezistenței la compresiune pentru brichete cu bitum petrolier parafinos tip D ca liant)

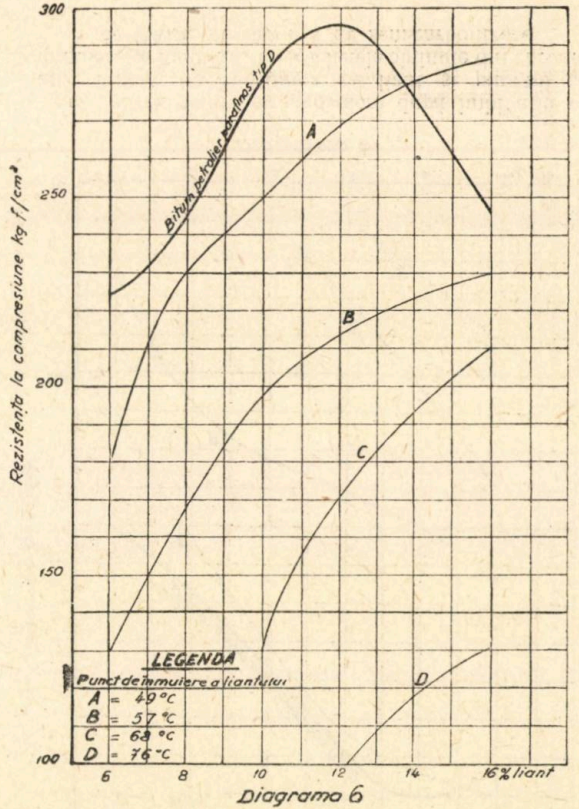


Diagrama 6

Variația rezistenței la compresiune, funcție de cantitatea de liant și punctul de înmuiere al lichidului, la brichetele obținute din cărbuni de PALV cu smoală de semicarbonizare. (S-a trasat pentru comparație și curba variației rezistenței la compresiune pentru brichete cu bitum petrolier parafinos tip D cu liant)

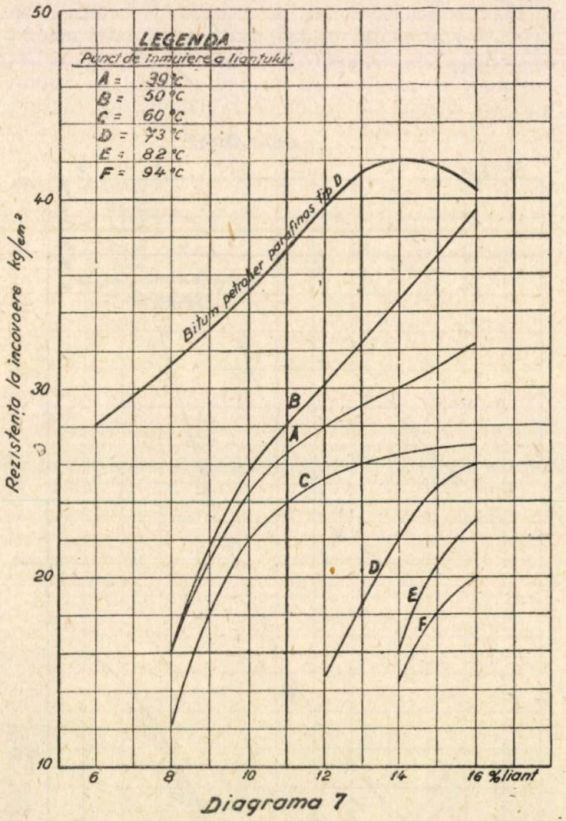


Diagrama 7

Variația rezistenței la încovoiere după îmbibația cu apă, funcție de cantitatea de liant și punctul de înmuiere al liantului, la brichetele obținute din cărbuni de PALV cu smoală de cocs

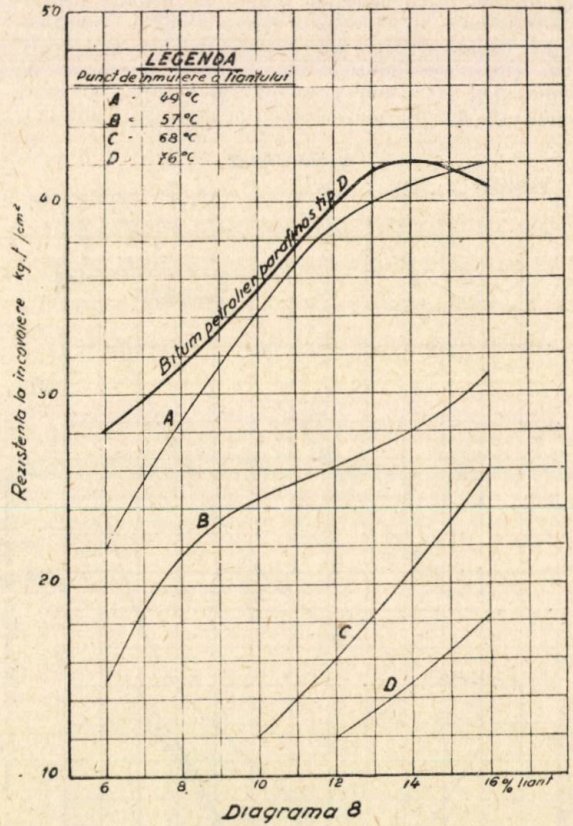


Diagrama 8

Variația rezistenței la încovoiere după îmbibația cu apă, funcție de cantitatea de liant și punctul de înmuiere a liantului, la brichetele obținute din cărbuni de PALV cu smoală de semicarbonizare

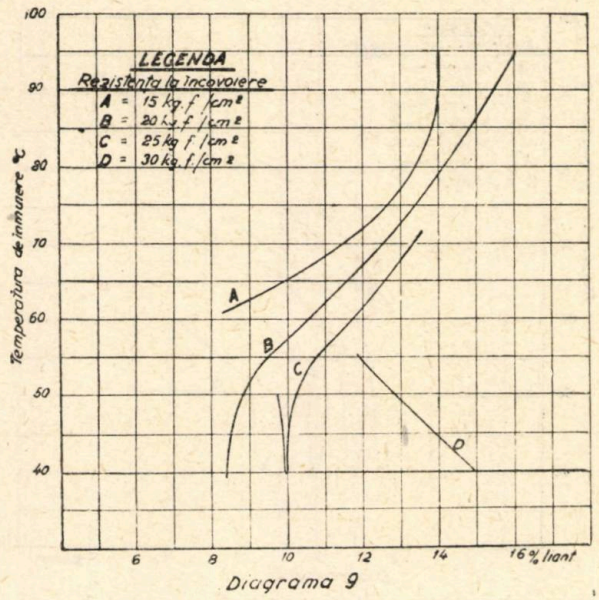


Diagrama 9

Corelația dintre cantitatea de liant, punctul de înmuiere al liantului și rezistența la încovoiere a brichetelor după îmbibația cu apă, în cazul folosirii smoalei de cocserie în brichetarea cărbunilor de PALV

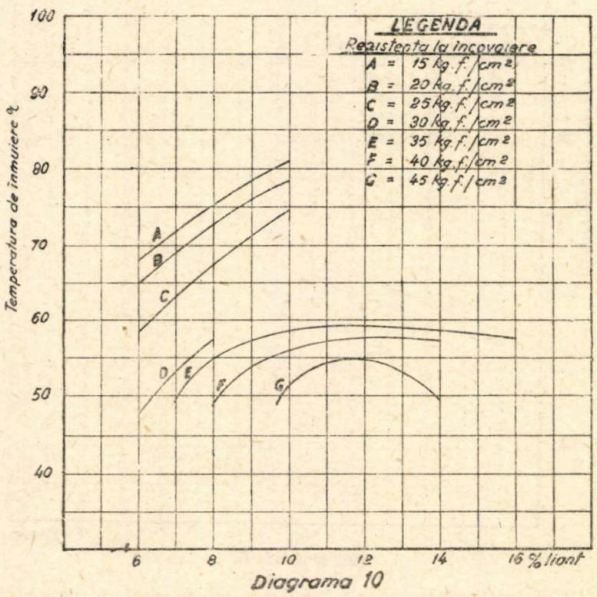


Diagrama 10

Corelația dintre cantitatea de liant, punctul de înmuiere al liantului și rezistența la încovoiere, în cazul folosirii smoalei de semicarbonizare în brichetarea cărbunilor de PALV

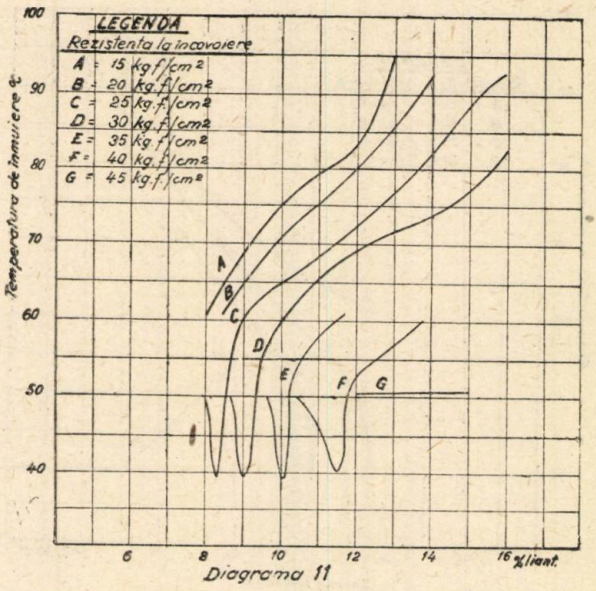


Diagrama 11

Corelația dintre cantitatea de liant, punctul de înmuiere al liantului și rezistența la încovoiere a brichetelor, în cazul folosirii smoalei de cocserie în brichetarea cărbunilor de PALV

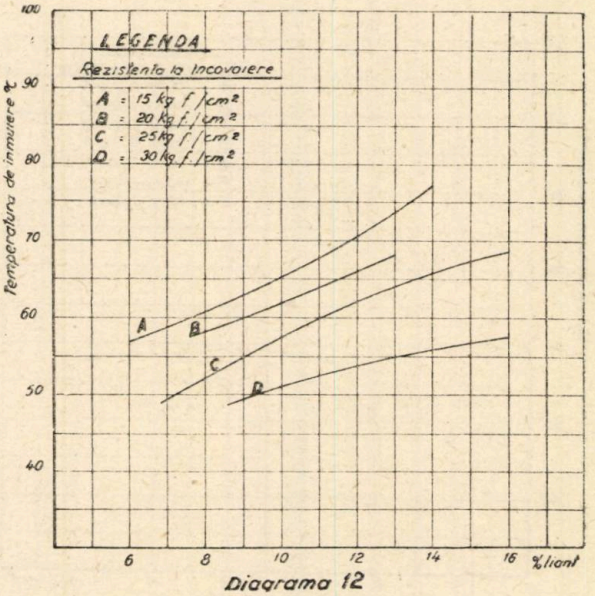


Diagrama 12

Corelația dintre cantitatea de liant, punctul de înmuiere al liantului și rezistența la încovoiere a brichetelor după îmbibația cu apă, în cazul folosirii smoalei de semicarbonizare în brichetarea cărbunilor de PALV

situat la procente mult mai mari de liant (chiar peste 16% liant la smoalele cu punct de înmuiere ridicat).

— Rezistențe mecanice mari, la încovoiere și compresiune se obțin mai ușor cu smoale de cocserie și semicarbonizare cu punct de înmuiere 50—60°C, chiar folosind cantități mai mici de liant 12—14%. Smoalele cu punct de înmuiere ridicat dau rezistențe mecanice slabe chiar la 16% liant.

— Rezistența mecanică a brichetelor obișnuite din cărbunii de PALV spălați cu smoale de cocserie și semicarbonizare, deși mai scăzută pentru aceleași procente de liant, decît a celor obținute cu bitum petrolier parafinos este totuși, în cazul folosirii smoalelor cu puncte de înmuiere favorabile, mult peste minim de rezistență impus unui astfel de material.

— Degradarea brichetelor din cărbunii de PALV spălați, prin transport, ploi etc., este destul de mică în toate cazurile, fapt care rezultă din variațiile mici ale rezistențelor la încooviere ale brichetelor după îmbibația cu apă.

Pentru a scoate în evidență interdependența dintre punctul de înmuiere al smoalei și necesarul de liant pentru brichetare s-au transpus datele prezentate în diagramele 3—8 într-un sistem de coordonare: punct de înmuiere, procent de liant, stabilindu-se curbele de egală rezistență a brichetelor.

Diagrama — 9 prezintă aceste corelații în cazul folosirii smoalelor de semicarbonizare în brichetarea cărbunilor de PALV.

Curbele de egală rezistență la încovoiere, după îmbibația cu apă a brichetelor cu smoală de cocserie sînt prezentate în diagrama 11, și respectiv în diagrama 12 a celor cu smoală de semicarbonizare.

Aceste figuri pun și mai bine în evidență superioritatea smoalelor cu punctele de înmuiere 50—60°C, atît în ceea ce privește rezistența mecanică a brichetelor cît și sub aspectul unui consum cît mai redus de liant.

CONCLUZII.

1. Smoalele de cocserie și semicarbonizare indicate pentru a fi utilizate în brichetarea cărbunilor au puncte de înmuiere relativ scăzute: 50—60°C.

2. La creșterea punctului de înmuiere al smoalei cu 10°C, pentru menținerea caracteristicilor mecanice ale brichetelor la valoarea inițială necesarul de liant pentru brichetare crește cu cca. 2—3%.

3. Cantitatea de smoală de cărbune necesară ca liant este ceva mai mare decît în cazul folosirii lianților petrolieri, însă se încadrează în limitele economice admisibile pentru consumul de lianți.

4. Rezistențele mecanice ale brichetelor astfel obținute sînt ceva mai mici în raport cu cele cu bitum petrolier. Ele se mențin totuși în limitele acceptabile pentru brichete de calitate, iar degradarea în timpul transportului și depozitării este destul de scăzută.

Pentru a scoate în evidenţă interdependenţa dintre temperatura de înmuiere a smoalei şi necesarul de liant pntru brichetare s-au transpus datele prezentate în diagrame într-un sistem de coordonate: punct de înmuiere — procent de liant, stabilindu-se curbele de egală rezistenţă a brichetelor.

5. Este posibilă deci şi indicată pentru industria de brichetare a cărbunilor, folosirea acestor smoale alături de bitumurile petroliere.

Catedra de tehnologie chimică organică şi combustibili

BIBLIOGRAFIE

1. *K. Kegel* — Brichetierung der Braunkohlen — Haale D.D.R. 1948.
2. *Reering W. u. Goecke F.* — Brikettpeche und ihre Bedeutung für den Brikettierungsvorgang „Glueckauf" 1935.
3. *Cerchar* — Rapport sur l'activite du Centre en 1953, annexe XX, en 1954, pag. 73.
4. *I. Blum, I. Nistor* — Cocs brichete din cărbuni neaglutinanţi sau slab aglutinanţi prin tratament termochimic — Studii şi Cercetări de Energetică.

   Notă I nr. — 2 (1960).
   Notă II nr. — 3 (1960).
   Notă III nr. — 2 (1961).
   Notă IV nr. — 4 (1961).
   Notă VI nr. — 1 (1962).

5. *I. Barbu şi colaboratorii* — Cocsul Metalurgic, pag. 168—222. Ed. Tehnică, 1958.
6. *I. Blum, Rosenberg M. şi Kell S.* — Brichetarea lignitului xiloid cu smoală — Proces tehnologic I.C.E.C.H.I.M., 1951.
7. *Blum I., Rosenberg M.* şi *Calotă M.* — Studiul variaţiei procentului de cenuşă din semicocs, la brichetarea semicocsului de lignit cu liant. Comunicare făcută în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic-Bucureşti, iunie 1957.

ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОКСОВЫХ И ПОЛУКОКСОВЫХ ПЕКОВ ДЛЯ БРИКЕТИРОВАНИЯ УГЛЕЙ

(Краткое содержание)

В настоящей работе представлено несколько аспектов использования коксовых и полукоксовых пеков в брикетной промышленности.

Работа представляет особое значение, как для использования этих пеков в углебрикетном производстве, так и для новых способов получения кокса из неспекающихся углей, в которых предварительно необходимо брикетирование с каменноугольной смолой.

Было выявлено влияние природы, количества и качества связующих веществ на характеристики брикетов, полученных из углей PALV, для которых поставлен вопрос брикетирования с этими связующими веществами.

В работе приводятся новые данные относительно выяснения условий работы для получения высококачественных брикетов используя в какестве связующих веществ коксовые и полукоксовые пеки, полученные в Р. Н. Р.

Полученные результаты показывают возможность, условия применения этих пеков в производстве брикетов.

THE POSSIBILITY OF USING BITUMEN RESULTING FROM THE DISTILLATION OF COKING AND SEMI-COKING TARS IN THE MANUFACTURE OF COAL BRIQUETTES

(Summary)

These notes deal with a few aspects resulting from using bitumens in the manufacturing of briquettes.

The work is of special importance both in connection with using these bitumens for briquette manufacturing and with the new processes of producing coke from non-agglutinating coal implying the use of bitumen as a binder in briquette-making.

The influence of the kind, the quantity and the quality of the binder on the characteristics of briquettes made of PALV coal, in respect to which the problem of using these binders has been raised, is made evident.

New contributions are brought regarding the determination of working conditions in view of obtaining briquettes of a good quality by using as binders the residual bitumens resulting from the distillation of cokting and semi-coking tars from Roumanian cokeries.

The results obtained show the possibility, the conditions and the efficiency of using these bitumens in the briquette industry.

POSSIBILITÉS D'EMPLOYER LES BITUMES SOLIDES RÉSULTANT DE LA DISTILLATION DES GOUDRONS DE COKE ET DE SEMI-COKE DANS LA FABRICATION DES BRIQUETTES

(Résumé)

Cette notice présente quelques aspects originés par la nécessité d'employer les bitumes solides résultant de la distillation des goudrons de charbon dans la fabrication des briquettes.

Le sujet est d'une importance particulière tant pour la mise en valeur des bitumes de charbon dans l'industrie des briquettes de charbon, que pour les procédés nouveaux de fabrication du coke de charbons non

agglutinants impliquant le briquettage à l'aide de bitume comme opération préalable.

L'article met en évidence l'influence de la nature, de la quantité et de la qualité de ces liants sur les caractéristiques des briquettes de PALV, charbons pour lesquels le problème se pose d'employer ces liants dans l'opération de produire les briquettes.

De nouvelles contributions sont apportées en ce qui concerne l'établissement des conditions de travail en vue d'obtenir des briquettes de qualité utilisant comme liants les bitumes résultant de la distillation des goudrons de cokerie et de semi-carbonisation obtenus dans les cokeries de la Roumanie.

Les résultats obtenus indiquent la possibilité, les conditions et l'efficacité d'utiliser ces bitumes dans l'industrie des briquettes.

MÖGLICHKEITEN FÜR DIE VERWENDUNG DES PECHES AUS DER VERARBEITUNG DER KOKEREI UND HALBKOKEREI-TEERE IN DER HERSTELLUNG VON BRIKETTEN

(Zusammenfassung)

Vorliegende Arbeit bringt einige Feststellungen, die sich aus der Notwendigkeit ergeben, das Pech aus der Verarbeitung des Mineralkohlenteers in der Presskohlenfabrikation zu verwenden.

Die Arbeit ist von grosser Wichtigkeit sowohl im Hinblick auf die Verwendung dieser Peche in der Brikettenindustrie als auch auf die neuen Verfahren für die Herstellung von Koks aus nicht bäckender Kohle, die bei der Fabrikation von Briketten die Verwendung von Kohlenpech in der Vorbehandlung nötig macht.

Es wird der Einfluss der Art der Menge und der Qualität der Bindemittel auf die Eigenschaften der Presskohle aus PALV-Kohlen hervorgehoben, für welche das Problem der Brikettherstellung mittels dieses Bindemittels aufgeworfen wurde.

Die Arbeit ist ein weiterer Beitrag zur Festlegung der Arbeitsbedingungen für die Produktion von Qualitäts briketten unter Verwendung des nach der Destillation des Koks-und Halbkoksteers aus den Kokereien unseres Landes verbleibenden Pech.

Die erzielten Ergebnisse zeigen die Möglichkeit, die Bedingungen und die Wirksamkeit der Verwendung dieser Peche in der Presskohlenindustrie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 5

TERMOTEHNICĂ

CU PRIVIRE LA ÎMPĂRȚIREA PE FAZE A PROCESULUI DE ARDERE ÎN MOTORUL CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

BERTHOLD GRÜNWALD

Împărțirea procesului de ardere pe faze este admisă de toți autorii. Criteriile care stau la baza diviziunii sînt diferite și uneori arbitrare. Astfel, unii autori [23]) aleg drept graniță între primele două faze volumul de amestec ars; alții [2] [29], drumul parcurs de flacără etc.

Criteriile alese de Ricardo și Socolic sînt mai raționale, întrucît ele se referă la mecanismele fizico-chimice care controlează desfășurarea procesului de ardere.

Fie o diagramă desfășurată, presiune-unghiu de rotație a arborelui cotit (fig. 1). Fie: s — momentul declanșării scînteii; f — momentul de apariție a nucleului de flacără, d — momentul desprinderii curbelor de variație a presiunii cu și fără ardere; t — momentul în care viteza de creștere a presiunii este maximă; y — momentul atingerii presiunii maxime; z — momentul de sfîrșit de ardere. Se alege drept origină pentru unghiul de rotație a arborelui cotit, momentul în care pistonul se află la punctul mort interior, la finele cursei de compresiune.

După Socolic procesul se împarte în trei faze:

Prima fază cuprinde perioada de formare a nucleului de flacără și dezvoltarea lui pînă la acele dimensiuni la care turbulența (macroturbioanele) poate acționa asupra propagării. Pe diagrama indicată se alege drept sfîrșit al primei faze momentul de desprindere a curbelor de presiune (α_d); pe fotoînregistrări de ansamblu se alege drept sfîrșit al primei faze momentul în care flacăra a cuprins 15% din volumul de amestec.

A doua fază cuprinde perioada în care flacăra a străbătut aproape întreaga cameră de ardere; ea se termină în punctul y, cînd se atinge presiunea maximă.

A treia fază cuprinde perioada în care frontul de aprindere se apropie de pereți cu viteze mici; în această fază arde combustibilul cuprins în pungile de amestec din spatele flăcării.

După Socolic, prima și ultima fază stau îndeosebi, sub influența factorilor fizico-chimici întrucît în aceste faze, propagarea se dezvoltă mai ales prin front laminar și este determinată de viteza normală de ardere. În faza doua, faza arderii vizibile sau faza principală, influența principală, hotărîtoare, asupra procesului o exercită turbulența.

Rezultă astfel că Socolic alege drept criteriu principal al procesului de ardere, mecanismul de propagare a flăcării.

În ceea ce privește faza a doua, părerile lui Socolic coincid cu cele ale lui Ricardo care consideră că această fază, „are o natură pur mecanică" iar durata ei depinde de „gradul și natura turbulenței" [17].

Este rațională împărțirea procesului de ardere pe faze? La această întrebare nu se poate răspunde decît afirmativ întrucît de prima fază

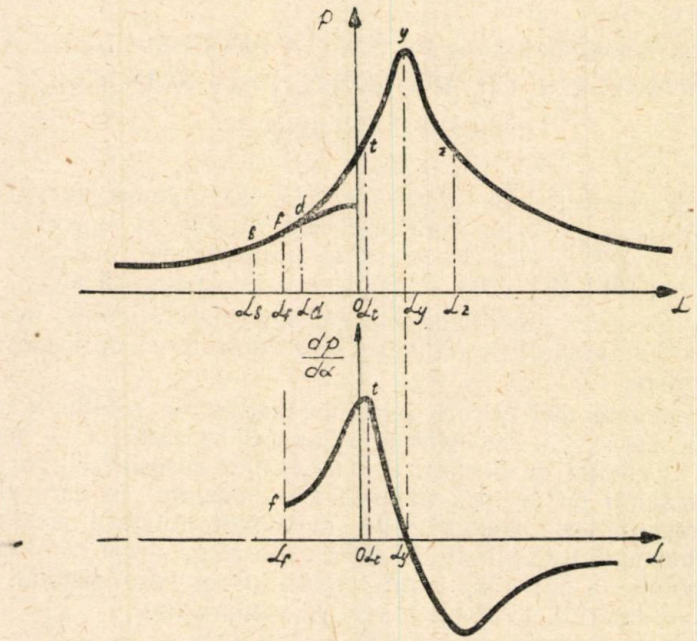


Fig. 1

— care cuprinde întotdeauna perioada de formare a nucleului — depinde posibilitatea apriderii amestecului și funcționării motorului; de faza doua depinde posibilitatea măririi turației și combaterii detonației; de faza treia — arderea tîrzie, în destindere — depinde în mare măsură eficacitatea economică a ciclului.

Cei mai mulți cercetători și-au concentrat atenția asupra fazei principale, întrucît de durata ei au depins progresele tehnice realizate de motorul cu aprindere prin scînteie (turații și rapoarte de compresiune ridicate); multe cercetări sînt consacrate și primei faze întrucît de formarea nucleului depinde stabilitatea procesului de ardere, posibilitatea arderii amestecurilor sărace etc. Ultima fază a procesului de ardere a fost însă aproape complet neglijată. Această împrejurare este determinată probabil de dificultățile care apar la determinarea sfîrșitului ei.

După cum remarcă Socolic „arderea ultimelor doze de încărcătură după p_{max} — formînd faza treia — este cel mai puțin studiată" și totuși

„durata acestei ultime faze de ardere capătă o importanță esențială pentru eficiența generală a procesului de lucru în motor" [25].

Una din problemele principale care stau în atenția acestui studiu o constituie tocmai ultima fază a arderii.

1. *Cu privire la granița dintre ultimele două faze ale procesului de ardere.*

După cum arătăm în lucrările [6] și [7], trebuie admis că punctul *y* coincide cu acel moment în care flacăra se stinge pe perete. Alegerea drept moment final al fazei principale de ardere acela în care se atinge presiunea maximă, capătă astfel, din punct de vedere fizic o bază rațională.

Semnificația fizică a graniței de separație dintre ultimele două faze ale procesului, subliniată mai sus, este intuită în unele lucrări. Spre meritul lui, Ricardo, fără a fi fost în posesia unor informații cuprinzătoare, afirma, în 1941, că în faza doua flacăra *„cuprinde întregul mediu de lucru"* [17]. Socolic menționează de asemenea în ultima sa lucrare [25] *„necesitatea încheierii procesului de ardere înainte de începerea destinderii vizibile a încărcăturii"*, adică în punctul de presiune maximă.

Aceste păreri nu sînt unanim acceptate. Astfel, Maslenicov [15] afirmă, în 1951 că „sfîrșitul celei de a doua faze, pe diagramă nu corespunde întrutotul cu sfîrșitul propagării flăcării"..

În lucrarea [7] s-au adunat la un loc pentru prima dată, observații experimentale efectuate în locuri și momente diferite, care nu au căpătat pînă în prezent întreaga lor semnificație. Împreună cu ecuația de propagare găsită de noi (6) ele demonstrează justețea punctului de vedere exprimat de Ricardo și Socolic.

Precizînd astfel granița dintre ultimele două faze ale procesului rezultă o concluzie interesantă cu privire la mecanismul de propagare a flăcării la finele fazei principale.

În unele lucrări se consideră că pe ultimele fracțiuni din drumul flăcării, mecanismul de propagare turbulent se transformă într-unul laminar. Drept argument este menționat acela că, la apropierea flăcării de perete suprafața ei se micșorează într-atît încît acțiunea pulsațiilor turbulente devine imposibilă. Este evident că acest argument are la bază modelul „laminar" al flăcării turbulente care consideră că reacțiile se desfășoară pe o suprafață de ardere.

Lăsăm deocamdată la o parte problema acțiunii turbulenței în flăcări cu suprafețe mici, întrucît vom reveni pe larg asupra ei. Aici vom menționa numai următorul raționament care rezultă din ecuația propagării și din informațiile experimentale cunoscute.

Dacă spre sfîrșitul propagării, flacăra devine laminară, atunci rezultă că în faza principală de ardere mecanismul propagării este și turbulent și laminar. Nici unul dintre autori nu înclină către o asemenea ipoteză ceea ce este justificat de observațiile experimentale.

În adevăr experiențele lui Socolic, Voinov și Sviridov [23] din 1949, organizate cu un avans constant la desprindere pun în evidență independența fazei principale de factori fizico-chimici, ceea ce evident nu ar fi posibil dacă în această fază ar exista un front de flacără laminară.

Experiențele cu un avans constant la desprindere au fost organizate și de noi, în laboratorul de motoare, cu ardere internă, din Institutul Politehnic București [3]. În lucrarea noastră se arată că la modificarea temperaturii de admisie, a presiunii de evacuare și a naturii combustibilului nu se observă o modificare esențială a duratei fazei principale, „ceea ce atrage di nnou atenția — conchidem noi — asupra faptului că această fază ste guvernată de macroturbulență și *aproape* de loc de viteza de reacție".

Influența factorilor fizico-chimici se exercită probabil și în faza principală dar ea intervine cu o pondere foarte mică.

Pe baza datelor experimentale s-a alcătuit relația

$$U_t = AW' + B$$

în care

U_t = viteza de propagare a flacării turbulente;

W' = intensitatea turbulenței.

Pe baza modelului autoaprinderii pulsatorii constanta A capătă semnificația raportului T/τ_{aa} unde T este timpul caracteristic în reprezentarea Lagrange iar τ_{aa} perioada de inducție; constanta B reprezintă viteza laminară. După cum se menționează în [1], componența B este mult inferioară componentei AW' iar influența factorilor fizico-chimici asupra vitezei de propagare a flăcărei turbulente se exercită prin perioada de inducție. Rezultate interesante a obținut în acest sens, A Radu Cernea care a arătat [5] că la creșterea coeficientului excesului de aer de la 0,85 la 1,3 durata fazei principale crește cu cca. 15%.

Rezultă astfel că în faza principală de ardere prezența unui front laminar de flacără trebuie exclusă, altfel influența factorilor fizico-chimici ar căpăta o pondere substanțială ceea ce nu se confirmă prin datele experimentale.

S-ar putea admite existența unui front de flacără laminară în ultima fază a arderii dar în acest caz trebuie exclusă posibilitatea de stingere a flăcării în momentul atingerii presiunii maxime.

Astfel, raționamentul prin reducerea la absurd bazat pe ecuația propagării și pe informațiile experimentale arată că este puțin probabilă existența unui front de flacără laminară, la finele arderii.

De altfel, dacă se admite modelul autoaprinderii pulsatorii [1] [24] nu mai este necesar să se apeleze la o suprafață de ardere; flacăra poate ajunge la perete fără a-și modifica structura, iar turbulența poate acționa după cum se va arăta ulterior chiar și în volumele mici de amestec care sînt cuprinse de flacără la finele propagării.

După cum se arată mai departe, unele date experimentale precum și unele elemente ale teoriei curentului turbulent pun sub semnul întrebării prezența unui front de flacără laminară în motor.

2. *Cu privire la faza a treia a procesului de ardere.*

Faza treia, cea mai puțin studiată pînă în prezent, capătă în lumina considerațiilor de mai sus o semnificație cu totul deosebită.

Pe baza modelului laminar al flăcării turbulente, se consideră că după stingerea flăcării la perete, arde combustibilul din pungile de amestec

rămase în spatele flăcării. Potrivit interpretărilor lui Summerfield și Wohl [27], [30] după stingerea flăcării la perete trebuie să se desfășoare numai reacțiile de desăvîrșire a procesului de oxidare; intrarea în reacție a unor cantități noi de substanță inițială n-ar fi posibilă întrucît în spatele frontul de aprindere se desfășoară reacții omogene în volum și nu există deci combustibil care să nu fie reacționat chimic.

Dacă flacăra ajunge la perete la atingerea presiunii maxime înseamnă că procesul de ardere care continuă în faza treia este determinat numai de adîncimea zonei de ardere. Este adevărat că în adîncimea zonei de ardere trebuie să existe și reacțiile de desăvîrșire a procesului de oxidare, dar elementul specific al proceselor din spatele flăcării îl constituie intrarea în reacție a unor noi și importante cantități de combustibil..

Din datele experimentale publicate în [11] și reproduse în tabela 1 rezultă o valoare foarte mică pentru coeficientul de degajare a căldurii active, $\zeta_{p_{max}}$, în punctul de presiune maximă care nu poate fi aplicată decît prin cantitatea mare de combustibil prezentă în camera de ardere.

$$\zeta_{p_{max}} = \frac{\Delta u + A \int p\, dv}{Q_{\text{încărcătnră}}} \cdot 100\%$$

Tabela 1

Combustibilul	Coeficientul excesului de aer λ	Coeficientul de degajare a căldurii active $\zeta_{p\ max}$	Condițiile de încercare
Benzină	0,82	75	Motor monocilindric utilizat în (10), n = 1300
	1,22	62	rot/min; avansul optim la declanșarea scînteii (β_{opt})
Benzină	0,82	51	Motor monocilindric L—3
	1,17	68	n = 1000 rot/min;
Metan	0,93	51	
	1,19	56,5	
Benzină	0,876	72	Motor GAZ — 20 Pobeda; n = 2600 rot/min
	1,187	72	

Cu privire la faza treia a procesului de ardere, recent (1960) și Socolic a enunțat ideia că „arderea ultimelor doze de încărcătură, după p_{max} reprezintă probabil, în special, arderea ulterioară pe lățimea zonei flăcării turbulente, după contactul său cu pereții cilindrului" [25].

Elucidarea proceselor care au loc după atingerea presiunii maxime are o importanță deosebită din punct de vedere practic.

Este ştiut că îmbunătăţirea randamentului indicat al motorului se poate obţine numai prin reducerea duratei totale a arderii. În stadiul actual de dezvoltare a motorului cu aprindere prin scînteie, cînd au fost elaborate metode eficiente de scurtare a duratei fazei principale de ardere, o cale importantă pentru ridicarea eficienţei economice a motorului rămîne aceea a micşorării duratei ultimei faze de ardere. Prin evidenţierea naturii proceselor care au loc în această fază noi indicăm în acelaşi timp calea principală pe care trebuie să se acţioneze pentru scurtarea acestei faze şi anume: reducerea adîncimei zonei de ardere *). Orice factor care acţionează în acest sens este de natură să contribuie la mărirea eficienţei economice a motorului. Astfel studiul adîncimii zonei de ardere capătă o importanţă cu totul deosebită pentru îmbunătăţirea procesului de ardere tocmai în acea parte a lui care influenţează sensibil randamentul motorului. Mărind intensitatea turbulenţei se reduce durata de propagare, dar creşte probabil adîncimea zonei de ardere, adică durata fazei a treia; se acţionează astfel în sensuri diferite asupra economicităţii. Există oare o condiţie optimă, din acest punct de vedere pentru intensitatea turbulenţei?

Rezultatele experimentale efectuate pe arzătoare arată că la mărirea presiunii, adîncimea zonei de ardere în flacăra turbulentă se micşorează. Corelînd acest fapt cu consideraţiile noastre ar rezulta că mărirea raportului de compresiune trebuie să aibă ca efect principal reducerea adîncimii zonei de ardere.

Astfel, îmbunătăţirea randamentului la rapoarte mari de compresiune ar apare nu atît ca efect obţinut pe cale termodinamică ci în deosebi ca rezultat al cineticii reacţiilor şi dinamicii propagării.

Elucidarea acestei probleme ar lămuri definitiv controversa cunoscută astăzi în literatura de specialitate cu privire la eficienţa rapoartelor mari de compresiune şi ar deschide calea spre îmbunătăţirea în continuare a randamentului motorului.

De aceea am considerat că ar fi de mare folos obţinerea unor informaţii cu privire la modificarea adîncimii zonei de ardere şi deci a duratei ultimei faze de ardere, în condiţiile rapoartelor mari de compresiune. Încercările experimentale efectuate de noi [7] confirmă aceste ipoteze.

3. *Cu privire la acţiunea turbulenţei în momentul apariţiei nucleului de flacără.*

După declanşarea scînteii electrice trece un timp, perioada de inducţie pînă la apariţia primului nucleu de flacără.

Natura propagării flăcării după apariţia primului focar nu este încă elucidată.

Ideile cu privire la propagarea flăcării imediat după apariţia ei sînt cel mai concis formulate de către Maslenicov: „Dimensiunile frontului flăcării în decursul primei faze sînt foarte mici, astfel încît mişcarea şi pulsaţiile turbulente ale amestecului nu pot modifica simţitor conturul frontului flăcării şi deci nu pot influenţa caracterul propagării flăcării.

*) În lucrarea [7] prezentăm un sistem de ecuaţii care permite cercetarea influenţei adîncimii zonei de ardere asupra procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie.

Din această cauză arderea amestecului este condiționată numai de propagarea flăcării care se produce într-o direcție normală pe suprafața frontului ei" [15] deci cu viteza normală de ardere.

Această concepție cu privire la propagarea unui front de flacără laminară după apariția primului nucleu de flacără este tributară modelului „laminar" al flăcării turbulente. În adevăr, la dimensiunile mici ale nucleului, pulsațiile macroturbulente nu pot acționa, încît turbulența la scară mică (microturbulența) nu poate decît să intensifice schimburile de substanță și căldură pe o suprafață de ardere prin conductibilitate și difuziune moleculară. Numai atunci cînd flacăra atinge astgel de dimensiuni încît devine posibilă acțiunea macroturbulenței, mecanismul laminar se transformă într-unul turbulent.

Ideile privind propagarea unui front de flacără laminară imediat după apariția focarului se găsesc expuse în mai multe lucrări [2], [5], [18], [23] etc.

În lucrarea [23] se stabilește chiar o proporționalitate între durata primei faze și viteza normală de ardere, de forma

$$\tau_1 \approx \frac{1}{u_n (1 + B_n a)}$$

unde

τ_1 — durata în secunde, a primei faze de ardere, definită prin arderea unui volum reprezentînd 15% din volumul amestecului;

u_n — viteza normală (laminară) de ardere;

n — turația motorului;

B, a — constante.

Existența unui front de flacără laminară este admisă în general și datorită observațiilor cu privire la marea dependență a primei faze de factori fizico-chimici, dependență atribuită vitezei normale de ardere.

Să considerăm că durata primei faze a procesului de ardere reprezintă 30% din durata totală a propagării, adică $\alpha_1 - \alpha_s = 0{,}3\ (\alpha_y - \alpha_s)$.

Să admitem că durata propagării pentru un motor cu 5000 rot/min. — turație curentă pentru motoarele moderne de serie — este de 70°, ceea ce reprezintă evident o exagerare importantă. Atunci durata primei faze va fi: $\alpha_1 - \alpha_s = 21°$.

Să presupunem că jumătate din această durată reprezintă perioada d inducție iar restul, timpul necesar pentru propagarea unui front de flacără laminară, ceea ce reprezintă evident o nouă exagerare întrucît în această a doua parte a procesului viteza trebuie să crească continuu, pentru a ajunge la sfîrșitul fazei la o valoare egală cu viteza flăcării turbulente.

Din lucrarea [2], rezultă că viteza normală de ardere pentru un amestec de benzină-aer în fază omogenă, este de 0,12 m/s la presiunea atmosferică și temperatura de 0°C.

Viteza normală de ardere variază însă cu temperatura și presiunea.

Toate datele experimentale conduc la concluzia că viteza normală de ardere înregistrează o creștere importantă o dată cu mărirea temperaturii [8], [9].

În ceea ce privește influența presiunii asupra vitezei normale în lucrarea [4] se menționează: „din datele contradictorii publicate în literatură rezultă că determinarea exactă a dependenței vitezei flăcării de presiune este foarte dificilă, astfel încît toate informațiile cunoscute în prezent cu privire la influența presiunii sînt îndoielnice".

Un mare număr de date experimentale indică scăderea vitezei de propagare a flăcării laminare cu presiunea, pentru presiuni cuprinse între 1—20 ata [13], [22], [25].

Față de cele menționate mai sus, vom alege pentru viteza normală valoarea utilizată în calcule de Socolic pentru a stabili un punct de vedere opus celui la care vrem să ajungem noi [26]. Să considerăm așadar $u_n = 30$ cm/s.

Drumul (l) parcurs de flacăra laminară în raport cu amestecul proaspăt va fi

$$l = u_n \cdot \tau$$

unde

$$\tau = \frac{\alpha}{6n}$$

deci

$$l = u_n \frac{\alpha}{6n}$$

sau, introducînd valorile admise,

$$l = 0{,}1 \text{ mm}.$$

Este evident că în calculele efectuate, valorile admise au fost astfel alese încît să se obțină pentru l o valoare cît mai mare. Mai sus s-a arătat că s-a ales pentru α o valoare exagerat de mare; menționăm că turația aleasă reprezintă o valoare exagerat de mică. În adevăr, la motoarele de cursă, turația ajunge la 10.000--12.000 rot/min și nu există nici un motiv care să schimbe convingerea că fenomenele de aprindere și propagare ar fi altele decît în motorul cu o turație pe jumătate.

Rezultă astfel că chiar dacă ar exista un front de flacără laminară, el nu ar putea parcurge o distanță mai mare decît o zecime de milimetru ceea ce reprezintă chiar mai puțin decît grosimea frontului de flacără laminară.

Invers, dacă am considera că flacăra laminară se propagă în motor pe o distanță de numai 2 mm, de exemplu, la un motor de cursă, cu turația de 10.000 rot/min, timpul de propagare în unghiuri RAC ar fi de 400° ceea ce arată că aici nu este vorba de o eventuală eroare de evaluare ci de o diferență de un ordin de mărime față de cazul real.

Aceste calcule orientative întăresc convingerea că este puțin probabil ca dezvoltarea focarului inițial să se facă prin flacără laminară. Considerarea flăcării laminare în motor, în diferite momente ale propagării reprezintă după părerea noastră o inconsecvență față de modelul autoaprinderi pulsatorii, care nu numai că nu necesită dar exclude existența unei suprafețe de ardere.

După părerea noastră o ieșire din aceste dificultăți s-ar putea realiza dacă s-ar admite că propagarea flăcării pe baza mecanismului turbulent este posibilă chiar de la apariția focarului inițial.

În dezvoltarea unei asemenea reprezentări ar apărea dificultăți dacă se ține seama de părerea potrivit căreia turbulența nu poate acționa la scări atît de mici, de ordinul de mărime a primului nucleu de flacără. Această obiecțiune vine totuși în contradicție atît cu datele experimentale cît și cu reprezentările din teoriile recente ale turbulenței.

În cele ce urmează ne propunem să evidențiem acele fapte și idei care atestă posibilitatea intervenției turbulenței la scări foarte mici.

În lucrarea [25]) se menționează următoarele observații.

a) Aprinderea în bombe a unor amestecuri combustibile în care s-a indus o turbulență intensă cu ajutorul unui ventilator, s-a putut realiza numai o dată cu sporirea intensității scînteii cu 20% ;

b) Pentru aprinderea unui amestec de aer cu gaz din rețeaua comunală a fost necesară o sporire a intensității scînteii o dată cu mărirea vitezei de curgere turbulentă.

c) N. N. Zagriazkin a cercetat, dezvoltarea flăcării turbulente într-un canal deschis ; la o turbulență intensă a unor amestecuri diluate s-a observat o întrerupere în dezvoltarea focarului de flacără și uneori chiar stingerea sa.

Dacă se consideră formarea nucleului de flacără ca o aprindere termică atunci evident perioada de inducție depinde de raportul dintre viteza de degajare a căldurii datorită reacțiilor chimice și viteza de cedare a căldurii din zona de reacție în mediul înconjurător. Observațiile de mai sus se explică prin creșterea mai rapidă a vitezei de transfer de căldură o dată cu mărirea intensității turbinare. Dacă turbulența poate modifica perioada de inducție atunci rezultă că ea poate acționa în spații foarte mici, de gradul distanței dintre electrozii bujiei.

Cum poate acționa turbulența în volume cu dimensiuni atît de mici ?

În anul 1941 A.N. Kolmagorov propune o teorie generală a turbulenței izotrope, locale [11], [12]. Principalele legi stabilite pe baza acestei teorii sînt verificate mai tîrziu experimental și confirmate prin măsurători directe efectuate în laborator, în atmosferă și oceane.

În esență teoria lui Kolmogorov introduce un model al turbulenței pe baza căreia se explică transformarea energiei pulsațiilor turbulente de scară mare în energia internă a fluidului.

O prezentare a principalelor idei din teoria de bază a lui Kolmogorov se găsește în lucrările [14] și [16]. În cele ce urmează reproducem în rezumat principalele idei ale lui Kolmogorov, după [16].

Curentul turbulent la numere mari ale lui Reynolds este rezultatul suprapunerii turbioanelor de diferite scări. Cele mai mari dintre turbioane apar ca rezultat direct al instabilității scurgerii ; fie scara L a acestor turbiooane mari.

Mișcarea turbioanelor mari (elemente de volum la scară mare sau macroturbioane) prezintă la rîndul ei un anumit grad de instabilitate și generează turbioane mult mai mici, de ordinul doi ; turbioanele de ordinul doi generează turbioane de ordinul trei ș.a.m.d. pînă la cele mai mici

turbioane care prezintă deja stabilitate — adică turbioane care se caracterizează prin numere Reynolds mai mici decît cele critice. Pentru elementele de volum mari sînt caracteristice numere Reynolds mari, de aceea viscozitatea nu influențează deplasarea lor iar mișcarea lor nu poate fi însoțită de o disipare vizibilă de energie. Aceasta înseamnă că energia primită de turbioanele de ordinul n de la turbioanele de ordinul $n-1$ se cheltuiește pentru formarea turbioanelor de ordinul $n+1$.

Mișcarea celor mai mici elemente de volum este deja o mișcare laminară, ea depinde în mod esențial de vîscozitatea moleculară; energia ei se transformă direct în energie cinetică a moleculelor, adică în căldură, desăvîrșindu-se astfel procesul de disipare a energiei.

Astfel, într-o mișcare turbulentă există un spectru de pulsații de toate frecvențele. De la pulsațiile cu frecvențele cele mai mici se deplasează permanent un „flux de energie" spr pulsațiile cu frecvențele cele mai mari, care se disipează în final în energia internă a fluidului. Fără turbioane de diferite ordine nu este posibilă transformarea energiei cinetice a curentului în energia internă a fluidului, nu este posibilă creșterea temperaturii.

În teoria lui Kolmogorov mișcarea tuturor vîrtejurilor în afara celor de scară mare, este socotită omogenă, izotropă și cvasistaționară.

În studiul structurii locale a turbulenței o mare importanță o prezintă teoria similitudinii. Mărimile fundamentale de care depinde structura locală a curentului turbulent sînt două și anume: a) energia medie de disipare în unitatea de timp, pe unitatea de masă E, care determină intensitatea fluxului de energie ce se transmite de la o scară la alta a turbulenței; b) viscozitatea cinematică ν, care joacă un rol fundamental în procesul de disipare.

Ecuațiile de dimensiuni ale lui E și ν în sistemul MKFS sînt:

$$E = \frac{L \cdot F}{T L^{-1} F T^2} = L^2 T^{-3} \; ; \quad \nu = L^2 T^{-1}$$

Cu aceste mărimi se poate forma o singură combinație pentru a obține o dimensiune de lungime:

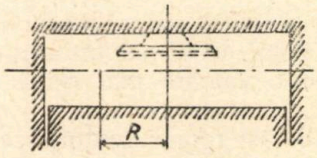
$$l = \left(\frac{\nu^3}{E}\right)^{1/4}$$

unde lungimea l detemină chiar acea scară internă caracteristică pentru turbulența locală; ea se poate identifica cu scara celui mai mic turbion sau element de volum în care se produce disiparea energiei. Scara l a fost pentru prima dată evidențiată în lucrarea lui Kolmogorov [11] și se numește scara internă sau locală a turbulenței, în opoziție cu scara exterioară L.

După cum au arătat măsurătorile experimentale [19], [20], [21], umplerea cilindrului unui motor are un caracter de jet, ceea ce constituie sursa principală de turbulență în motor. Experiența clasică a lui Clark (1912) este o dovadă incontestabilă a amortizării turbulenței în cilindrul unui motor, de aceea este rațional să se considere că energia cinetică a curentului din încărcătură se disipează în căldură.

Să calculăm care este scara celui mai mic element de volum la care este posibilă disiparea energiei. Dacă dimensiunile acestei scări sînt de ordinul de mărime al dimensiunilor primului focar de flacără atunci se aduce un argument important în sprijinul ipotezei privind acțiunea turbulenței în volume de dimensiuni foarte mici.

Întrucît vom face un calcul orientativ ne propunem să alegem asemenea condiții în care scara l să rezulte exagerat de mare ceea ce



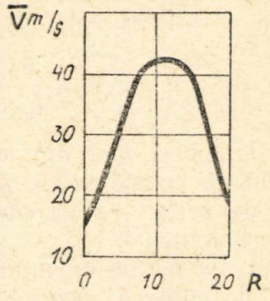


Fig. 2

reprezintă evident un calcul acoperitor. Dacă chiar și în aceste condiții dezavantajoase scara l nu depășește ordinul de mărime al primului nucleu de flacără (plasindu-ne în aceleași condiții acoperitoare să considerăm dimensiunile nucleului de flacără exagerat de mic: o sferă cu raza de 1 mm) atunci se obține confirmarea căutată privind posibilitatea de acțiune a turbulentei la scară foarte mică.

Ultima relație arată că scara l este cu atît mai mare cu cît energia care se disipează este mai mică.

Deaceea să considerăm că numai 10% din energia cinetică a curentului fluid din cilindrul motorului se disipează în căldură în cursele de admise și compresiune ($\alpha = 360°$ RAC).

Pentru desfășurarea calculelor folosim măsurătorile de turbulență ale lui E. S. Semenov.

In fig. 2 se prezintă variația vitezei curentului în secțiunea transversală a cilindrului unui motor C.F.R., la începutul cursei de admisie (60° RAC după p.m.i.), la o turație de 1200 rot/min. Drept viteză medie a curentului în secțiune se alege valoarea de 30 m/s. Numărul Reynolds va fi

$$Re = \frac{\bar{v} D}{\nu}$$

unde D — diametrul cilindrului, $\bar{v}$ — viteza medie a curentului iar ν — viscozitatea cinematică. În condițiile date

$$Re = \frac{30 \cdot 82{,}5 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-6}} = 123.000.$$

ceea ce reprezintă o valoare suficient de mare, pentru a fi îndeplinite condițiile impuse de teoria lui Kolmogorov.

Energia cinetică totală E a curentului raportată la unitatea de masă și unitatea de timp va fi

$$E_t = \frac{\frac{Mv^2}{2}}{\tau M} = \frac{v^2}{2\tau}$$

unde M este masa încărcăturii proaspete iar τ, intervalul de disipare

Pentru $n = 1200$ rot/min rezultă

$$\tau = \frac{\theta}{6n} = \frac{360}{6 \cdot 1200} = 510^{-2}\,\mathrm{s}$$

Se vede că și aici am considerat condiții acoperitoare întrucît am admis o turație foarte mică, mult mai mică decît cea întîlnită curent pe motoarele de serie; se va obține astfel o valoare mai ridicată a scării locale a turbulenței.

Întrucît s-a admis că numai 10% din energia curentului se disipează sub formă de căldură, rezultă

$$E = 0{,}1\, E_t$$

sau

$$E = 0{,}1\, \frac{900}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}\, 900\,[\mathrm{m^2\,s^{3-}}]$$

De unde

$$l = \frac{(20 \cdot 10^{-6})^{3/4}}{900^{1/4}} = 0{,}055\ \mathrm{mm}.$$

Întrucît scara minimă a turbulenței este de ordinul sutimilor de milimetru se poate conchide că acțiunea turbulenței este posibilă în orice condiții, cihar atunci cînd reacția se desfășoară în volume, ale căror dimensiuni sînt de ordinul de mărime ale aceluia cuprins între electrozii bujiei.

Teoria lui Kolmogorov se aplică numai mediilor incompresibile. Dacă în cursa de admisie încărcătura proaspătă poate fi considerată un mediu incompresibil, în cea de a doua cursă mediul este evident compresibil. Astfel condițiile lui Kolmogorov se aplică corect numai pe jumătate din intervalul considerat.

În efectuarea calculelor au fost alese însă condiții mult acoperitoare, de aceea rezultatele obținute deși sînt orientative nu pot fi considerate lipsite de temei cu atît mai mult cu cît observațiile experimentale sînt în concordanță cu concluziile teoretice. Astfel, pe baza teoriei turbulenței locale se pot explica acele fapte evidențiate de experiență, care atestă influența turbulenței asupra duratei de formare a focarului inițial.

În lucrarea [28], Șcetincov încearcă să elaboreze un calcul al propagării flăcării în curent turbulent. Ceea ce este remarcabil în lucrarea sa este modelul fizic pe care-l adoptă. El consideră curentul turbulent ca „totalitatea mișcărilor haotice a elementelor de volum. Aceste elemente

de volum au dimensiuni diferite, de la cele mai mari, comensurabile cu dimensiunile curentului pînă la cele mai mici prin care se produce disiparea energiei pulsațiilor în căldură. Astfel, elementele de volum foarte mici există nu numai alături de cele mari, dar sînt răspîndite chiar în interiorul lor". Acest model este în concordanță cu reprezentarea lui Kolmogorov subliniind în plus prezența turbioanelor de ordin mai mic în interiorul turbioanelor de ordin mai mare.

Pe baza modelului menționat, Șcetincov ajunge la concluzia că într-un jet de flacără turbulent „granița între diferitele elemente de volum care sînt alcătuite din produse de ardere și amestec proaspăt nu este obligator să fie un front laminar". Menționînd importanța pe care o prezintă difuzia produselor de ardere și amestecului proaspăt în interiorul diferitelor elemente de volum el subliniază că „dacă această difuzie se produce suficient de repede atunci frontul laminar nu reușește să se organizeze".

Modelul fizic a lui Șcetincov completează printr-o imagine spațială modelul lui Socolic, și are un suport fizic justificat de teoria lui Kolmogorov.

În posesia elementelor menționate mai sus, se încearcă să se alcătuiască o reprezentare mai completă a fenomenului de propagare a flăcării turbulente.

Mișcarea haotică a elementelor de volum de scară mare, care ard reprezintă acel factor principal, hotărîtor, care împinge înainte frontul de aprindere. La contactul elementelor de volum care ard cu elementele de volum alcătuite din amestec proaspăt se produce spargerea, și în parte amestecarea lor. *Turbulența locală, joacă un mare rol* în intensificarea difuziunii centrilor activi și a transferului de căldură în amestecul proaspăt ceea ce ușurează autoaprinderea lui ; dar totodată se produce stingerea amestecului care arde din cauza diluării lui cu amestec proaspăt (efect chimic) și a reducerii locale de temperatură (efect termic). Astfel, iau naștere procesele de autoaprindere și stingere pulsatorie.

Dacă difuzia turbioanelor mari determină înaintarea rapidă a frontului de aprindere, amestecarea cu gazele proaspete frînează desfășurarea reacției. Se pot distinge astfel două *laturi contradictorii* ale fenomenului de turbulență : una care accelerează propagarea, alta care frînează reacția ; prima, determină vitezele mari de propagare, cealaltă adîncimea mare a zonei de ardere ; ambele efecte sînt proprii amestecurilor turbulente care ard.

Se pare că trebuie să existe condiții în care suprapunerea celor două laturi ale fenomenului determină un efect optim pentru procesul de ardere.

Există împrejurări în care una sau alta dintre cele două laturi ale fenomenului are un efect preponderent.

În condițiile unui volum mic al reacției — cazul focarului inițial de reacție — macroturbioanele nu pot acționa, deaceea efectul de propagare, de înaintare a zonei de reacție este foarte mic ; acționează numai micropulsațiile care nu pot împinge sensibil înainte frontul de aprindere. În schimb cea de a doua latură a fenomenului, aceea care tinde să frîneze reacția va avea în aceste condiții un rol predominant. Dimensiunile zonei

de reacție fiind reduse cantitatea de căldură degajată trebuie să fie mică, creșterea de temperatură relativ scăzută. Deaceea chiar un efect redus de amestecare, datorită micropulsațiilor, tinde într-atît să dilueze amestecul, să modifice compoziția chimică a lui, să-i reducă temperatura, să împrăștie concentrația de centrii activi — care oricum nu poate fi importantă — încît propagarea flăcării este sensibil frînată.

Probabil că în aceste condiții viteza de reacție trebuie să influențeze propagarea într-o măsură tot atît de mare ca și turbulența. Totodată temperaturile reduse cît și gradul redus de ardere determină un grad mic de destindere a tranșelor ; viteza de propagare este mică, focarul de reacție crește încet și greu. Pe măsură însă ce dimensiunile sale sporesc intră în acțiune noi scări ale turbulenței ; efectul de diluare a amestecului care arde scade în intensitate, în schimb crește efectul de pătrundere, de avansare a elementelor de volum care ard ; elemente de volum din ce în ce mai mari (macropulsații) acționează asupra zonei de ardere, viteza de propagare crește pînă ajunge la valorile curente din amestecurile turbulente.

Reprezentarea propusă arată nu numai că mecanismul turbulent ar putea acționa încă din momentul apariției nucleului de flacără ca și la finele propagării, dar explică în același timp și variația vitezei la începutul procesului tocmai datorită intrării treptate în acțiune a pulsațiilor de diferite scări.

Una dintre metodele de investigație care indică viteze mici de deplasare la începutul și sfîrșitul propagării este cea a fotoînregistrărilor continui. În fig. 3 se reprezintă schematic o astfel de înregistrare pe baza

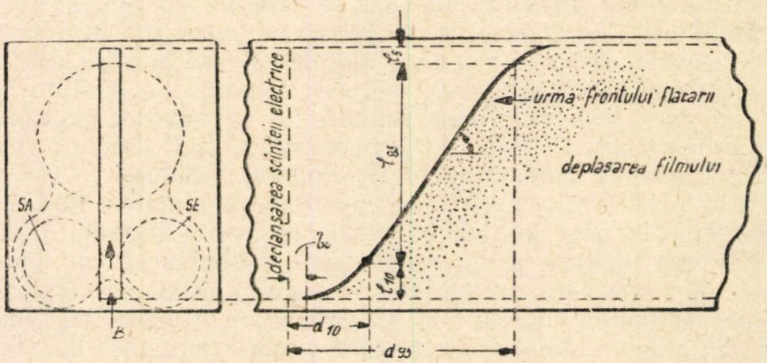


Fig. 3

căreia procesul de ardere a și fost împărțit în trei faze : faza întîia în care viteza frontului de aprindere se accelerează continuu (flacăra parcurge aproximativ 10% din distanța totală) ; faza doua în care viteza frontului de aprindere are valori mari și este aproximativ constantă (flacăra parcurge aproximativ 85% din distanța totală) ; faza treia în care flacăra parcurge restul distanței (5%), viteza frontului de aprindere se decelerează continuu, pînă la stingerea flăcării pe perete.

Este evident că pe acest tip de fotografie s-a înregistrat viteza aparentă de propagare. Mișcarea decelerată a frontului la sfîrșitul propagării

este determinată de gradul redus de destindere a tranșei din cauza presiunilor mari din cilindru; acest fenomen are efectul predominant.

Cu totul altfel se petrec lucrurile la începutul propagării. Aici mișcarea accelerată a frontului poate fi explicată numai pe baza modelului autoaprinderii pulsatorii și a amestecului turbulent care acționează chiar de la începutul propagării.

La începutul propagării cantitatea de căldură degajată este mică; primele tranșe care ard au un grad de destindere mic deși regimul de presiune este redus. Destinderea tranșelor este frînată și de micropulsații, care diluează amestecul, reduc temperatura și viteza de reacție.

Numai pe măsura dezvoltării focarului inițial și intrarea în acțiune a unor scări mai mari de turbulență, viteza frontului de flacără crește atît ca efect al difuziei turbulente cît și ca efect al destinderii termodinamice a tranșelor.

Pentru o cameră de ardere cu supape în cap cu bujie laterală, cu diametrul cilindrului de 90 mm, drumul parcurs de flacără în faza de accelerare ar reprezenta 9 mm. Dacă s-ar considera propagarea unui front laminar numai pe a cincea parte din acest drum s-ar ajunge la durate enorme de propagare care ar face imposibilă funcționarea motorului.

Se poate elabora acum o concepție mai unitară asupra fazelor procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie.

După părerea noastră cele trei faze ale procesului de ardere sînt următoarele:

1. *Faza inițială* sau perioadă de inducție cuprinde timpul necesar pentru apariția focarului de flacără. Această fază este controlată de proprietățile fizico-chimice ale amestecului care determină viteza de reacție. Acțiunea turbulenței se manifestă în această fază împiedicînd desfășurarea ei.

2. *Faza principală* cuprinde întregul proces de propagare. Propagarea flăcării se face numai prin mecanismul turbulent.

În această fază pot fi evidențiate trei etape.

În prima etapă mișcarea flăcării este accelerată. Turbulența se manifestă ca un factor de frînare, deoarece acționează numai micropulsațiile ca și în prima fază. Tocmai de aceea în această etapă viteza de reacție, deci factorii fizico-chimici trebuie să joace un rol foarte important. Pe măsură ce cresc dimensiunile frontului intră în acțiune macroturbulența de scări tot mai mari, care amplifică tot mai mult viteza de înaintare.

În a doua etapă, care reprezintă de altfel și partea principală din această fază propagarea este dominată numai de turbulență. Viteza de propagare are valori ridicate.

În a treia etapă propagarea este din nou frînată, de astădată, în special de densitatea mare a mediului în care înaintează flacăra.

În faza principală acțiunea factorilor fizico-chimici nu este exclusă; ea își exercită influența asupra autoaprinderii pulsatorii a elementelor de volum care conține amestec proaspăt. Nu este suficient ca elementele de volum de scară mare, care ard să avanseze mult prin amestecare în fața

zonei de reacție ; pentru a amorsa reacția în punctele avansate din amestecul nears trebuie ca autoaprinderea macroturbioanelor de amestec proaspăt să se producă ușor ; ori autoaprinderea elementelor noi de volum este determinată tocmai de factorii fizico-chimici.

Factorii fizico-chimici intervine probabil cu o pondere mare în prima etapă a fazei principale, cînd acționează numai micropulsațiile turbulente ; în restul fazei principale, ponderea lor trebuie să fie mult redusă.

3. *Faza treia* poate fi denumită post-ardere în adevăratul înțeles al cuvîntului, întrucît în această fază intră în reacție combustibilul din adîncimea zonei de ardere.

Modelul elaborat de noi indică și calea prin care se poate reduce durata acestei faze.

Faza treia este o consecință a uneia dintre cele două laturi ale turbulenței și anume aceea care frînează reacția din care cauză crește adîncimea zonei de ardere. Așa dar o reducere a adîncimii zonei de ardere deci a duratei celei de a treia faze trebuie să se obțină prin mărirea vitezei de reacție. Cel mai eficace factor în acest sens trebuie să fie raportul de compresiune, întrucît prin efectul de presiune și temperatură el joacă un rol important în accelerarea reacției chimice. Un efect în același sens se poate obține prin îmbogățirea amestecului sau prin omogenizarea lui. Ultima cerință se poate realiza prin montarea unei viziere la supape ceea ce pune într-o lumină nouă influența acestei soluții costructive asupra procesului de ardere. Există o condiție care limitează mărirea excesivă a vitezei de reacție : aceasta este arderea detonantă.

Se ajunge astfel la concluzia că îmbunătățirea eficienței economice a motorului se poate obține prin mărirea vitezei de reacție care trebuie să crească atît de mult încît să reducă la minim adîncimea zonei de ardere, dar să nu crească întratît încît să permită apariția detonației.

4. *Cu privire la granița de separare dintre primele două faze.*

Pe diagrama indicată numai două momente limită pot fi precis determinate : momentul declanșării scînteii — începutul primei faze — și momentul atingerii presiunii maxime — sfîrșitul celei de a doua fază.

Încercările de a stabili o graniță între primele două faze utilizînd în acest scop diagrama indicată sau adoptînd drept criterii un volum de amestec ars trebuie considerate în general arbitrare.

Momentul de desprindere din diagrama indicată reprezintă un element convențional. Alegerea lui este totuși justificată din mai multe motive.

În primul rînd, momentul de desprindere, fiind suficient de departe de momentul apariției nucleului, de flacără, asigură pe experimentator că în orice caz urmează faza principală de ardere.

În al doilea rînd, momentul de desprindere este atît de departe de momentul declanșării scînteii electrice încît cu siguranță că pînă la el a fost consumată și prima etapă a fazei principale aceea în care mișcarea frontului este accelerată. Prin aceasta s-a izolat din faza principală acea porțiune în care turbulența are o acțiune de frînare iar factorii fizico-chimici joacă un rol important ; în restul fazei principale cu siguranță că turbulența va acționa numai ca accelerator..

Ținînd seama de cele de mai sus rezultă că punctul de desprindere are într-un anumit sens și un suport fizic.

Astfel, dacă se alege drept graniță între primele două faze, momentul de desprindere, trebuie admis atunci că asupra primei faze acționează un complex de factori, cu efecte contradictorii, greu de apreciat. În acest caz asupra primei faze vor acționa :

— proprietățile fizico-chimice ale amestecului care vor influența atît perioada de inducție cît și perioada de accelerare a propagării frontului prin modificarea temperaturii de autoaprindere.

— turbulența care are efecte contradictorii. Astfel ea tinde pe de o parte să mărească perioada de inducție și să frîneze începutul propagării (prima etapă din faza principală) deci să mărească durata primei faze ; pe de altă parte tinde să micșoreze durata acestei faze prin acțiunea de accelerare pe care o are la finele ei cînd dimensiunile flăcării sînt suficient de mari.

În lucrarea [2] C. Aramă dă sfîrșitului primei faze un conținut fizic mult mai precis. El socotește sfîrșitul primei faze ca fiind sfîrșitul fazei de accelerare a propagării. În acest fel se izolează precis prima etapă din faza principală în care turbulența acționează ca factor de frînare, iar factorii fizico-chimici au un rol important, de restul fazei cînd turbulența acționează ca accelerator.

Prin aceasta atît prima fază cît și a doua sînt mai exact conturate : pe toată durata primei faze acționează atît proprietățile fizico-chimice care accelerează desfășurarea proceselor cît și turbulența care frînează în fiecare moment dezvoltarea lor ; în a doua fază acționează numai turbulența prin efect de accelerare. Această diviziune a procesului deși nu poate fi evidențiată pe diagrama indicată are însă un conținut fizic foarte clar.

Unele rezultate contradictorii menționate în literatura de specialitate, la alegerea punctului de desprindere drept graniță între faze sînt determinate de acțiunile diferite, opuse și greu de evaluat ale tuturor facotrilor care acționează pînă în acel moment.

Determinarea primei faze a procesului pe baza diagramei presiune-unghiu RAC, cu considerarea punctului de desprindere, este obiecționabilă din punct de vedere practic, din cauza erorilor care apar la citirea momentului de desprindere.

S-ar putea alege drept criteriu pentru determinarea primei faze a procesului un anumit volum de amestec cuprins de flacără.

Suportul fizic al unui astfel de criteriu îl constituie faptul că turbulența poate acționa pe toată gama de frecvențe numai de la anumite dimensiuni ale frontului de aprindere. Acest criteriu coincide sub aspect fizic cu cel propus în lucrarea [2] cu observația că el trebuie să permită determinarea duratei primei faze pe orice motor.

Dificultatea principală constă în aprecierea volumului cuprins de flacără la sfîrșitul primei faze.

Socolic, Voinov și Sviridov [23] consideră că în prima fază, flacăra cuprinde 15% din volumul total al amestecului.

După cum remarcă A. Radu Cernea [5], acest criteriu i-a condus pe autori la valori absolute ale duratei primei faze mai mari decît cele ale duratei faze principale, ceace apare în discordanță cu totalitatea datelor experimentale citate în literatura tehnică de specialitate.

Unii autori admit că în prima fază a arderii flacăra cuprinde 10% din masa totală a amestecului. Acest criteriu nu este justificat întrucît pe baza lui ar însemna ca în prima fază, flacăra să cuprindă un volum de 20—25% din total ceea ce depășește cu mult chiar și criteriul lui Socolic, Voinov și Sviridov.

S-ar părea că alegerea unei fracțiuni din volumul de amestec cuprins de flacără, este un criteriu mai rațional pentru determinarea duratei fazei inițiale întrucît acțiunea turbulenței la scară mare depinde de dimensiunile frontului de aprindere, care, la rîndul lor, sînt determinate de volumul de amestec. Un astfel de criteriu este lipsit însă de elementul comparativ, deoarece este suficient ca la acelaș motor, să se modifice avansul la declanșarea scînteii, pentru ca aceeași fracțiune din volumul de amestec cuprins de flacără să aibe dimensiuni (de volum) diferite.

Apare astfel mai rațional criteriul de masă, întrucît la variația unor parametri de reglaj pentru un motor dat (avans, dozaj) dimensiunile frontului de aprindere rămîn neschimbate. De aceea noi propunem drept criteriu pentru determinarea duratei fazei inițiale, acea durată necesară pentru ca flacăra să cuprindă 2% din masa amestecului. Pe baza acestui criteriu, ecuațiile stabilite în lucrarea [7] permit determinarea imediată a duratei fazei inițiale.

Prelucrarea unui mare număr de diagrame indicate, a arătat că durata relativă a primei faze, stabilită pe baza criteriului de desprindere a curbelor de presiune, reprezintă 0,25—0,35 din durata totală a propagării, ceea ce coincide satisfăcător, cu durata primei faze, determinată pe baza criteriului propus mai sus.

Considerentele exprimate în lucrarea noastră și interpretările date unor rezultate experimentale și analitice contribuie la o cunoaștere mai profundă a procesului de ardere în motorul cu aprindere prin scînteie, precum și la îmbunătățirea perfomanțelor lui tehnico-economice.

Catedra de cazane și mașini termice

BIBLIOGRAFIE

1. *Aramă C.* — Arderea normală în motorul cu aprindere prin scînteie (I). Revista Metalurgia și construcția de mașini nr. 8, 1961.
2. *Aramă C., Grünwald B., Dudaș Tr., Dănescu Al., Apostolescu N., Manole A.* — Combustibili și lubrifianți pentru motoare. Ed. Tehnică București 1962.
3. *Aramă C., Apostolescu N., Grünwald B., Manole A.* — Contribuția la studiul arderii normale în motorul cu aprindere prin scînteie. Buletinul I.P.B. tom. XXI, fasc. 4, 1959.
4. *Barnet H. C., Hibbard R. R.* — Base considerations in the combustion of hydrocarbon fuels with air — 1957.
5. *Cernea A. R.* — Lucrarea de disertație. Institutul de petrol, gaze și geologie. București — 1963.
6. *Grünwald B.* — O ecuație a propagării flăcărilor turbulente în motorul cu aprindere prin scînteie. Buletinul I.P.B. Tom. XXV fasc. 4, 1963.
7. *Grünwald B* — Influența adîncimii zonei de ardere din flacăra turbulentă asupra procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie. Lucrare de disertație. București 1963.
8. *Heimel S., Weast R.* — Effect of initial mixture temperature on the buning velocity of benzen-air, n heptane-air and isooctane-air mixture-Sixth symposium on combustion, Connectient, 1956.
9. *Hitrin L. N., Golovina E. S.* — XX-e Congrès de Chimie, Paris 1957.
10. *Inozemțev N. V., Koșkin V. K.* — Protessă sgorania v dvigateliah. Maşghiz — 1949.
11. *Kolmogorov A. N.* — Localnia structura turbulentnosti v nesjimaemoi jitcosti pri oceni bolșih cislah Reynoldsa. D.A.N.—SSSR, 1941, T. 30, nr. 4.
12. *Kolmogorov A. N.* — Rasseianie energhii pri localno izotropnoi turbulentnosti. D.A.N.—SSSR, 1941, T. 32, nr. 1.
13. *Manton J., Millikan B. B.* — Proc. Aerotherm Gas. Dyn. Symp. N. W. Univ. Illinois 1956.
14. *Landau L. D., Lifșit E. M.* — Mehanica sploșnih sred. Ed. de stat pentru literatura tehnico-teoretică, Moscova 1953.
15. *Maslenicov M. M., Rapiport M. S.* — Motoare cu piston pentru aviație, vol. I. Ed. Tehnică, București 1953.
16. *Olenhov A. M., Iaglom A. M.* — Microstructura turbulentnovo potoka. Pricladnaia Matematica i mehanica T.XX, vol. 1. Editura Academiei de științe a U.R.S.S., Moscova 1951.
17. *Ricardo H. R.* — The high speed internal-combustion engine (Third edition) London 1944.

18. *Salé B.* — Contribution a l'étude de la combustion normale dans les moteurs a allumage commandé.
Revue de l'Institute Français du Petrole, nr. 6, 7, 8, 9, 1958.
19. *Semenov E. S.* — Issledovanie turbulentnovo dvijenia gaza v usloviah porşnevovo dvigatelia. Gorenie v turbulentom potoke. Ed. Acadeniei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova 1959.
20. *Semenov E. S., Socolic A. S.* — Issledovanie turbulentnosti v ţilindre porşnevovo dvigatelia. Izv. Acad. nauk SSSR, g. 1958, nr. 8.
21. *Semenov E. S.* — Apparatura dlia izmerenia turbulentnosti v porşnevom dvigatele. Jurnal „Pribora i tehnica experimenta „Acad. nauk SSSR, g. 1958, nr. 1.
22. *Smith D., Agnew J. T.* — The effect of pressure on the laminar burning velocity of methano-oxygen-nitrogen mixtures. Sixth symposium combustion, Connectient, 1956.
23. *Socolic A. S., Voinov A. N., Sviridov Iu. B.* — Vlianie himiceschih i turbulentnah factorov na proţess sgorania v dvigateliah. Sgoranie v transportnăh porşnevăh dvigateliah. Ed. Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova 1951.
24. *Socolic A. S.* — Ob experimentalnoi osnove teorii turbulentnovo gorenia. Gorenie v turbulentnom potoke. Editura Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova 1959.
25. *Socolic A. S.* — Samovosplamenenie, plamia i detonaţia v gazah. Editura Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova 1960.
26. *Socolic A. S., Carpov V. P.* — Forcamerno — fakelnoe vosplamenenie cac osnova novovo classa dvigatelei. Moscova 1960.
27. *Summerfield M., Reiter S. H., Kelbely V., Mascole R. W.* — The structure and Propagation Mechanisme of turbulent Flames in Wigh Speed flow. Jet Propulsion, August, 1955, 25 nr. 8, p. 377—384.
28. *Scetnicov E. S.* — O rasciote rasprostranenia plameni v turbulentnom potoke. Editura Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., Moscova, 1959.
29. *Taylor C. F., Taylor E. S.* — The internal combustion engine. Scranton, Pensylvania, 1948.
30. *Wohl K s. a.* — On the Structure of turbulent Flames. 6 the Symposium combustion, Reinhold 1956.

ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗДЕЛЕНИЯ НА ФАЗЫ ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ В ДВИГАТЕЛЕ С ИСКРОВЫМ ЗАЖИГАНИЕМ

(Краткое содержание)

В работе рассматриваются предположения, разработанные различными авторами, относительно фаз процесса горения и выявляются некоторые новые виды процесса. Таким образом, на основе новой модели турбулентного пламени анализируется возможность появления ламинарного пламени в двигателе.

В работе высказаны новые соображения относительно явления, происходящего после сгорания; то, что представляет необыкновенный интерес для улучшения указанного коэффициента полезного действия двигателя с искровым зажиганием.

ON DIVIDING INTO STAGES THE COMBUSTION PROCESS IN THE SPARK IGNITION ENGINE

(Summary)

The paper debates on the hypothesis worked out by various authors on the stages of the combustion process, spotlighting new aspect of the process.

Thus, on the basis of a new turbulent flame pattern, the possibility of laminar flame occurrence in the engine is analysed.

The paper puts forward new considerations on the post-combustion phenomenon, which is of considerable interest for improving the indicated out put of the spark ignition engine.

SUR LA DIVISION PAR PHASES DU PROCESSUS DE COMBUSTION A L'INTÉRIEUR DU MOTEUR A ALLUMAGE PAR ÉTINCELLE

(Résumé)

L'ouvrage met en discussion les hypothèses élaborées par différents auteurs concernant les phases du processus de combustion et fait ressortir certains aspects nouveaux du processus. C'est ainsi que, sur la base d'un nouveau modèle des flammes turbulentes, l'on analyse la posibilité de l'apparition de la flamme laminaire dans le moteur.

Dans l'ouvrage on exprime de nouvelles considérations concernant le phénomène post-combustion, ce que présente un intérêt particulier pour l'amélioration du rendement indiqué du moteur à allumage par étincelle.

IN BEZUG AUF DIE PHASENEINTELUNG DES BRENNPROZESSES IM MOTOR MIT FUNKENZÜNDUNG

(Zusammenfassung)

Der Artikel bespricht die von verschiedenen Autoren ausgearbeiteten Hypothesen in Bezug auf die Phasen des Brennprozesses und hebt einige neue Seiten des Prozesses hervor. Begründet auf ein neues Modell der turbulenten Flammen wird die Möglichkeit der Erscheinung der laminaren Flamme im Motor untersucht.

Im Artikel werden neue Meinungen in Bezug auf das Phänomen der Nachbrennung erläutert, die von besonderem Interresse für die Verbesserung des indiezierten Wirkungsgrades des Motors mit Funkenzündung sind.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 5

ELECTRONICĂ

CONTRIBUȚII LA SINTEZA REȚELELOR ÎN DOMENIUL TIMP

CRISTOFOR VASILIU

1. Introducere.

Pe măsură ce se extind metodele de transmitere a informației prin pulsuri, accentul în problema sintezei rețelelor se deplasează de la sinteza în domeniul frecvență la sinteza în domeniul timp. Această deplasare se datorează și modului nou, generat de teoria semnalelor, de a privi un sistem electric. Sistemul fizic folosit în transmiterea informației nu mai este destinat să reprezinte noțiunea de circuit, privit ca un ansamblu de elemente, ci pe aceia de operație asupra semnalului la intrarea în sistem care să dea semnalul la ieșire. Această deplasare a teoriei circuitelor de la ansamble de elemente la operații asupra semnalelor merge paralel cu deplasarea accentului în reprezentarea semnalelor de la necesitatea de a exprima proprietățile de transmisiune ale unui sistem, la aceia de a exprima atributele purtătoare de informație ale unui semnal.

Problema care se pune la sinteza rețelelor în domeniul timp este următoarea: fiind date funcția (semnalul) $f_i(t)$ la intrarea unui sistem și $f_e(t)$ la ieșirea lui, să se găsească sistemul (rețeaua) care operează această transformare a lui $f_i(t)$ în $f_e(t)$. Bine înțeles că sistemul căutat trebuie să fie realizabil fizic, iar funcțiile $f_i(t)$ și $f_e(t)$ trebuie să îndeplinească anumite condiții, printre care acelea de a fi nule pentru $t < 0$ și de a fi cu pătrat integrabil (de energie finită).

Dacă notăm cu $h(t)$ răspunsul la impulsul unitate al sistemului căutat, atunci $f_e(t) = \int_0^\infty h(\tau) \cdot f_i(t-\tau)\, d\tau$, sau luînd transformatele Laplace ale funcțiilor de timp, $F_e(p) = H(p) \cdot F_i(p)$. $H(p)$ reprezintă atunci funcția de sistem (admitanța la intrare, funcția de transfer, etc.) a rețelei căutate. Funcției de sistem $H(p)$ căutate i se impune condiția de a fi realizabilă fizic. Condiția de realizabilitate fizică poate fi mai largă sau mai restrictivă. Astfel, $H(p)$ poate fi restînsă la a fi realizabilă fizic sub forma unei rețele cu constante concentrate, liniare, pasive, bilaterale și invariabile în timp; sau poate cuprinde și elemente cu constante uniform distribuite; sau, în anumite cazuri, poate cuprinde și anumite elemente active.

Dacă $H(p)$, obținut formal prin raportul transformatelor Laplace $F_e(p)$ și $F_i(p)$ ar îndeplini condițiile de realizabilitate fizică impuse, problema ar fi rezolvată. Dar practic, aceasta nu are loc mai niciodată. Mai întîi fiindcă adeseori $f_i(t)$ și $f_e(t)$ sînt date sub formă grafică (sau chiar prin puncte), iar în al doilea rînd pentru motivul că $H(p)$ obținut, în cazul cînd $f_i(t)$ și $f_e(t)$ sînt date analitic, este o funcție cele mai adeseori transcendentă, care nu îndeplinește condițiile de realizabilitate fizică cerute.

Pentru aceste motive problema pusă are în primul rînd un caracter de aproximare și se descompune în alte două:

1. Fiind date $f_i(t)$ și $f_e(t)$, să se găsească răspunsul $h(t)$ al rețelei căutate la impulsul unitate (în general cu aproximație).

2. Fiind dat răspunsul $h(t)$, să se găsească o expresie aproximativă $h^*(t)$ a acestui răspuns, astfel încît $h^*(t)$ să aproximeze pe $h(t)$ cu un grad de exactitate dorit, iar transformata Laplace $H^*(p)$ a lui $h^*(t)$ să îndeplinească condițiile de realizabilitate impuse. În unele cazuri $f_i(t)$ este impusul unitate, adică $f_e(t) = f_i(t)$, și atunci prima problemă nu se mai pune.

În literatură (/1/, /2/, /3/) prima problemă este rezolvată prin aproximarea derivatei de ordinul p (respectiv q) a semnalului $f_i(t)$ (respectiv $f_e(t)$) cu un șir de impulsuri echidistante, ceeace duce la aproximarea derivatei de ordinul $(q-p)$ a lui $h(t)$ cu un șir de impulsuri, a căror integrare ne dau aproximarea căutată a lui $h(t)$.

În ceeace privește a doua problemă, adică găsirea lui $h^*(t)$ în condițiile arătate, procedeele de rezolvare se împart în două categorii. Prima categorie necesită cunoașterea lui $h(t)$ sub formă analitică. Răspunsul la impulsul unitate $h(t)$ este dezvoltat în serie Fourier în raport cu un sistem $\varphi_n(t)$ de funcții ortogonale, ale căror transformate Laplace $\Phi_n(p)$ sînt direct realizabile fizic, iar aproximarea se face în sensul abaterii patratice minime. Sistemul ortogonal este format din polinoamele trigonometrice /1/, /6/ din polinoamele lui Laguerre /5/, din polinoamele lui Legendre /6/, sau dintr-un sistem ortogonal de forma: $\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} e^{p_i t}$ /7/, /8/. Aceste metode pur analitice au desavantajul că nu pot fi folosite în cazul cînd $h(t)$ este dat sub formă grafică, precum și pe acela al dificultății calculului coeficienților în desvoltarea în serie, din integrala $C_n = \int_0^{\infty} h(t) \cdot \varphi_n(t)\, dt$, dificultate ce este adeseori prohibitivă. Procedeele din a doua categorie pot fi folosite și pentru cazul cînd $h(t)$ e dat sub formă grafică. Unele dintre ele /2/, /3/, constau în a aproxima pe $h(t)$ printr-un șir de impulsuri echidistanțate, adică $h(t) \approx \sum_i h(i \cdot t_0) \cdot \delta(t - i \cdot t_0)$ cu transformata laplace $H(p) = \sum_i h(i \cdot t_0) \cdot e^{-i t_0 p}$. Se alege apoi o fracție rațională potrivită $H^*(p)$. *Atît* $H(p)$ cît și $H^*(p)$ se dezvoltă în serie de puteri și se egalează coeficienții celor două dezvoltări pînă la gradul necesar determinării coeficienților în fracția rațională $H^*(p)$. Un alt procedeu /1/, mai laborios, constă în a aproxima pe

$h^{(2)}(t)$ printr-un șir de impulsuri. Fiecare din aceste impulsuri, cu partea reală a transformatei Fourier $\cos \omega t_0$, este aproximat cu un puls prin limitarea frecvențelor la ω_c. Derivata de ordinul doi a acestei părți reale trunchiate este aproximată, la rîndul ei, tot cu un șir de impulsuri, ceea ce duce, pentru funcția de timp căutată, la o sumă de funcții de forma $\frac{1}{t^2} a_k \cos \omega_k t$. În fine, aproximarea lui $\frac{1}{t^2}$ cu e^{-2t} ne dă pentru $h(t)$ aproximantul $h(t) = \sum_k e^{-2t} a_k \sin \omega_k t$, realizabil fizic. Procedeele aparținînd acestei de a doua categorii nu mai au desavantajul celor pur analitice, în schimb controlul asupra erorii comise e mai greu de efectuat. Mai mult încă, în cazurile [2], [3] și [4] nu putem avea garanția că $H^*(p)$ rezultat este realizabil fizic, deoarece pot apărea poli în semiplanul drept [9].

În prezenta lucrare se dezvoltă un alt procedeu de determinare a răspunsului la impulsul unitate, $h(t)$, atunci cînd $f_i(t)$ și $f_e(t)$ sînt date, precum și o nouă metodă de sinteză a lui $h(t)$ sub forma răspunsului la impulsul unitate a unei rețele realizabile fizic. Ele pot avea, în unele situații, anumite avantaje față de cele cunoscute. În ambele cazuri se dau și exemple concrete de calcul, ilustrative.

2. Determinarea răspunsului la impulsul unitate

Întrucît semnalele folosite în telecomunicații au spectrul de frecvență cu amplitudinea practic neglijabilă dincolo de o anumită frecvență F, aproximarea pe care o vom face va consta în a neglija componentele spectrale ale lui $f_i(t)$ și $f_e(t)$ dincolo de această frecvență. Alegerea lui F va fi dictată de însăși aceste funcții și de gradul de aproximație pe care îl dorim. Pentru un F dat, aproximarea va fi cu atît mai bună cu cît spectrul de frecvențe va scădea mai repede cu frecvența. Pentru o funcție dată, aproximarea va fi cu atît mai bună, cu cît F va fi mai mare.

Semnalele de intrare și ieșire astfel aproximate vor fi de spectru limitat și devi vom putea folosi descompunerea dată de teorema sondajelor, adică

$$f_i(t) = \sum_{\alpha=0}^{n_a} a_\alpha \cdot u_\alpha(t) \; ; \quad f_e(t) = \sum_{\beta=0}^{n_b} b_\beta \cdot u_\beta(t) \text{ și } h(t) = \sum_{\gamma=0}^{n_c} c_\gamma \cdot u_\gamma(t) \qquad (1)$$

unde

$$a_\alpha = f_i(\alpha\tau) \; ; \quad b_\beta = f_e(\beta\tau) \; ; \quad c_\gamma = h(\gamma\tau) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (2)$$

iar

$$u_k(t) = \frac{\sin 2\pi F(t - k\tau)}{2\pi F(t - k\tau)} \; , \quad \text{cu} \quad \tau = \frac{1}{2F} \; . \qquad (3)$$

Însă $f_e(t)$ se obține din convoluția lui $f_i(t)$ cu $h(t)$, adică

$$f_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\theta) \cdot h(t - \theta)\, d\theta \qquad (4)$$

Deoarece $h(t-\theta) = \sum_{\gamma} c_\gamma u_\gamma(t-\theta)$, iar $u_\gamma(x) = u_{-\gamma}(-x)$, [10],

integrala (4) devine

$$f_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\sum_{\alpha} a_\alpha u_\alpha(\theta)] \cdot [\sum_{\gamma} c_\gamma u_{-\gamma}(\theta - t)]\, d\theta \tag{5}$$

și

$$b_\beta = f_e(\beta\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\sum_{\alpha} a_\alpha u_\alpha(\theta)] \cdot [\sum_{\gamma} c_\gamma u_{\beta-\gamma}(\theta)]\, d\theta \tag{6}$$

Însă sistemul de funcții $u_k(t)$ este ortogonal pe întreaga axă reală [10], adică

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_k(t) \cdot u_j(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{ptr} \cdot k \neq j \\ \tau & \text{ptr} \cdot k = j \end{cases} \tag{7}$$

Prin urmare (6) ne dă

$$f_e(\beta\tau) = b_\beta = \tau \cdot \sum_{\alpha=0}^{n_a} a_\alpha \cdot c_{\beta-\alpha} \tag{8}$$

Rezultă că determinarea răspunsului căutat $h(t)$ se reduce la rezolvarea sistemului de ecuații algebrice (8) în raport cu valorile de analiză c_γ, care, înlocuite în ultima egalitate din (1), ne dau pe $h(t)$.

Dacă $f_i(t) = 0$ pentru $t < 0$ și $t > T_a$, iar $f_e(t) = 0$ pentru $t < 0$ și $t > T_b$, atunci $h(t) = 0$ pentru $t > 0$ și $t < T_c$, astfel încît

$$T_b = T_a + T_c \tag{9}$$

relație ce rezultă din (4). Numărul de valori de analiză ale funcțiilor $f_i(t)$, $f_e(t)$ și $h(t)$ vor fi corespunzător, $n_a + 1$, $n_b + 1$, și $n_c + 1$, cu

$$n_a = \frac{T_a}{\tau}\ ;\ n_b = \frac{T_b}{\beta} \text{ și } n_c = \frac{T_c}{\gamma}. \tag{10}$$

Dacă scriem polinoamele următoare

$$P_a(x) = \sum_{i=0}^{n_a} a_i x^i\ ;\ P_b(x) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i x^i \text{ și } P_c(x) = \sum_{i=0}^{n_c} c_i x^i \tag{11}$$

atunci se vede că ecuația

$$P_b(x) = P_a(x) \cdot P_c(x) \tag{12}$$

în care vom egala coeficienții de același grad, duce la sistemul de ecuații (8). Prin urmare, a rezolva sistemul (8) în raport cu valorile c înseamnă a face împărțirea

$$P_c(x) = \frac{P_b(x)}{\tau \cdot P_a(x)} \tag{13}$$

iar coeficienții polinomului $P_c(x)$ obținut ne vor da valorile de analiză c_γ ale funcției $h(t)$ căutate. Pentru ca împărțirea (13) să fie posibilă, trebuie ca $n_b = n_a + n_c$, ceea ce concordă cu (9). Dar numărul de ecuații între coeficienți în (11) este $n_c + 1$, iar numărul de necunoscute este $n_c + 1$, prin urmare un număr de coeficienți în polinomul $P_b(x)$ (valori de analiză în $f_e(t)$) egal cu $n_b + 1 - (n_c + 1) = n_b - n_c = n_a$ nu pot fi impuși, ci vor rezulta din aceste ecuații. Adică funcția la ieșire $f_e(t)$ nu poate fi specificată în totalitate de la început, ci o parte din ea va fi dedusă ulterior. Discuția de aici este analogă cu cea din [1].

O dată valorile de analiză c_γ găsite, răspunsul la impulsul unitate căutat va fi

$$h(t) = \sum_{\gamma=0}^{n_c} c_\gamma \varphi_\gamma(t)$$

pe care îl vom netezi la capete la zero, astfel cu intervalul în care $h(t)$ este diferit de zero să fie cuprins între O și T_c.

Exemplu. Vom ilustra procedeul descris mai sus printr-un exemplu în care vom determina pe $h(t)$ și pe cale analitică, pentru comparație.

Fie

$$\begin{aligned} f_i(t) &= 1 \text{ pentru } 0 \leqslant T \leqslant 1 \text{ și nul în rest} \\ h(t) &= \sin \pi t \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ și nul în rest} \end{aligned} \tag{14}$$

Atunci $f_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\, f_i(t-\theta)\, d\theta = \dfrac{1 - \cos \pi t}{\pi}$ pentru $0 \leqslant t \leqslant 2$

și nul în rest

Luînd transformata Fourier a acestor funcții se găsește, respectiv:

$$\begin{aligned} F_i(j\omega) &= e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\sin \dfrac{\omega}{2}}{\dfrac{\omega}{2}} \\ H(j\omega) &= e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{2\pi \cdot \cos \dfrac{\omega}{2}}{\pi^2 - \omega^2} \\ F_e(j\omega) &= e^{-j\omega} \cdot \frac{2\pi \cdot \sin \omega}{\omega(\pi^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Funcțiile considerate, împreună cu spectrul lor de frecvență, sînt reprezentate în fig. 1. Se verifică ușor că $F_e(j\omega) = F_i(j\omega) \cdot H(j\omega)$.

Să presupunem acum că $f_i(t)$ și $f_e(t)$ sînt date și vrem să găsim pe $h(t)$. Vom neglija spectrul acestor funcții dincolo de frecvența unghiulară $\omega = 4\pi$, adică vom lua $F = 2$ și deci $\tau = \dfrac{1}{4}$.

Se vede că

$$T_a = 1 \text{ și } T_b = 2, \text{ deci } T_c = 1$$

și că

$$n_a = 4 \text{ și } n_b = 8, \text{ deci } n_c = 4 \tag{16}$$

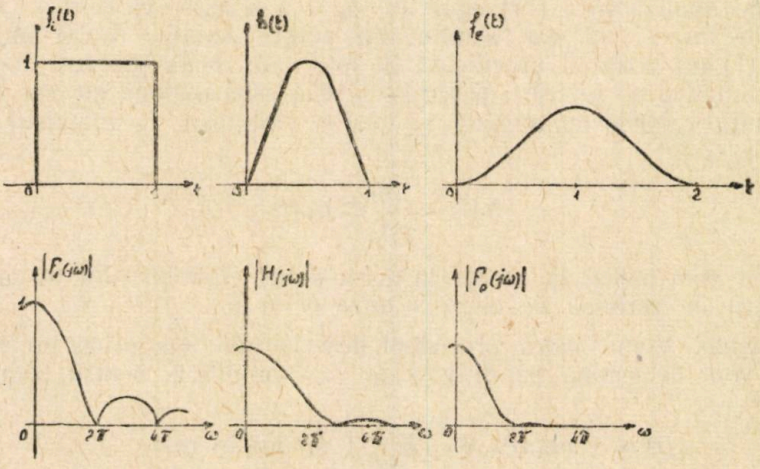


Fig. 1

Conform celor discutate mai sus, vom folosi numai 5 din valorile b_β, celelalte rămînînd a fi determinate. Avem atunci

$$a_0 = \frac{1^{(*)}}{2}, \; a_1 = 1, \; a_2 = 1, \; a_3 = 1, \; a_4 = \frac{1^{(*)}}{2}$$

și

$$b_0 = 0; \; b_1 = 0{,}93; \; b_2 = 0{,}318; \; b_3 = 0{,}545; \; b_4 = 0{,}637 \tag{18}$$

Efectuînd calculele indicate în relația (13) găsim valorile din tabelul 1

Tabela 1

Valori de analiză	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	b_5	b_6	b_7	b_8
Exacte	0,000	0,707	1,000	0,707	0,000	0,545	0,318	0,093	0,000
Aproximate	0,000	0,744	1,056	0,760	— 0,024	0,542	0,360	0,089	— 0,012

Se vede că eroarea în punctele de sondare, raportată la valoarea maximă a funcției, este mai mică de 6%, deși semnalul $f_i(t)$ este departe de a putea fi considerat cu spectrul limitat, iar numărul de puncte de sondare este mic (frecvența de limitare, F, mică).

(*) Limitînd spectrul, $f_i(t)$ este aproximată într-un punct de discontinuitate t_0 cu valoarea $1/2 \lim_{\varepsilon \to 0} [f_i(t_0 + \varepsilon) + f_i(t_0 - \varepsilon)]$.

Dacă am considera pe $f_e(t)$ impus în întregime, ar urma că $u_a = 4$, $n_b = 12$ și deci $n_c = 8 \cdot a_\alpha$ rămîn aceiași, iar b_β impuși sînt:

$$b_\beta = 0\ ;\ 0{,}093\ ;\ 0{,}318\ ;\ 0{,}545\ ;\ 0{,}637\ ;\ 0{,}545\ ;\ 0{,}318\ ;\ 0{,}093\ ;\ 0\ . \qquad (19)$$

Efectuînd calculele, găsim valorile indicate în tabelul 2

Tabela 2

Valori de analiză	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
Exacte	0,000	0,707	1,000	0,707	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Aproximate	0,000	0,774	1,056	0,760	—0,024	0,036	—0,056	0,072	—0,080	—0,011	—0,009	—0,011	—0,010

Eroarea maximă, reportotă la valoarea maximă a fucției $h(t)$, este de același ordin de mărime ca mai sus. Ea se poate micșora, luînl pe F mai mare.

3. Sinteza rețelei ce aproximează răspunsul la impulsul unitate

Deoarece în unele cazuri ne interesează ca $h^*(t)$ să ia anumite valori bine precizate în anumite nomente, ne propunem a aproxima în așa mod pe $h(t)$, încît $h^*(t)$ să treacă prin anumite puncte impuse dinainte, putînd fi totodată și răspunsul la impulsul unitate a unei rețele cu constante concentrate, liniare cu polinoame, utilizată în calculul cu diferențe finite [11]. Problema se pune în felul următor: fiind date valorile funcției căutate în punctele t_0, $t_1 \ldots t_n$, să se găsească polinomul de grad cel mult n care să ia valorile date în aceste puncte. Întrucît însă un polinom nu poate constitui răspunsul la impulsul unitate a unei rețele pasive, vom lua de la început funcția auxiliară $f(t)$ definită de ecuația

$$f(t) = e^{\alpha t} \cdot h(t) \qquad (20)$$

unde α este un număr real ș ipozitiv, și vom face interpolarea acestei funcții $f(t)$ cu ajutorul unui polinom.

Așa dar, fie date valorile $f(t_i)$ ale funcției $f(t)$ în punctele $t_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ și să găsim polinomul de grad cel mult n care ia valorile $f(t_i)$ în aceste puncte. Obținem acest lucru folosind formula de interpolare a lui Lagrange.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(t_i) \cdot \psi(t)}{(t - t_i) \cdot \psi'(t_i)} + \psi(t) \cdot [t\, t_0\, t_1 \ldots t_n] = P_n(t) + R_n(t) \qquad (21)$$

unde

$$\psi(t) = (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n) \qquad (22)$$

iar $[t\, t_0\, t_1 \ldots t_n]$ este diferența divizată de ordinul n a funcției $f(t)$.

Polinomul

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(t_i) \cdot \psi(t)}{(t - t_i) \cdot \psi'(t_i)}$$

este de gradul n și ia valorile $f(t_i)$ în punctele t_i. Restul $R_n(t)$ se mai poate scrie și astfel:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}_{(\xi)}}{(n+1)!} \cdot \psi(t) \tag{23}$$

în care ξ este o valoare a lui t cuprinsă în intervalul de interpolare $t_0 - t_n$.

Se poate folosi și formula lui Newton:

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{k=1}^{n-1} [t_0 t_1 \dots t_k] \cdot (t - t_0)(t - t_1) \dots t - t_{k-1}) + R_n(t) =$$

$$= P_n(t) + R_n(t) \tag{24}$$

în care restul $R_n(t)$ este identic cu cel din formula lui Lagrange, adică polinomul $P_n(t)$ este scris sub altă formă.

$P_n(t)$ este polinomul de interpolare căutat, iar restul $R_n(t)$ ne dă eroarea comisă cînd aproximăm pe $f(t)$ cu $P_n(t)$. Dacă funcția $h(t)$ este dată analitic și posedă derivate pînă la ordinul $n + 1$ inclusiv, expresia (23) permite să găsim o margine superioară a erorii $R_n(t)$. Mai mult, în aceleași condiții și ținînd gradul n al polinomului de interpolare neschimbat, se poate pune problema alegerii punctelor de interpolare $t_0, t_1, \dots, t_n$ în așa fel încît să facem minimă valoarea erorii $R_n(t)$. Aceasta înseamnă a alege punctele de interpolare astfel încît abaterea maximă de la zero a polinomului $\psi(t)$ să fie făcută minimă, cu alte cuvinte $\psi(t)$ să aproximeze pe zero în sensul lui Cebîșev în intervalul de interpolare. Evident că în acest caz $\psi(t)$ va fi polinomul lui Cebîșev de gradul $n + 1$, ale cărui rădăcini se pot calcula ușor, ca să obținem valorile $t_0, t_1, \dots, t_n$.

Calculele se simplifică în cazul cînd punctele de interpolare sînt echidistante. Presupunînd $t_0 = 0$, adică $t_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, atunci polinomul de interpolare ia forma următoare

$$P_n(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{h^k \cdot k!} \cdot t^{(k)}_{h} \tag{25}$$

unde

$$\Delta^k f(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot C^i_k \cdot f(ih) \tag{26}$$

este diferența finită de ordinul k a funcției $f(t)$ în punctul $t = 0$ iar

$$t^{\left(\frac{k}{h}\right)} = t\,(t-h)\,(t-2h)\ldots[t-(k-1)\,h] \tag{27}$$

este puterea generalizată a lui t.

Relația (25) ne permite să calculăm cu ușurință polinomul de interpolare $P_n(t)$. O dată acesta găsit, egalitatea (20) ne dă pe $h^*(t)$, răspunsul realizat ce-l aproximează pe $h(t)$ dat, sub forma

$$h^*(t) = e^{-\alpha t} \cdot P_n(t) \tag{28}$$

Luînd transformata Laplace a lui $h^*(t)$ avem :

$$H^*(p) = \frac{Q(p)}{(p+\alpha)^{n+1}} \tag{29}$$

unde $Q(p)$ este un polinom de grad cel mult n. Se vede imediat că $H^*(p)$ îndeplinește condițiile de realizabilitate fizică, fiind funcția de transfer a unei rețele pasive cu constante concentrate.

Trebuie observat că $h^*(t)$ aproximează pe $h(t)$ numai în intervalul de interpolare $0 \leqslant t \leqslant t_n$, în afara căruia $h(t)$ este presupus egal cu zero. Controlul asupra comportării lui $h(t)$ pentru $t > t_n$ nu-l putem avea decît prin intermediul factorului $e^{-\alpha t}$. Vom alege deci pe α destul de mare astfel ca $h^*(t)$ să fie neglijabil pentru $t > t_n$. S-ar putea însă ca în anumite cazuri mărirea lui α să mărească eroarea $h(t) - h^*(t)$ în intervalul de aproximare $0 \leqslant t \leqslant t_n$. În aceste cazuri alegerea lui α va constitui un compromis între cele două deziderate contradictorii. Dacă într-o

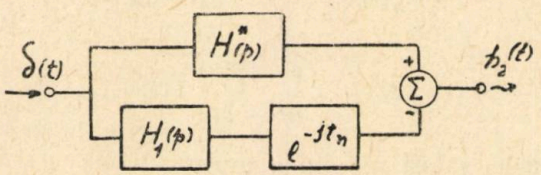


Fig. 2

situație dată acest compromis nu ne poate satisface, dificultatea poate fi înlăturată în felul următor. Fie funcția $h_1(t)$ definită astfel :

$$\begin{aligned} h_1(t) &= 0 \quad \text{pentru} \quad t < 0 \\ h_1(t) &= h^*(t + t_n) \quad \text{pentru} \quad t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Atunci semnalul

$$h_2(t) = h^*(t) - h_1(t - t_n) \tag{31}$$

va fi egal cu $h^*(t)$ în intervalul de interpolare $0 \leqslant t \leqslant t_n$ și nul în rest.

Rămîne să găsim modalitatea de a realiza pe $h_2(t)$ ca răspunsul unei rețele la impulsul unitate. Pentru aceasta să observăm că $h_1(t)$ ia forma

$$h_1(t) = e^{-\alpha t_n} \cdot e^{-\alpha t} \cdot P_n(t + t_n) = e^{-\alpha t_n} \cdot e^{-\alpha t} \cdot S(t) \tag{32}$$

unde $S(t)$ este un polinom de gradul n, adică $h_1(t)$ poate fi realizat ca răspunsul la impulsul unitate a unei rețele pasive cu constante concentrate avînd funcția de transfer $H_1(p)$, transformata Laplace a lui $h_1(t)$. Se vede atunci că $h_2(t)$ căutat va fi răspunsul la impulsul unitate a rețelei din figura 2, unde cuadripolul însemnat cu e^{-pt_n} reprezintă o linie de întîrziere (cuadripol de defazare liniară) avînd timpul de întîrziere egal cu t_n.

Întrucît $h_2(t)$, ce-l aproximează pe $h(t)$ dat, este acum nul pentru $t > t_n$, rezultă că α nu mai este necesar a fi prea mare și deci aproximarea în zona de interpolare nu mai este sensibil influențată de factul $e^{\alpha t}$.

Exemple.

a. Să presupunem că dorim o rețea aí cărei răspuns la impulsul unitate să aibă valoarea 1 în punctul $t = 1$ și valoarea zero în celelalte puncte de sondare ($t = 0, 2, 3, \ldots, n$). Vom avea atunci:

$$f(1) = e^{\alpha} \text{ și } f(i) = 0, \text{ pentru } i = 0, 2, 3 \ldots, n \tag{33}$$

Relația (26) ne va da următoarele diferențe finite ($h = 1$)

$$\begin{gathered} \Delta^1 f(0) = \epsilon^{\alpha} \; ; \quad \Delta^2 f(0) = -2e^{\alpha} \; ; \\ \Delta^3 f(0) = 3e^{\alpha} \; ; \ldots ; \quad \Delta^n f(0) = (-1)^{n-1} e^{\alpha} \end{gathered} \tag{34}$$

iar polinomul de interpolare din relația (25) devine:

$$\begin{aligned} P_n(t) = e^{\alpha} \Big\{ & t - t(t-1) + \\ & + \frac{1}{2!} t(t-1)(t-2) - \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} t(t-1) \ldots [t-(n-1)] \Big\} \end{aligned} \tag{35}$$

Pentru primele valori ale lui n avem:

$$\begin{gathered} P_1(t) = \epsilon^{\alpha} \cdot t \; ; \quad P_2(t) = \epsilon^{\alpha}(2t - t^2) \; ; \quad P_3(t) = \frac{\epsilon^{\alpha}}{2}(6t - 5t^2 + t^3) \\ P_4(t) = \frac{\epsilon^{\alpha}}{6}(24t - 26t^2 + 9t^3 - t^4) \; ; \text{ etc.} \end{gathered} \tag{36}$$

Răspunsul la impulsul unitate căutat vo fi

$$h^*(t) = e^{-\alpha t} \cdot P_n(t) \tag{37}$$

b. Fie $h(t)$, răspunsul ce trebui eaproximat, un triunghiu (fig. 3). Să luăm $n = 4$, $\alpha = 1/2$, $h = 1/4$.

Făcînd calculele indicate în relația (25) se găsește

$$h^*(t) = e^{-0,5 \cdot t} \cdot P_4(t) = e^{-0,5 \cdot t}(26,965\, t^4 - 55,715 \cdot t^3 + 31,147 \cdot t^2 - \\ - 2,464\, t) \qquad (38)$$

Pentru $h_1(t)$, relația (30), obținem

$$h_1(t) = h^*(t+1) = e^{-0,5 \cdot t}(16,35 \cdot t^4 + 31,63 \cdot t^3 + 15,65 \cdot t^2 + 0,331\, t) \qquad (39)$$

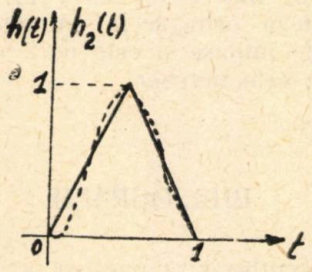


Fig. 3

Răspunsul căutat, $h_2(t) = h^*(t) - h_1(t - t_n)$, egal cu $h^*(t)$ în intervalul $0 \leqslant t \leqslant 1$ și nul în afară, este reprezentat punctat în fig. 3. Se vede că eroarea este destul de mică pentru numărul mic de puncte de interpolare luat.

4. Concluzii

În cele ce preced s-a prezentat, în primul rînd, un alt procedeu de determinare a răspunsului la impulsul unitate al unui sistem, atunci cînd semnalul de intrare și ieșire sînt date. El consistă în a considera semnalul de intrare și ieșire de spectru limitat (în a neglija deci componentele spectrale dincolo de o anumită frecvență) și a le descompune conform teoremei sondajelor. Integrala de convoluție se transformă atunci într-un sistem de ecuații algebrice, iar calculul necunoscutelor se reduce la împărțirea a două polinoame. Procedeul se caracterizează prin următoarele: a. Calculele necesare pentru determinarea aproximativă a răspunsului căutat sînt foarte simple. b. El poate fi folosit indiferent de modul în care sînt specificate semnalele de intrare și ieșire ale sistemului (grafic sau analitic). c. O dată găsite valorile răspunsului căutat în punctele de sondare, acest răspuns poate fi determinat și în oricare alt punct. d. Aproximarea este cu atît mai bună cu cît distanța între două valori de analiză este mai mică (frecvența de limitare F a spectrului este mai mare). O măsură a erorii comise o poate constitui raportul între energia cuprinsă în partea de spectru neglijat ($f > F$) către energia cuprinsă în restul spectrului ($f < F$).

În al doilea rînd s-a prezentat o nouă metodă de sinteză a unei rețele a cărei răspuns la impulsul de unitate este impus. Ea constă în aproxi-

marea funcțiilor prin polinoame folosite în calculul cu diferențe finite. Rețeaua constă fie dintr-un cuadripol pasiv cu constante concentrate, fie din doi cuadripoli pasivi cu constante concentrate și o linie de întîrziere. Metoda este caracterizată prin: a. Calculele pentru determinarea polinomului de aproximare sînt simple. b. Ea se poate folosi indiferent dacă răspunsul impus este dat analitic sau grafic. c. Aproximarea este cu atît mai bună cu cît gradul polinomului folosit este mai mare. Acest lucru rezultă din completitudinea sistemului puterilor lui x în clasa funcțiilor continue pe orice interval finit și închis (11). d. Ea se deosebește de celelalte metode de sinteză prin aceia că răspunsul rețelei sintetizate trece prin anumite puncte impuse și este deci în mod special indicată în cazurile cînd acest lucru este necesar.

BIBLIOGRAFIE

1. *Guillemin E. A.* — Synthesis of passive networks — New York, 1957.
2. *Ba Hli F.* — A general method for time domain network Synthesis. I.R.E. Trans. an Circuit Theory, vol. 1, pp. 21—28; September 1954.
3. *Truxal I. G.* — Numerical analysis for network design. IRE Trans. on Circuit Theory, vol. 1, pp. 49—60; Sept. 1954.
4. *Koceanov N. S.* — O sintese țepi po zadanoi vremenoi karakteristike. Izvestia vîsșih uredniîh zavedenii — Radiotehnica T. 2, nr. 3, p. 321; mai—iuni 1959.
5. *Lee Y. W.* — Synthesis of electrical networks by means of the Fourier transformations of Laguerre's functions. Journal of Math. and Phys., vol. II, pp. 83—113; iune 1932.
6. *Gilbert E. G.* and *Ottermann I.* — The synthesis of liniar filters with real or imaginary transfer functions. Communication and Electronics, Iuly 1960, pp. 323—330.
7. *Kautz W. H.* — Transient Synthesis in the time domain. IRE Trans. on Circuit Theory, vol. 1, pp. 29—39; September 1954.
8. *Gilbert E. G.* — Liniar system approximation by differential analyser simulation of orthonormal approximation functions. IRE Trans. on Electronic Computers, Iune 1959; pp. 204—209.
9. *Brule I. D.* — Comments on an approximation procedure. IRE Trans. on Circuit Theory, vol. 8, March 1961, Correspondance.
10. *Vasiliu C.* — Un procedeu nou de descompunere a semnalelor. Buletinul Institutului Politehnic București, Tomul XXIII — Fascicola IV, 1961; pp. 207—216.
11. *Gelfond A. O.* — Iscislenie Konecinîh raznostei. Gosudarstvennoe izdatelstvo tehniko-teorteticeskoi literaturî, Moskva 1952 Leningrad.

Catedra de telegrafie și telefonie

ВКЛАД К СИНТЕЗУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В ОБЛАСТИ ВРЕМЕНИ

(Краткое содержание)

Излагается метод синтеза в области времени, в форме структуры с концентрированными пассивными постоянными. Предлагаемый метод основывается на интерполяции функции с помощью полиномов, используемой в исчислении конечных разностей.

CONTRIBUTION TO THE TIME DOMAIN NETWORK SYNTHESIS

(Summary)

This paper presents a procedure for the time domain synthesis, in the form of a network with lumped, passive circuit elements. The procedure is based on the interpolation of the functions by polynominals, used in the finite-difference calculus.

CONTRIBUTIONS A LA SYNTHÈSE DES RÈSEAUX DANS LE DOMAINE DU TEMPS

(Résumé)

On présente une méthode de synthèse dans le domaine du temps sous la forme d'un réseau à paramètres constants et passifs. La méthode est basée sur l'interpolation des fonctions par polynomes, utilisée dans le calcul à différence finies.

BEITRÄGE ZUR SYNTHESE DER NETZWERKE IM ZEITBEREICH

(Zusammenfassung)

Es wird ein Verfahren zur Synthese im Zeitbereich unter der Form eines Netzwerkes mit passiven konzentrierten Konstanten dargelegt, das sich auf die Interpolierung von Funktionen durch Polinome stützt, die in der Differenzrechnung verwendet wird.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 5

ELECTROTEHNICĂ

REACTANȚELE MAȘINII SINCRONE ÎN TEORIA COMPONENTELOR SIMETRICE

EUGEN POTOLEA

Se știe că studiul regimurilor de funcționare a rețelelor electrice trifazate întîmpină dificultăți dacă se utilizează așa numitul sistem de coordonate al fazelor, (a, b, c.), în care procesele electromagnetice sînt descrise pentru fiecare fază a, b, c, a instalației. Dificultatea principală provine din faptul că între circuitele de fază ale rețelei există întotdeauna inductivități și capacități mutuale a căror determinare este dificilă și care duc la complicarea ecuațiilor de funcționare. Din această cauză calculul regimurilor simetrice sau nesimetrice ale rețelelor trifazate nu se face în mod obișnuit în sistemul de coordonate a, b, c, ci într-unul din sistemele 1, 2, 0, din teoria componentelor simetrice sau d, q. 0, din teoria celor două reacțiuni.

Sistemul de coordonate 1, 2, 0 prezintă avantaje în special la studiul rețelelor simetrice din punct de vedere al impedanțelor și admitanțelor așa cum sînt liniile, transformatoarele și unii consumatori. Ecuațiile de funcționare ale rețelei simetrice, căreia i se aplică un sistem de tensiuni nesimetrice, rezultă deosebit de simple, iar parametrii caracteristici ai rețelei și anume impedanțele și admitanțele de succesiune directă, inversă și homopolară sînt ușor de determinat analitic sau experimental. Se dovedește că sistemul componentelor simetrice este indicat și la studiul regimurilor nesimetrice provocate de apariția unor elemente trifazate nesimetrice (cu impedanțe sau admitanțe proprii nesimetrice). În acest caz ecuațiile de funcționare se complică dat fiind că fiecare element nesimetric al rețelei tifazate impune introducerea unor cuplaje magnetice sau electrice între rețelele fictive de succsiune directă inversă și homopolară.

Sistemul de coordonate d, q 0 prezintă avantaje în special la studiul regimurilor de funcționare ale mașinilor sincrone cu poli înecați sau cu poli aparenți. Ecuațiile de funcționare în regim simetric rezultă relativ simple, iar parametrii caracteristici ai mașinei și anume conductanța și impedanțele operaționale după axele de simetrice d, q ale rotorului au expresii relativ simple și ușor de determinat experimental.

Deoarece sistemele de coordonate 1, 2, 0 și d. q, 0 nu prezintă aceiași comoditate la studiul rețelelor simetrice și la studiul mașinilor sincrone se pune problema de a stabili care dintre cele două sisteme este

mai avantajos pentru a fi utilizat la studiul funcționării în ansamblu al rețelelor electrice în care sînt incluse și mașinile sincrone. În cele ce urmează se va arăta în ce condiții este mai avantajos unul sau altul din sistemele de coordonate și se va insista asupra definirii corecte a parametrilor caracteristici ai mașinei sincrone.

1. *Ecuațiile de funcționare în sistemul de coordonate a, b, c.*

Se consideră mașina sincronă cu poli aparenți și se scriu ecuațiile care rezultă din legea inducției electromagnetice aplicată penrtu fiecare din circuitele electrice ale fazelor (a, b, c), a înfășurării de excitație (e) și ale înfășurărilor amortizoare din axele d și q (ad și aq)

$$\frac{d\Psi_k}{dt} + R_k i_k + u_k = 0 \; ; \; k = a, \; b, \; c, \; e, \; ad, \; aq. \tag{1}$$

în care :

$$\Psi_k = \Sigma L_{kj} i_j \tag{2}$$

Introducînd (2) în (1) se obțin ecuațiile de funcționare în sistemul a, b, c. Rezolvarea sistemului obținut este deosebit de dificilă, datorită faptului că inductanțele proprii și mutuale care intervin în (2) nu sînt constante, ci variază periodic cu poziția rotorului. În cazul mașinei sincrone cu poli înnecați inductanțele proprii și mutuale care afectează numai fazele statorice pot fi considerate constante însă celelalte inductanțe mutuale dintre fazele statorice și înfășurările rotorice rămîn funcțiuni periodice, astfel că rezolvarea sistemului de ecuații rămîne totuși dificilă.

Ecuațiile de funcționare în sistemul a, b, c capătă o formă acceptabilă pentru rezolvare în cazul elementelor simetrice și cu parametri constanți. În acest caz inductanțele proprii ale fazelor sînt constante și egale între ele $L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L$ la fel ca inductanțele mutale dintre faze $L_{ab} = L_{bc} = L_{ca} = L_{ba} = L_{cb} = L_{ac} = M$. Sistemul de ecuații (2) devine :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a &= L i_a + M i_b + M i_c \\ \Psi_b &= M i_a + L i_b + M i_c \\ \Psi_c &= M i_a + M i_b + L i_c \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Introducînd (3) în (1) și considerînd sensul curentului din cazul funcționării în regim de consumator se obțin relațiile :

$$\left.\begin{aligned} (R + pL)\bar{i}_a + pM\bar{i}_b + pM\bar{i}_c &= \bar{u}_a \\ pM\bar{i}_a + (R + pL)\bar{i}_b + pM\bar{i}_b &= \bar{u}_b \\ pM\bar{i} + pM\bar{i}_b + (R + pL)\bar{i}_c &= \bar{u}_c \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

în care s-a notat cu literă barată transformata Laplace a funcțiunii de timp :

$$\bar{\varphi} = \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(t)$$

În cazul cînd se studiază numai regimul permanent relațiile (4) conduc la scrierea relațiilor fazoriale :

$$\left.\begin{aligned} (R + j\omega L)\,\underline{I}_a + j\omega M\,\underline{I}_b + j\omega M\,\underline{I}_c &= \underline{U}_a \\ j\omega M\,\underline{I}_a + (R + j\omega L)\,\underline{I}_b + j\omega M\,\underline{I}_c &= \underline{U}_b \\ j\omega M\,\underline{I}_a + j\omega M\,\underline{I}_b + (R + j\omega L)\,\underline{I}_c &= \underline{U}_c \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Dacă se consideră că tensiunile la borne sînt cunoscute, urmează că pentru determinarea curenților trebuie să se rezolve un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute. Deși sistemul (5) nu prezintă dificultăți în rezolvare, totuși metoda coordonatelor a, b, c nu este utilizată în mod obișnuit, deoarece prin aplicarea componentelor simetrice problema determinării curenților se simplifică și mai mult, nefiind necesară rezolvarea unui sistem de trei ecuații cu 3 necunoscute ci numai rezolvarea separată a trei ecuații cu cîte o necunoscută. Datorită acestui fapt sistemul de coordonate a, b, c nu este recomandabil nici pentru studiul rețelelor simetrice și cu atît mai puțin pentru studiul mașinilor sincrone, care trebuie considerate ca elemente nesimetrice ale rețelei trifazate așa cum se va vedea din cele de mai jos. Se impune prin urmare trecerea la sistemele de coordonate 1, 2, 0 sau d, q, 0.

2. *Relații între sistemele de coordonate 1, 2, 0 și d, q, 0.*

Sînt cunoscute relațiile dintre sistemele de coordonate a, b, c și 1, 2, 0, precum și dintre sistemele de coordonate a, b, c și d, q, 0. Aceste relații vor fi scrise în formă generală introducînd mărimile Φ și φ, care pot fi înlocuite cu oricare din mărimile ce interesează, tensiuni, curenți, fluxuri magnetice.

Relațiile dintre sistemele 1, 2, 0 și a, b, c se scriu considerînd că regimul de funcționare este armonic și permanent.

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{3}(\Phi_a + a\,\Phi_b + a^2\Phi_c) \\ \Phi_2 &= \frac{1}{3}(\Phi_a + a^2\Phi_b + a\,\Phi_c) \\ \Phi_0 &= \frac{1}{3}(\Phi_a + \Phi_b + \Phi_c) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \Phi_a &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_0 \\ \Phi_b &= a^2\Phi_1 + a\,\Phi_2 + \Phi_0 \\ \Phi_c &= a\,\Phi_1 + a^2\Phi_2 + \Phi_0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

în care $a = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Relațiile dintre sistemele d, q, 0 și a, b, c, se scriu pentru valorile instantanee ale mărimilor.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_d &= \frac{2}{3}\left[\varphi_a \cos\theta + \varphi_b \cos(\theta-\varrho) + \varphi_c \cos(\theta+\varrho)\right] \\ \varphi_q &= \frac{2}{3}\left[\varphi_a \sin\theta + \varphi_b \sin(\theta-\varrho) + \varphi_c \sin(\theta+\varrho)\right] \\ \varphi_0 &= \frac{1}{3}(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

sau

$$\left.\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_d \cos\theta + \varphi_q \sin\theta + \varphi_0 \\ \varphi_b &= \varphi_d \cos(\theta-\varrho) + \varphi_q \sin(\theta-\varrho) + \varphi_0 \\ \varphi_c &= \varphi_d \cos(\theta+\varrho) + \varphi_q \sin(\theta+\varrho) + \varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

în care

$$\theta = \omega t \quad \text{și} \quad \varrho = \frac{2\pi}{3}.$$

Pentru a stabili relațiile dintre sistemele de coordonate 1, 2, 0 și d, q, 0 este necesar ca sistemul (7) care exprimă relații între fazorii Φ să fie transformate într-un sistem corespunzător care să exprime relații între valorile instantanee φ. Sistemul de relații (7) va fi scris în cazul regimului permanent sub forma :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_a &= Re\left(\Phi_1 e^{j\alpha_1} + \Phi_2 e^{j\alpha_2} + \Phi_0 e^{j\alpha_0}\right) e^{j\theta} \\ \varphi_b &= Re\left(a^2\Phi_1 e^{j\alpha_1} + a\Phi_2 e^{j\alpha_2} + \Phi_0 e^{j\alpha_0}\right) e^{j\theta} \\ \varphi_c &= Re\left(a\Phi_1 e^{j\alpha_1} + a^2\Phi_2 e^{j\alpha_2} + \Phi_0 e^{j\alpha_0}\right) e^{j\theta} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Introducînd (10) în (8) și făcînd transformările trigonometrice necesare, se obține :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_d &= \Phi_1 \cos\alpha_1 + \Phi_2 \cos(2\theta + \alpha_2) \\ \varphi_q &= -\Phi_1 \sin\alpha_1 + \Phi_2 \sin(2\theta + \alpha_2) \\ \varphi_0 &= \Phi_0 \cos(\theta + \alpha_0) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

în care α_1, α_2 și α_0 sînt defazajele mărimilor φ_1, φ_2, φ_0 în raport cu originea de timp, aleasă deocamdată arbitrar.

3. *Ecuațiile de funcționare în sistemul de coordonate 1, 2, 0.*

Să considerăm un element simetric al rețelei avînd ecuațiile de funcționare (4) în sistemul a, b, c. Pentru a trece la sistemul 1, 2, 0 se aplică transformata Laplace relațiilor (10) și apoi se introduc în (4)

transformatele corespunzătoare de curenți și de tensiuni astfel încît se obține sistemul :

$$\left.\begin{aligned} Z_1(p)\,\bar{i}_1 &= \bar{u}_1 \\ Z_2(p)\,\bar{i}_2 &= \bar{u}_2 \\ Z_0(p)\,\bar{i}_0 &= \bar{u}_0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} Z_1(p) &= R + p\,(L - M) = R + pL_1 \\ Z_2(p) &= R + p\,(L - M) = R + pL_2 \\ Z_0(p) &= R + p\,(L + 2M) = R + pL_0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Sistemul (12), astfel obținut, se rezolvă în mărimi complexe și apoi se păstrează numai partea reală a soluțiilor.

În cazul cînd se urmărește numai studiul regimului permanent sistemul (12) trece într-un sistem de relații fazoriale :

$$\left.\begin{aligned} Z_1\,\underline{I}_1 &= \underline{U}_1 \\ Z_2\,\underline{I}_2 &= \underline{U}_2 \\ Z_3\,\underline{I}_3 &= \underline{U}_3 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

în care $Z_1 = Z_2 = R + j\omega L_1$ și $Z_0 = R + j\omega L_0$ sînt impedanțele rețelelor fictive de succesiune directă, inversă și homopolară.

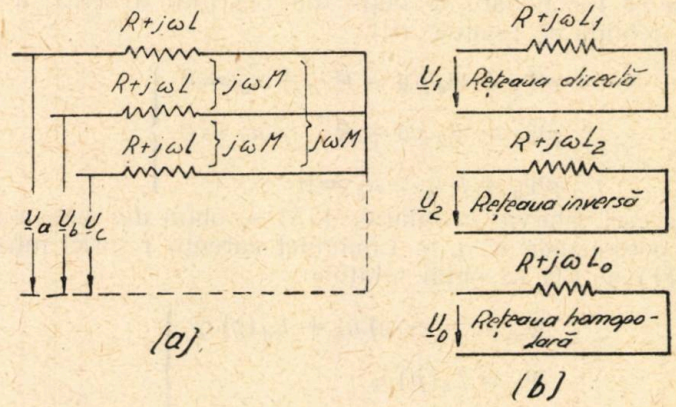


Fig. 1. Înlocuirea rețelei trifazate prin trei rețele fictive de succesiune directă, inversă și homopolară. *a)* Rețeaua trifazată cu cuplaje mutuale ; *b)* Rețelele fictive, fără cuplaje mutuale.

Relațiile (14) arată că rețeaua trifazată simetrică (la care curenții fazelor sînt interdependenți) poate fi înlocuită prin trei rețele independente (Fig. 1) de succesiune directă, inversă și homopolară. Impedanțele care intervin în (14) sînt ușor de determinat analitic pentru linii și experimental pentru transformatoare și consumatori.

Cele trei rețele fictive construite pentru rețeaua trifazată simetrică devin interdependente numai în cazul cînd în rețea apar anumite elemente nesimetrice. În teoria componentelor simetrice se stabilesc cuplajele ce trebuie introduse între rețelele fictive pentru diferite cazuri de nesimetrii și în particular pentru nesimetrii cum sînt scurtcircuitele și întreruperile de de faze.

Avînd în vedere simplitatea calculului în metoda componentelor simetrice se pune problema de a construi rețelele fictive și în cazul mașinilor sincrone. Înainte de a trece la examinarea acestei probleme trebuie observat că ecuațiile de funcționare în sistemul 1, 2, 0 au forma simplă (12) sau (14) numai atunci cînd elementul de rețea este simetric. Numai în acest caz se pot defini impedanțele rețelelor fictive, independente de regimul de funcționare, conform relațiilor (12) sau (14). Se poate face și afirmația reciprocă în sensul că elementul trifazat trebuie considerat simetric numai atunci cînd se pot defini impedanțele rețelelor fictive conform relațiilor (12) sau (14). Se va arăta în cele ce urmează că pentru mașina sincronă cu poli aparenți nu se poate ajunge la relații de forma (12) sau (14) și în consecință mașina sincronă cu poli aparenți trebuie considerată ca un element nesimetric al rețelei trifazate.

4. *Ecuațiile de funcționare în sistemul de coordonate d, q, 0.*

Se consideră mașina sincronă cu poli aparenți idealizată, funcționînd în regim de generator și se aleg sensurile pozitive ale axelor a, b, c, și d, q așa cum se arată în fig. 2.

Ecuațiile de funcționare se obțin din (1) prin trecerea la coordonatele d, q, 0, definite de relațiile (9).

$$\left.\begin{aligned} p\bar{\Psi}_d + \bar{\Psi}_q\, p\theta + R\, i_d + \bar{u}_d = 0 \\ p\Psi_q - \bar{\Psi}_d\, p\theta + R\, \bar{i}_q + \bar{u}_q = 0 \\ p\Psi_0 + R\, \bar{i}_0 + \bar{u}_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Fluxurile cari intervin în relațiile (15) se obțin din sistemul (2) prin trecerea la coordonatele d, q, 0. Eliminînd curenții rotorici între ultimele ecuații din (1) și (2) se obțin relațiile:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Psi}_d = -G(p)\, \bar{u}_e + L_d(p)\, \bar{i}_d \\ \bar{\Psi}_q = L_q(p)\, i_q \\ \Psi = L_0\, i_0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Avantajul esențial al aplicării sistemului de coordonate d, q, 0 la studiul mașinei sincrone constă în faptul că toate inductivitățile care intervin în relațiile (16) au mărimi constante, independente de regimul de funcționare studiat. În consecință se pot defini trei operatori caracteristici ai mașinei sincrone și anume: conductanța operațională $X_d(p) = \omega L_d(p)$ după axa longitudinală a rotorului și reactanța operațională $X_q(p) = \omega L_q(p)$ după axa traneversală a rotorului.

Pentru mașina fără înfășurări de amortizare operatorii caracteristici au expresiile

$$\left.\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{1+pT_e}\,\frac{M_{ed}}{R_e} \\ X_d(p) &= \omega L_d\,\frac{1+pT'_e}{1+pT_e} \\ X_q(p) &= \omega L_q \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

în care inductivitățile M_{ed}, L_d și L_q au semnificațiile cunoscute din teoria celor două reacțiuni, iar T_e și T'_e sînt constantele de timp ale înfășurării de excitație la funcționarea generatorului în gol și în scurtcircuit:

$$T_e = \frac{L_e}{R_e}$$

$$T'_e = \sigma_d T_e = \left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{M_{ed}^2}{L_e L_d}\right) T_e$$

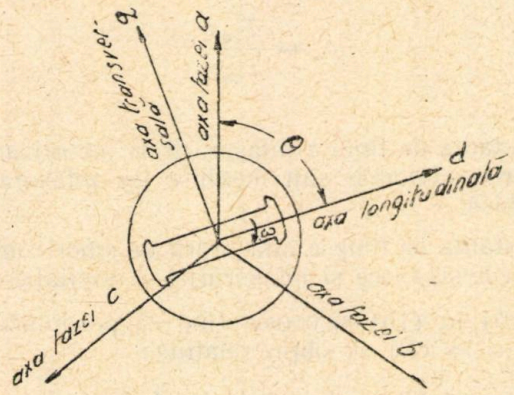


Fig. 2. Alegerea sensurilor pozitive a axelor a, b, c, și d, q pentru mașina sincronă în regim de generator.

Pentru mașina cu două înfășurări de amortizare (a d, și a q) după axele d și q ale rotorului operatorii caracteristici au expresiile:

$$\left.\begin{aligned} G(p) &= \frac{1+pT_e\sigma}{1+p(T_e+T_{ad})+p^2T_eT_{ad}\sigma_a}\,\frac{M_{ed}}{R_e} \\ X_d(p) &= \omega L_d\,\frac{1+p(T'_e+T'_{ad})+p^2T'_eT'_{ad}\sigma'_a}{1+p(T_e+T_{ad})+p^2T_eT_{ad}\sigma_a} \\ X_q(p) &= \omega L_q\,\frac{1+pT'_{aq}}{1+pT_{aq}} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

în care T_{ad}, T_{aq} și T'_{ad}, T'_{aq} sînt constantele de timp ale înfășurărilor de amortizare la funcționarea mașinei în gol și în scurtcircuit cu înfășurarea de excitație deschisă.

$$T_{ad} = \frac{L_{ad}}{R_{ad}}\ ;\quad T'_{ad} = \sigma'_d T_{ad} = \left(1 - \frac{3}{2}\ \frac{M^2_{ad}}{L_d L_{ad}}\right) T_{ad}$$

$$T_{aq} = \frac{L_{aq}}{R_{aq}}\ ;\quad T'_{aq} = \sigma_q T_{aq} = \left(1 - \frac{3}{2}\ \frac{M^2_{aq}}{L_q L_{aq}}\right) T_{aq}$$

Coeficienții de scăpări σ, σ'_a și σ_a care intervin în relațiile (18) au expresiile:

$$\sigma = 1 - \frac{M_{e\,ad} \cdot M_{d\,ad}}{M_{ed}\ L_{ad}}$$

$$\sigma'_a = \frac{T''_{ad}}{T'_{ad}}$$

$$\sigma_a = \frac{T'''_{ad}}{T_{ad}}$$

în care

T''_{ad} — este constanta de timp a înfășurării de amortizare *ad* atunci cînd înfășurările statorice sînt deschise iar înfășurarea de excitație este închisă.

T'''_{aa} — este constanta de timp a înfășurării de amortizare *ad* atunci cînd înfășurările statorice și înfășurările de excitație sînt închise.

Introducînd (16) în (15) și considerînd că pendulările rotorului sînt neglijabile ($p\theta = \omega = ct.$) se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} &-p\,G(p)\,\bar{u}_e + [R + pL_d(p)]\,\bar{i}_d + \omega\,L_q(p)\,\bar{i}_q + \bar{u}_d = 0 \\ &-\omega\,G(p)\,\bar{u}_e - \omega\,L_d(p)\,\bar{i}_d + [R + pL_q(p)]\,\bar{i}_q + \bar{u}_q = 0 \\ &(R + pL_0)\,\bar{i}_0 + \bar{u}_0 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Sistemul (19) este format din 3 ecuații cu șase necunoscute $\bar{i}_d, \bar{i}_q, \bar{i}_0$ și $\bar{u}_d, \bar{u}_q, \bar{u}_0$. Pentru aflarea soluțiilor este necesar să se completeze sistemul (19) cu ecuațiile de funcționare ale consumatorului pe care debitează generatorul sau să se facă unele ipoteze asupra variației curenților sau tensiunilor.

Ecuațiile de funcționare ale consumatorului în sistemul d, q, 0 se obțin din (15) considerînd $p\,\theta = 0$. Fluxurile Ψ_d și Ψ_q se obțin introducînd relațiile (9) în relația corespunzătoare unei faze a consumatorului simetric.

$$\Psi_a = L\,i_a + M(i_b + i_c) \tag{20}$$

Scriind egalitatea dintre coeficienții lui cos θ și sin θ din relația (2) se obține :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_d &= (L - M)\, i_d = L_1\, i_d \\ \Psi_q &= (L - M)\, i_q = L_1\, i_q \\ \Psi_0 &= (L + LM)\, i_0 = L_0\, i_0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Aplicînd transformata Laplace relațiilor (21) și introducînd în (15) rezultă ecuațiile de funcționare ale consumatorului :

$$\left.\begin{aligned} (R + p\, L_1)\, \bar{i}_d &= \bar{u}_d \\ (R + p\, L_1)\, \bar{i}_q &= \bar{u}_q \\ (R + p\, L_0)\, \bar{i}_0 &= \bar{u}_0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

În cazul regimului armonic permanent și simetric relațiile (22) capătă forma :

$$\left.\begin{aligned} (R + j\omega L_1)\, I_d &= U_d \\ (R + j\omega L_1)\, I_q &= U_q \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

în care curenții și tensiunile sînt mărimi constante, date de relațiile

$$\left.\begin{aligned} I_d &= I_1 \cos \alpha_1 \quad ; \quad U_d = U_1 \cos \delta_1 \\ I_q &= -\, I_1 \sin \alpha_1 \, ; \quad U_q = -\, U_1 \sin \delta_1 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Înmulțind cu j ecuația a doua din (23) și scăzînd din prima se obține ecuația cu mărimi complexe :

$$(R + j\omega L_1)\, (I_d - jI_q) = U_d - j\, U_q$$

iar dacă se ține seama de (24) se obține ecuația

$$Z \underline{|\Psi}\ I\ \underline{|\alpha_1} = U_1 \underline{|\delta_1}$$

care este analoagă în prima din relațiile fazoriale (14).

Se constată că ecuațiile de funcționare (22) pentru consumatorul simetric sînt la fel de simple ca și ecuațiile (12) din teoria componentelor simetrice. Totuși utilizarea acestor ecuații la studiul unor nesimetrii cum sînt scurtcircuitele și întreruperile de faze, care intervin în mod curent în rețeaua trifazantă, este dificilă. Dificultatea constă în faptul că relațiile dintre curenți și tensiuni la locul nesimetriei se exprimă prin relații complicate de forma (9) în locul relațiilor simple din sistemele a, b, c și 1, 2, 0.

Încercarea de a studia funcționarea rețelei electrice în ansamblu cu ajutorul sistemului de coordonate d, q, 0 arată că se ajunge la relații complicate și incomode pentru calcul. Dat fiind această situație se pune problema de a încerca studiul rețelei în ansamblu cu ajutorul sistemului de coordonate 1, 2, 0 și în acest scop trebuie stabilite ecuațiile de funcționare ale mașinei sincrone în sistemul 1, 2, 0.

5. *Ecuațiile de funcționare ale mașinei sincrone în regim nesimetric.*

Se va considera regimul permanent nesimetric în care tensiunile la bornele generatorului $\underline{U}_a$, $\underline{U}_b$, $\underline{U}_c$ sînt nesimetrice și se vor descompune aceste tensiuni în trei sisteme trifazate de succesiuni directă, inversă și homopolară, așa cum se arată în fig. 3.

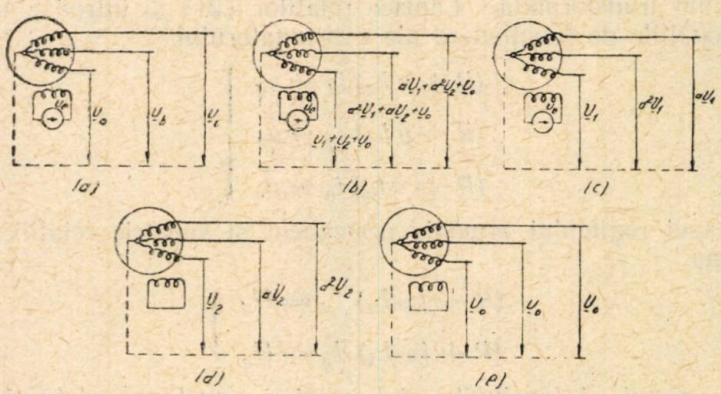


Fig. 3. Funcționarea generatorului în regim nesimetric. a) Schema generatorului cu tensiuni la borne nesimetrice; b) descompunerea tensiunilor nesimetrice în trei sisteme simetrice de succesiune directă, inversă și homopolară; c) schema generatorului cu tensiuni la borne simetrice și de succesiune directă; d) schema generatorului cu înfășurarea de excitație scurtcircuitată și cu tensiuni la borne simetrice și de succesiune inversă; e) schema generatorului cu înfășurarea de excitație scurtcircuitată și cu tensiuni la borne simetrice și de succesiune homopolară.

Circulația de curenți în regim nesimetric se va determina prin suprapunerea efectelor, adică prin suprapunerea circulațiilor de curenți din schemele c, d, și e din fig. 3.Se observă că în schema c acționează numai tensiunile de succesiune directă, precum și tensiunea înfășurării de excitație, iar în schimele d și e acționează numai tensiunile de succesiune inversă respectiv homopolară.

a) Regimul permanent de funcționare cu tensiuni la borne de succesiune directă (schema c) corespunde cu regimul normal de funcționare cînd generatorul debitează pe o sarcină simetrică. Ecuațiile de funcționare se obțin din (19) introducînd condiția $p = 0$, astfel că rezultă:

$$\left.\begin{aligned} R\,\bar{i}_d + X_q\,\bar{i}_q + \bar{u}_d &= 0 \\ X_d\,\bar{i}_d - R\,\bar{i}_q - \bar{u}_q &= \bar{E}_q \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

în care s-a notat cu E_q tensiunea electromotoare indusă în înfășurările statorice:

$$\left. E_q = \omega \frac{M_{ed}}{R_e}\, u_e = \omega\, M_{ed}\, i_e \right\} \tag{26}$$

Deoarece toate mărimile care intervin în (25) sînt constante urmează că se poate trece direct de la transformate la originale:

$$\left.\begin{aligned} R\,\bar{L}_d + X_q\,\bar{L}_q + U_d &= 0 \\ X_d\,\bar{L}_d - R\,\bar{L}_q - U_q &= E_q \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

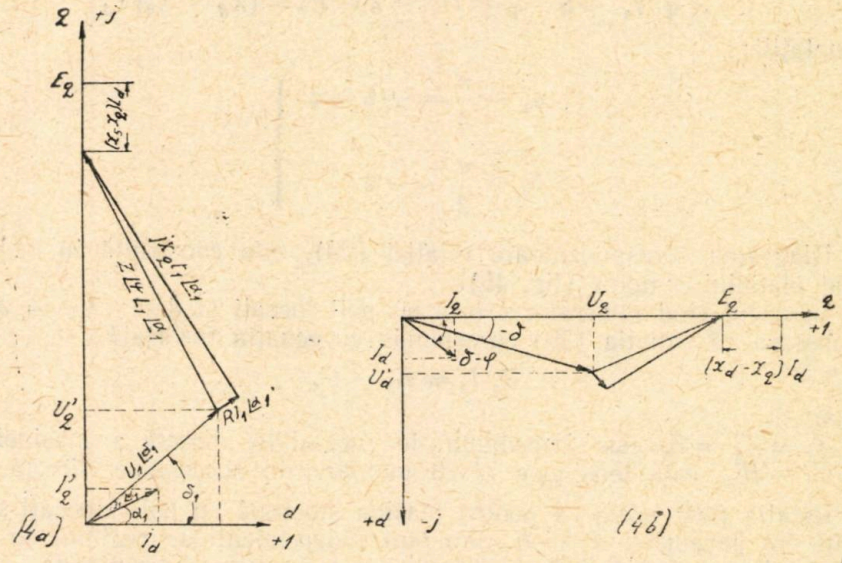


Fig. 4. Diagrama de funcționare a mașinei sincrone în regim permanent simetric (sistemul de coordonate d, q, o).

Înmulțind relația doua cu j și adunînd cu prima se obține o relație cu mărimi complexe:

$$(R + jX_q)(I_d - jI_q) + U_d - jU_q = jE_q - j(X_d - X_q)I_d \tag{28}$$

Deoarece pe baza re-lațiilor (11) se poate scrie în loc de (28):

$$L_q\,|\psi\;\; I_1\,|\alpha_1 + U_1\,|\delta_1 = jE_q - jE_q - j(X_d - X_q)\,I_d \tag{29}$$

rezultă că relația (29) duce la construirea unei diagrame în cadranul I al planului complex din fig. 4, în care s-au introdus notațiile:

$$\left.\begin{aligned} I'_q &= I_1 \sin\alpha_1 = -I_q \\ U'_q &= U_1 \sin\delta_1 = -U_q \end{aligned}\right\}$$

Dacă se urmărește să se scoată în evidență decalajul δ al tensiunii la borne față de tensiunea electromotoare și decalajul φ al curentului față de tensiunea la borne atunci se face o rotație cea $-\frac{\pi}{2}$ a axelor din

fig. 4, ceeace corespunde cu înmulțirea ecuațiilor (28) sau (29) cu —j sau $e^{-j\frac{\pi}{2}}$. Ecuația (29) devine:

$$Z_q \underline{|\psi} \; I_1 \underline{|\alpha_1 - \frac{\pi}{2}} + U_1 \underline{|\delta_1 - \frac{\pi}{2}} = E_q - (X_e - X_q) I_d$$

sau:

$$Z_q \underline{|\psi} \; I_1 \underline{|-\delta-\varphi} + U_1 \underline{|-\delta} = E_q - (X_d - X_q) I_d \qquad (29')$$

cu notațiile:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 - \frac{\pi}{2} &= -\delta - \varphi \\ \delta_1 - \frac{\pi}{2} &= -\delta \end{aligned}\right\}$$

Diagrama corespunzătoare relației (29), este construită în cadranul IV al planului complex (fig. 45).

În cazul cînd generatorul este cu poli înecați și deci $X_d = X_q$ se se observă că ecuația (29) corespunde cu ecuația fazorială:

$$Z_1 \underline{I_1} = \underline{E_1} - \underline{U_1} \qquad (30)$$

în care:

$Z_1 = Z_d = Z_q$ este impedanța de succesiune directă a mașinei.

$E_1 = jE_q$ este tensiunea electromotoare de succesiune directă.

Relația (30) arată că pentru mașina sincronă cu poli înnecați se pot defini doi parametri Z și E care sînt independenți de regimul de funcționare și care pot fi introduși în rețeaua de succesiune directă.

Este ușor de văzut că pentru mașina sincronă cu poli aparenți nu se poate ajunge la o relație fazorială de forma (30) și de aceea nu se pot defini doi parametri Z și E, independent de regimul de funcționare. Dacă în relația (29) se consideră $Z_1 = Z_q$, atunci rezultă că tensiunea electromotoare de succesiune directă variază cu regimul de funcționare, conform relației:

$$E_Q = jE_q - j(X_d - X_q) I_1 \cos \alpha_1 \qquad (31)$$

Dacă în relația (29) se consideră $E_1 = jE_q$ atunci rezultă că impedanța de succesiune directă variază cu regimul de funcționare, conform relației:

$$Z_Q = \frac{jE_q - U_1 \underline{|\delta_1}}{I \underline{|\alpha_1}} = Z_q + j(X_d - X_q) e^{-j\alpha_1} \cos \alpha_1 \qquad (32)$$

Se pot determina două valori extreme ale impedanței Z_Q după cum urmează.

$$\left.\begin{aligned} Z_Q &= Z_d \text{ cînd } \alpha_1 = 0 \text{ și deci } I_q = 0 \\ Z_Q &= Z_q \text{ cînd } \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \text{ și deci } I_d = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Se constată că impedanțele Z_d și Z_q joacă rolul impedanței directe a generatorului numai în două regimuri cu totul particulare. În cazul unui regim oarecare de funcționare impedanțele Z_d și Z_q nu mai reprezintă impedanța directă a mașinii.

Trebuie amintit că la studiul regimurilor de funcționare ale sistemelor electrice se face adesea aproximația că generatorul cu poli aparenți poate fi înlocuit cu un generator cu poli înnecați, iar reactanța directă a acestuia se ia egală cu rectanța transversală. Această aproximație este justificată de faptul că la funcționarea generatorului cu un factor de putere apropiat de factorul nominal termenul al doilea din relația (32) este neglijabil față de primul dacă se ține seama că reactanța satura $X_{d\,sat}$ se apropie de reactanța X_q. Cu aceste aproximații, destul de apropiate de realitate, se poate considera că rectanța directă a generatorului cu poli aparenți este egală cu reactanța din axa transversală: $X_1 = X_q$.

b) Regimul permanent de funcționare cu tensiuni la borne de succesiune inversă (schema d) se studiază cu ajutorul relațiilor (19) în care se introduc condițiile:

$$\left.\begin{aligned} u_o &= 0 \\ u_d &= U_2 \cos(2\omega t + \delta_2) \\ u_q &= U_2 \sin(2\omega t + \delta_2) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Deoarece în cele ce urmează interesează numai posibilitatea de definire a unei reactanțe inverse se va face aproximația că rezistențele înfășurărilor statorice sînt neglijabile astfel că din relațiile (19) se obține:

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}_d &= -\frac{\frac{p}{\omega}\bar{u}_d - \bar{u}_q}{\left(1 + \frac{p^2}{\omega^2}\right) X_d(p)} \\ \bar{i}_q &= -\frac{\bar{u}_d + \frac{p^2}{\omega^2}\bar{u}_q}{\left(1 + \frac{p^2}{\omega^2}\right) X_q(p)} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Se observă că expresiile celor doi curenți sînt de forma:

$$\bar{i}(p) = \varphi_1(p)\,\bar{u}_d + \varphi_2(p)\,\bar{u}_q$$

în care originalele lui $\bar{u}_d$ și $\bar{u}_q$ sînt date de relațiile (34). În aceste condiții originalele curenților sînt date de relația

$$i(t) = Re\left[\varphi_1(2j\omega) - j\,\varphi_2(2j\omega)\right] U_2\, e^{j(2\omega t + \delta_2)} \tag{36}$$

Folosind relația (36) se scriu soluțiile sistemului (35) sub forma:

$$\left.\begin{aligned} i_d &= Re\,\frac{j}{X_d(2j\omega)}\,U_2\,e^{j(2\omega t+\delta_2)} \\ i_q &= Re\,\frac{1}{X_q(2j\omega)}\,U_2\,e^{j(2\omega t+\delta_2)} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Dacă se consideră că mașina nu are înfășurări amortizoare, atunci:

$$\left.\begin{aligned} X_d(2j\omega) &= Z_d\,e^{-j\Psi_d} \\ X_q(2j\omega) &= X_q \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

în care s-a notat

$$\left.\begin{aligned} Z_d &= X_e\sqrt{\frac{1+4\omega^2T_e'^2}{1+4\omega^2T_e^2}} \\ \operatorname{tg}\Psi_d &= \frac{2\omega(T_e-T_e')}{1+4\omega^2T_eT_e'} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Cu aceste notații soluțiile (37) se scriu sub forma:

$$\left.\begin{aligned} i_d &= -\frac{U_2}{Z_d}\sin(2\omega t+\delta_1+\Psi_d) \\ i_q &= \frac{U_2}{X_q}\cos(2\omega t+\delta_2) \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Introducînd soluțiile (40) în (9) se obțin curenții pe faze:

$$\left.\begin{aligned} i_a &= -\frac{U_2}{2Z_d}[\sin(\omega t+\delta_2+\Psi_d)+\sin(3\omega t+\delta_2+\Psi_d)]- \\ &\quad -\frac{U_2}{2X_q}[\sin(\omega t+\delta_2)-\sin(3\omega t+\delta_2)] \\ i_b &= -\frac{U_2}{2Z_d}[\sin(\omega t+\delta_2+\Psi_d+\varrho)+\sin(3\omega t+\delta_2+\Psi_d-\varrho)]- \\ &\quad -\frac{U_2}{2X_q}[\sin(\omega t+\delta_2+\varrho)-\sin(3\omega t+\delta_2-\varrho)] \\ i_c &= -\frac{U_2}{2Z_d}[\sin(\omega t+\delta_2\Psi_d-\varrho)+\sin(3\omega t+\delta_2+\Psi_d+\varrho)]- \\ &\quad -\frac{U_2}{2X_q}[\sin(\omega t+\delta_2-\varrho)-\sin(3\omega t+\delta_2+\varrho)]. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Rezultatul obținut arată că atunci cînd tensiunile la bornele generatorului sînt simetrice și de succesiune inversă, curenții pe faze conțin două componente: una de armonică fundamentală și de succesiune inversă și alta de armonică trei și de succesiune directă

$$\left.\begin{aligned} i_2 &= -\frac{U_2}{2Z_d}\sin(\omega t+\delta_2+\Psi_d)-\frac{U_2}{2X_q}\sin(\omega t+\delta_2)\\ i_1 &= -\frac{U_2}{2Z_d}\sin(3\omega t+\delta_2+\Psi_d)+\frac{U_2}{2X_q}\sin(3\omega t+\delta_2)\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

sau:

$$\left.\begin{aligned} i_2 &= -I_m\left(\frac{e^{j\Psi_d}}{2Z_d}+\frac{1}{2X_q}\right)U_2\,e^{j(\omega t+\delta_2)}\\ i_1 &= -I_m\left(\frac{e^{j\Psi_d}}{2Z_d}-\frac{1}{2X_q}\right)U_2\,e^{j(3\omega t+\delta)}\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Este evident că în aceste condiții definirea unei impedanțe inverse a generatorului se poate face numai dacă se admite aproximația că armonica treia de curent este neglijabilă. Deoarece termenii din paranteza celei de a doua relații din (43) se scad între ei se poate considera că aproximația menționată este acceptabilă și în consecință impedanța inversă a generatorului în cazul regimului studiat rezultă din relația:

$$\frac{1}{Z_2}=\frac{j}{2}\left(\frac{e^{j\Psi_d}}{Z_d}+\frac{1}{X_q}\right)$$

Dacă se urmărește calculul curentului de șoc al regimului tranzitoriu nesimetric, atunci impedanța Z_d capătă valoare particulară care rezultă din (40) punînd condiția $\omega=\infty$.

$$\left.\begin{aligned} Z_d &= X_d\,\frac{T'}{T}\quad \sigma_d X_d = X'_d\\ \Psi_d &= 0\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Se observă că relațiile (44) sînt îndeplinite cu o bună aproximație și în cazul regimului permanent deoarece în relația (40) se poate neglija unitatea față de termenii $4\omega^2 T_e'^2$ și $4\omega^2 T_e^2$. Dat fiind această situație reactanța inversă capătă expresia:

$$X_2=\frac{2X'_d\,X_q}{X'_d+X_p} \tag{45}$$

În regimul nesimetric studiat s-a considerat că tensiunile la bornele generatorului conțin numai armonica fundamentală și a rezultat că în acest caz curenții de pe faze conțin o componentă de armonică trei. Dacă se consideră regimul nesimetric în care curenții de pe faze conțin numai armonica fundamentală, atunci se constată că tensiunile la bor-

nele generatorului conțin componente de armonică trei. Regimul se studiază într-un mod analog ca mai sus și se obțin soluțiile:

$$\left.\begin{aligned} u_d &= -Re\,(j2Z_d\,e^{-j\Psi_d} - jX_q)\,I_2\,e^{j(2\omega t-\varphi_2)} \\ u_q &= Re\,(Z_d\,e^{-j\Psi_d} - 2X_q)\,I_2\,e^{j(2\omega t-\varphi_2)} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Tensiunile de succesiune inversă și directă vor fi:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= I_m\left(\frac{1}{2}Z_d\,e^{-j\Psi_d} + \frac{1}{2}X_q\right)I_2\,e^{j(\omega t-\varphi_2)} \\ u_1 &= I_m\left(\frac{3}{2}Z_d\,e^{-j\Psi_d} - \frac{3}{2}X_q\right)I_2\,e^{j(3\omega t-\varphi_2)} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Impedanța inversă este în acest caz

$$Z_2 = \frac{j}{2}\,(Z_d\,e^{-j\Psi_d} + X_q) \tag{48}$$

sau:

$$X_2 \approx \frac{1}{2}\,(X'_d + X_q) \tag{49}$$

În cele de mai sus s-au considerat două regimuri nesimetrice particulare care au dus la determinarea a două reactanțe distincte de succesiune inversă. Pentru oricare alte regimuri de funcționare în care armonicile de ordinul trei apar atît în tensiuni, cît și în curenți, se obțin alte expresii pentru reactanța inversă, în ipoteza că armonicile sînt neglijabile. Din studiul diferitelor regimuri de funcționare se constată că reactanța inversă este cuprinsă întotdeauna între două limite și anume: media armonică (45) și media aritmetică (19). Dat fiind că pentru generatoarele de construcție obișnuită din sistemele electrice diferența dintre cele două medii nu este mare

$$\left.\begin{aligned} \frac{2X'_dX_q}{X'_d+X_q} &= 0{,}34\,X_d \\ \frac{X'_d+X_q}{2} &= 0{,}41\,X_d \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

se poate lua în calcule o valoare intermediară dată de media geometrică:

$$X_2 = \sqrt{X'_d\,X_q} \tag{51}$$

c) Regimul permanent de funcționare cu tensiuni la borne de succesiune homopolară (schema e) se studiază cu ajutorul ultimei relații din (12) care se scrie sub forma:

$$(R + j\omega L_0)\,\underline{I}_0 + \underline{U}_0 = 0 \tag{52}$$

Relația (52) arată că impedanța homopolară a mașinei sincrone

$$Z_0 = R + jX_0 \tag{53}$$

este definită întotdeauna și este un parametru caracteristic independent de regimul de funcționare.

6. *Concluzii.*

S-a arătat că sistemul 1, 2, 0 este mai avantajos decît sistemul *d, q,* 0 în special atunci cînd se urmărește studiul unor regimuri nesimetrice, provocate de unele elemente nesimetrice din rețeaua trifazată. În aceste cazuri, relațiile dintre curenți și tensiuni la locul nesimetriei se exprimă mult mai simplu în sistemul 1, 2, 0 decît în sistemul *d, q, o.* Pentru aceste motive este justificată încercarea de a aplica sistemul 1, 2, 0 și în cazul mașinei sincrone cu poli aparenți care se studiază în mod obișnuit în sistemul *d, q, o.* În legătură cu posibilitatea de a defini parametrii mașinei sincrone în sistemul 1, 2, 0 se pot trage următoarele concluzii.

a) Pentru mașina sincronă cu poli aparenți impedanțele directe și inverse nu sînt parametrii caracteristici în sensul că aceste impedanțe nu sînt impedanțe independente de regimul de funcționare. Cunoașterea acestor impedanțe fără cunoașterea regimului particular în care au fost definite, nu permite determinarea parametrilor caracteristici ai mașinei cum sînt de exemplu reactanțele X_d și X_q care nu depind de regimul de funcționare (în ipoteza mașinei idealizate cu circuit magnetic nesaturat).

b) Deoarece impedanțele directă și inversă nu pot fi definite ca pentru orice element simetric din rețeaua trifazată rezultă că mașina sincronă cu poli aparenți trebuie considerată ca un element nesimetric al rețelei trifazate.

c) Reactanța directă a mașinei sincrone cu poli aparenți poate fi determinată cu aproximație suficient de bună pentru calculele curente din sistemele electrice dacă se admite că termenul al doilea din relația (32) este neglijabil. În aceste condiții, reactanța directă a generatorului trebuie considerată egală cu reactanța din axa transversală, adică $X_1 = X_q$.

d) Reactanța inversă a mașinei sincrone cu poli aparenți a fost definită în două regimuri particulare în ipoteza că armonicile de ordinul trei de curenți sau de tensiuni sînt neglijabile. Dacă se neglijează aceste armonice rezultă că reactanța inversă variază între două limite restrînse și anume: media aritmetică și media armonică a reactanțelor X'_d și X_q. Se poate admite cu o bună aproximație că reactanța inversă este egală cu media geometrică a reactanților X'_d și X_q, deoarece această medie este cuprinsă între primele două și corespunde unui regim intermediar celor studiate, în care apar armonice de ordinul trei atît în componența curenților, cît și în componența tensiunilor.

Catedra de centrale electrice

РЕАКТАНСЫ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ В ТЕОРИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

(Краткое содержание)

В работе применяется теория симметрических составляющих при изучении синхронных машин и уточняются условия при которых могут быть установлены прямой и обратный реактансы.

Далее указывается, что в явнополюсных машинах эти реактансы находятся в зависимости от режима работы за исключением магнитного насыщения и поэтому их нельзя принимать за характерные машины.

Автор приходит к выводу, что явнополюсную синхронную машину следует рассматривать как симметрический элемент трехфазной сети.

THE REACTANCES OF THE SYNCHRONOUS MACHINE STUDIED BY MEANS OF THE THEORY OF SYMMETRICAL COMPONENTS

(Summary)

The theory of the symmetric components to the study of the syncronous machine is applied and the direct and inverse reactance are specified.

It is shown that for the machine with silent poles these reactances are dependent on the working conditions (leaving aside the magnetic saturation) and therefore they can not be looked upon as the characteristic parameters of the machine.

Conclusion can be drown that the synchronous machine with silent poles must be looked upon as a nonsymetrical element of three-phase network.

LES REACTANCES DES MACHINES SYNCHRONES A POLLIS MILLANTAS

(Résumé)

On applique la théorie des composants simetriques à l'étude des machines synchrones et pour préciser les conditions dans lesquelles on peut déterminer les réactances de succession directe et inverse. On constate que pour la machine à polle saillants les réactance mentionnées sont des grandeurs qui dépendent du régime de fonctionnement. L'auteur montre en conclusion que la machine à polle saillants doit être considérée comme un élément asimetrique des réseaux éléctriques.

DIE REAKTANZEN DER SYNCHRONMASCHINEN IN DER THEORIE DER SYMMETRISCHEN KOMPONENTEN

(Zusammenfassung)

Es werden Synchronmaschinen mittels der Theorie der symmetrischen Komponenten untersucht. Die Bedingungen unter welchen die direkten und umgekehrten Reactenzen definiert werden können, werden festgelegt.

Für Maschinen mit ausgeprägten Poien, wird bemerkt dass diese Reaktanzen von den Betriebsbedingungen abhängig sind (von der magnetischen Sättigung abgesehen), somit nicht als Kanngrössen der Maschine angeschen werden Können.

Die Schlussfolgerung ist, dass die Synchronmaschine als nichtsymmetrisches Glied das Dreiphasennetzes anezusehen ist.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR 1882

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 10735

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 6

NOIEMBRIE — DECEMBRIE

1963

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice: „Buletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul Politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu Redacția și Administrația Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

издаётся в шестых годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXV — FASCICOLA 6

NOIEMBRIE — DECEMBRIE
1963

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; *Prof. C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

SUMAR

MECANICA

D. MANGERON, A. F. ȘESTOPAL. Aplicarea metodelor reflectării și a dezvoltării funcțiilor lui Green în serii de soluții fundamentale în mecanica tehnică a vibrațiilor 13

MATEMATICA

I. M. MIU. Sur une théorème et une généralisation du théorème la moyenne 29

CHIMIE-FIZICĂ

K. GRJOTHEIM, O. HERSTAD, K. JOHANSEN. The Alumino Thermic Reduction of Magnesium Compounds 41

J. BRYNESTAD, K. GRJOTHEIM, J. L. HOLM. Some Problems Connected with the Structure of the Aluminium Electrolysis 57

TEHNOLOGIE-CHIMICA

T. IONESCU, M. FLOREA, F. STOICA, G. TUDORACHE. Recuperarea vanadiului din catalizatori uzați cu ajutorul schimbătorilor de ioni 77

A. IANU, GR. TEODORESCU, C. BEJAN, F. POPESCU, I. NICULESCU, A. M. IANCU. Studiul obținerii cloraților alcalini din materii prime indigene 83

ELECTRONICA

A. SPĂTARU. Evaluarea distorsiunilor și a diafoniei la transmisiunea informației de culoare prin modulație în cuadratură 91
G. BULUCEA. Efect de rezistență negativă la tranzistorul inductiv 101

ELECTROTEHNICĂ

A. TIMOTIN. Asupra dinamicii relativiste a sistemelor de puncte materiale 105

REZISTENȚA MATERIALELOR

I. ZAMFIRESCU. Unele aspecte ale rezistenței țevilor 113

СОДЕРЖАНИЕ

МЕХАНИКА

Д. МАНЖЕРОН, А. Ф. ШЕСТОПАЛ — Применение метода отражений и метода разложения функций Грина в ряды по фундаментальным решениям к задачам технической механики колебаний . . . 13

МАТЕМАТИКА

И. М. МИУ — Об одной теореме и об обобщении теоремы с среднем 29

ХИМИЯ-ФИЗИКА

К. ГРЖОТХЕЙМ, О. ХЕРСТАД, К. ИОХАНСЕН — Алюминиево-термическое восстановление соединения магния 41

Т. БРИНЕСТАД, К. ГРЖОТХЕЙМ, Ж. Л. ХОЛМ — Некоторые вопросы связанные со структурой сплавов используемых при электролизе алюминия . . . 57

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Т. ИОНЕСКУ, М. ФЛОРЕА, Ф СТОЙКА, Г. ТУДОРАКЕ — Извлечение ванадия из переработанных катализаторов сернокислотной промышленности. . 77

А. ЯНУ, ГР. ТЕОДОРЕСКУ, Ч. БЕЖАН, Ф. ПОПЕСКУ, И. НИКУЛЕСКУ, А. М. ЯНУ — Исследование получения щелочных хлоритов из местного сырья . . 83

ЭЛЕКТРОНИКА

А. СПЭТАРУ — Оценка искажений и диафоний в передаче цветной информации квадратурной модуляции 91
Г. БУЛУЧА — Эффект отрицательного сопротивления и индуктивного транзистора 101

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. ТИМОТИН — О релативистной динамике систем материальных точек 105

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

И. ЗАМФИРЕСКУ — Несколько форм сопротивления простой трубы 113

SUMMARY

MECHANICS

D. MANGERON, A. F. SESTOPAL. Application of the Reflexion Method and Green's function Expasions in Series of Fundamental Solution Method in the Oscillation Theory 13

MATHEMATICS

I. M, MIU. On the Theorem and the Generalisation of the Average Theorem 29

CHEMISTRY-PHISICS

K. GRJOTHEIM, O. HERSTAD, K. JOHANSEN. The Alumino Thermic Reduction of Magnesium Compounds 41

J. BRYNESTAD, K, GRJOTHEIM, J. L. HOLM. Some Problems Connected with the Structure of the Bath for the Aluminium Electroysis 57

TECHNOLOGICAL CHEMISTRI

T. IONESCU, M. FLOREA, F. STOICA, G. TUDORACHE. The Recovery of Vanadium from Used Catalysts of the Sulfuric Acid Industry 77

A. IANU, GR. TEODORESCU, C. BEJAN, F. POPESCU, I. NICULESCU, A. M. IANCU. Study of Obtaining Alcaline Chlorites from Native Raw Materials . . 83

ELECTRONICS

A. SPATARU. Valuation of Distorsions and Bross Talk in the Transmissions of Bolour Information, by Quadrature Modulation 91

G Bulucea. Negative Resistance Effect at Inductive Transistor 101

ELECTRICITY

A. TIMOTIN. Of the Relativistic Dynamics of the Systems of Particles 105

STRENGTH OF MATERIALS

I. ZAMFIRESCU. Many Aspects of the Tube Strength 113

SOMMAIRE

MECANIQUE

D. MANGERON, A. F. SESTOPAL. Application des methodes de la reflexion du developpement des fonction de Green en series de solutions fondamentales a l'etude de certains problemes de la mecanique des vibrations 13

MATHEMATIQUE

I. M. MIU. Sur une théorème et une généralisation de la théorème moyenne 29

CHIMIE-PHYSIQUE

K. GRJOTHEIM, O. HERSTAD, K. JOHANSEN. La réduction aluminio-thermique des combinoisons de magnésium 41

J. BRYNESTAD, K. GRJOTHEIM, J. L. HOLM. Certains problèmes concernant la structure des fusions utilisées à l'électrolyse de l'aluminium 57

CHIMIE TECHNOLOGIQUE

T. IONESCU, M. FLOREA, F. STOICA, G. TUDORACHE. La récuperation de vanadium à partir des catalyseus usés de l'industrie de l'acide sulphurique 77

A. IANU, GR. TEODORESCU, C. BEJAN, F. POPESCU, I. NICULESCU, A. M. IANCU. Etude pour obtenir les chlorites alcalines des matieres premières indigènes 83

ELECTRONIQUE

A. SPĂTARU. Evaluation des distorsions et de la diaphonie dans la transmission de l'information de couleur, par modulation en quadrature 91
G. BULUCEA. L'effet de résistance négative du transistor inductif 101

ELECTROTECHNIQUE

A. TIMOTIN. Sur la dynamique relativiste des systemes de points matériels 105

RESISTANCES DES MATERIAUX

I. ZAMFIRESCU. Quelques aspects de la résistance des tubes 113

INHALT

MECHANIK

D. MANGERON, A. F. SESTOPAL. Anwendung der Reflexionsmethode und der Methode der Entwicklung der Gree'nschen Funktionen in Reihen der Fundamentallösungen in der Mechanik der Schwingungen 13

MATHEMATIK

I. M. MIU. Uber einen Satz und die Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes 29

CHEMIE-PHYSIK

K. GRJOTHEIM, O. HERSTAD, K. JOHANSEN. Die alumino-thermische Reduktion der Magnesiumverbindungen 41

J. BRYNESTAD, K. GRJOTHEIM, J. L. HOLM. Einige Fragen in Bezug auf die Struktur der in der Elektrolyse des Aluminiums verwendeten Schmelzen . . 57

TECHNOLOGISCHE CHEMIE

T. IONESCU, M. FLOREA, F. STOICA, G. TUDORACHE. Wiedergewinnung des Vanadiums mit Ionenaustauschen aus verbrauchten Katalysatoren . . 77

A. IANU, GR. TEODORESCU, C. BEJAN, F. POPESCU, I. NICULESCU, A. M. IANCU. Uber die Gewinnung von Alkali-Chlorit aus inländischen Rohstoffen 83

ELEKTRONIK

A. SPĂTARU. Bewertung der Verzerrungen und der Diaphonie bei der Farbinformation-Übertraugung durch Quadratur Modulation 91

G. BULUCEA. Negativer Widerstandseffekt beim induktiven Transistors 101

ELEKTROTECHNIK

A. TIMOTIN. Uber die relativischen Dynamik der Partikelnsysteme 105

FESTIGKEITSLEHRE

I. ZAMFIRESCU. Einige Aspekte der Rohrfestigkeit . 113

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

APLICAREA METODELOR REFLECTĂRII ȘI A DEZVOLTĂRII FUNCȚIILOR LUI GREEN ÎN SERII DE SOLUȚII FUNDAMENTALE ÎN MECANICA TEHNICĂ A VIBRAȚIILOR

D. MANGERON
Institutul politehnic, Iași

și

A. F. ȘESTOPAL
Academia de Științe a R.S.S. Ucraina, Kiev

Introducere

Primul dintre autori, pornind de la o serie de probleme de analiză liniară și neliniară, formulate de el pentru prima oară în legătură cu teoria spectrelor sistemelor diferențiale neeliptice și rezolvate apoi în cadrul schemelor matematice avînd drept prototip *) [1]—[3]

$$(*)\quad [A(x)u' + \lambda B(x)u]' + \lambda [B(x)u' + C(x)u] = 0,$$

$$u|_{FrR} = 0,\ x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

sau

$$(**)\quad D^2 u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_1 x_2 \ldots x_m^2}),$$

în care FrR este frontiera domeniului „dreptunghiular" $R = \{x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}\}$ și simbolul $'$ este simbolul derivatei prime totale în sensul lui Picone [4]

$$u' \equiv Du = \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m},$$

a ajuns la unele rezultate fundamentale interesînd *ecuații polivibrante*, caracterizate prin prezența operatorilor diferențiali de ordin superior de forma [5]

$$(***)\quad L^k \equiv \left(\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \ldots \partial x_m^2} - \frac{\partial^{2m}}{\partial y_1^2 \partial y_2^2 \ldots \partial y_m^2} \right) L^{k-1},\ (k = 1, 2, \ldots).$$

*) Numeroși cercetători de peste hotare, ca, de exemplu, Iu. M. Berezanski [10], E. B. Karpilovskaia [11], F. Manaresi [12], G. Stampacchia, M. Salvadori [13], [14], A. Rosenblatt [15], L. Poli, P. Delerue [16], A. D. Mișkis [17] ș.a. ș.a. au folosit substanțial în lucrările lor rezuitatele obținute în [1]—[3].

Cu acest prilej s-au determinat și studiat numeroase funcții ale lui Green [6], generalizîndu-se unele probleme studiate de alți autori [7]. Rezultatele obținute și în această ordine de idei au constituit izvor de inspirație pentru alți cercetători [8]—[9].

Cel de al doilea autor, studiind sistematic aplicarea principiului reflectării la determinarea dezvoltării funcțiilor lui Green în serii de soluții fundamentale, a elaborat îndeosebi un șir de rezultate relative la operatori diferențiali liniari eliptici, pe cînd ambii autori, lucrînd în colaborare, au reușit să parvină la unele generalizări atît în ceea ce privește conturul domeniului problemelor de contur considerate, cît și natura operatorilor diferențiali luați în studiu [18]—[20].

În prima parte a acestei lucrări rezultatele stabilite anterior se extind asupra cazurilor în care *operatorul-efect de frontieră* depinde și de punctul conjugat, iar în partea a doua metodele elaborate se vor aplica la determinarea spectrelor și a șirurilor de soluții caracteristice interesînd unele probleme de mecanică tehnică a vibrațiilor.

Într-una din lucrările viitoare se vor expune alte extinderi, legate de rezultatele cu totul recente obținute între altele de L. Hörmander [21], G. Fichera [22] ș.a.

Definiții fundamentale

1. Să considerăm într-un spațiu cu n dimensiuni un operator diferențial liniar L cu derivate parțiale de tip eliptic de ordin $2r$ cu coeficienți analitici. Un astfel de operator diferențial posedă o soluție fundamentală, pe care o vom nota cu $\Gamma(P,Q)$, în care prin $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s-a notat un punct curent, iar prin $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots,)$—un punct-izvor.

Fie $u(P,Q)$ — o funcție ce satisface ecuația diferențială

$$L[u] = \delta(P - Q) \tag{1}$$

și este supusă la un număr de condiții de contur pe hiperplanul

$$H_{n-1}: (\vec{x} \cdot \vec{k}^*) = C^*,$$

$\delta(P-Q)$ fiind funcția singulară a lui Dirac.

Presupunem că operatorii L_m ce reprezintă condțiile de contur

$$L_m[u(P,Q)]\big|_{H_{n-1}} = 0, \quad (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{2}$$

sînt liniari, omogeni, de ordin inferior lui $2r$, ansamblul operatorilor de frontieră acoperind [23] operatorul L.

Definiție I. Condițiile de contur (2) din H_{n-1} admit o *reflectare*, dacă pentru orice punct Q

$$u(P,Q) = \Gamma(P,Q) + A\Gamma(P,Q^*), \tag{3}$$

în care A este un operator liniar, permutabil cu operatorul L și cu operatorii L_m, iar Q^* este un punct conjugat cu punctul Q față de H_{n-1}.

Se va presupune că operatorul A depinde de P și Q^*. Operatorul A se numește *operator efect al condițiilor de contur*.

Fie H^1_{n-1} și H^2_{n-1} —hiperplanele din spațiul E_n pentru care avem îndeplinite condițiile de contur

$$L^1_m[u(P,Q)]\Big|_{H^1_{n-1}}=0,\ L_m[u(P,Q)]\Big|_{H^2_{n-1}}=0\ (m=1,2,\ldots,r). \quad (4)$$

Se presupune, pentru a fixa ideile, că condițiile de contur considerate admit pentru H^1_{n-1} o reflectare cu operator efect A_1 și pentru H^2_{n-1} — o reflectare cu operator efect A_2.

Definiție 2. Condițiile de contur din hiperplanele H^1_{n-1} și H^2_{n-1} se zic *ne conexe*, dacă operatorii A_1 și A_2 sînt permutabili, operatorul A_1 este permutabil cu sistemul de operatori de contur L^2_m, iar operatorul A_2 permutabil cu sistemul de operatori de contur L^1_m.

2. *Problemă mixtă.* Să considerăm ecuație diferențială liniară

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial^l}{\partial x_n}\right)=0 \quad (5)$$

cu derivate parțiale, de ordin m în raport cu variabilă t. Presupunem că operatorul diferențial B este astfel încît problema bidimensională a lui Cauchy relativă la ecuația

$$B\left(\frac{\partial u}{\partial t},\ \omega_1\frac{\partial u}{\partial y},\ \ldots,\ \omega_n\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \quad (6)$$

este formulată corect. Atunci pentru ecuația (5) există [24] o soluție fundamentală a problemei lui Cauchy, adică există o funcție $E(P,Q,t)$ care satisface ecuația (5) și condițiile de contur

$$E\Big|_{t=0}=0;\ \frac{\partial^\nu E}{\partial t^\nu}\Big|_{t=0}=\begin{cases}0, & \text{dacă } \nu=1,2,\ldots,m-2,\\ & \text{dacă } \nu=m-1.\end{cases} \quad (7)$$

Se pot introduce definiții cu totul analoge celor deja expuse, corespunzătoare acestui din urmă caz.

3. Probleme de contur pentru operatori diferențiali neeliptici.

Să lărgim întrucîtva noțiunea de soluție fundamentală. Zicem că un operator C posedă o soluție fundamentală $G(P,Q)$, atunci cînd pentru o funcție suficient de regulată și finită $f(P)$ are loc formula

$$C\left[\int_{E_n} G(P,Q)\,f(Q)\,dR\right]=f(P). \quad (8)$$

În corespondență cu definiția (8), soluția fundamentală poate exista și pentru operatori diferențiali ce nu sînt neapărat eliptici. Formulele de dezvoltare relative la funcțiile lui Green vor fi aplicabile și la aceste cazuri.

Dezvoltări în domeniul „dreptunghiurilor" cu n dimensiuni

Presupunem că problema de contur

$$L[F(P,Q)] = \delta(P-Q), \tag{9}$$

$$C_m^i[F(P,Q)]\,|_{x_i=0} = 0, \quad D_m^i[F(P,Q)]\,|_{x_i=a_i} = 0, \tag{10}$$

$$(i=1,2,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots,r),$$

relativă la un operator diferențial eliptic L este univoc solubilă în domeniul „dreptughiular" $R=\{0\leqslant x_1\leqslant a_1,\ldots,0\leqslant x_n\leqslant a_n\}$ și că condițiile de contur relative la hiperplanele $x_j=0, a_j$ admit reflectări cu operatori — efecte ale condițiilor considerate, notați respectiv prin A_j și B_j. Atunci are loc următoarea

Teoremă I. *Dacă condițiile de contur nu sînt conexe pentru toate hiperplanele considerate și dacă seria*

$$F(P,Q)-\Gamma(P,Q)=\sum_{s_1,s_2,\ldots,s_n=-\infty}^{\infty}\ \prod_{j=1}^{n} A_{s_j}^j\,B_{s_j}^j\,\Gamma(P,Q_{s_1,s_2,\ldots,s_n}) \tag{11}$$

este uniform convergentă în domeniul R *împreună cu derivatele sale pînă la ordinul* 2r *inclusiv, atunci funcția* F (P, Q), *determinată prin egalitatea* (11), *este o funcție a lui Green pentru dreptunghiul* R. *În* (11) $A_{s_j}^j$ *și* $B_{s_j}^j$ *sînt operatori, care se determină prin operatorii —efect al condițiilor de contur pe bază de formule*

$$A_{s_j}^i=\prod_{k=1}^{a_{s_j}} A_j\left(P, Q_{s_1,s_2,\ldots,s_{j-1},1-2k-\frac{1-(-1)^{s_j}\operatorname{sign} s_j}{2},s_{j+1},\ldots,s_n}\right),$$

$$B_{s_j}^i=\prod_{k=1}^{b_{s_1}} B_j\left(P, Q_{s_1,s_2,\ldots,s_{j-1},2k-\frac{1-(-1)^{s_j}\operatorname{sign} s_j}{2},s_{j+1},\ldots,s_n}\right), \tag{12}$$

în care

$$a_{s_j}=\frac{1}{2}\left\{|s_j|-\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_j}]\operatorname{sign} s_j\right\},$$

$$b_{s_j}=\frac{1}{2}\left\{|s_j|+\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_j}]\operatorname{sign} s_j\right\}. \tag{13}$$

$$\operatorname{sign} s_j=\frac{|s_j|}{s_j},\quad \operatorname{sign} 0=1,$$

$Q_{s_1,s_2,\ldots,s_n}$ *este constituit din sistemul de puncte conjugate de coordonate*

$$\xi_j^*=s_j\,a_j+\frac{1}{2}[1-(-1)^{s_j}]\,\zeta_j. \tag{14}$$

Demonstrație. Prin ipoteză formulată în teoremă, funcția $F(P, Q)$ satisface ecuația (9) și posedă în punctul $Q(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ singularitate caracteristică cerută. Alte singularități funcția $F(P, Q)$ nu le poate avea în domeniul R, deoarece toate punctele conjugate sînt situate în afara domeniului R dacă nu dispar simultan și s_j. Rămîne prin urmare de demonstrat că $F(P, Q)$ satisface condițiile de contur prescrise. Printr-o verificare directă se stabilește șirul de egalități

$$a_{-s_j} = b_{s_j}, \quad a_{s_j+1} = b_{s_j}, \quad b_{s_j+1} = a_{s_j} + 1. \tag{15}$$

Să arătăm acum că dependențele similare au loc și pentru operatorii A_{s_j} și $B^i_{s_j}$. În adevăr, pentru $s_i \geqslant 0$ avem

$$B^i_{-s_i-1} = \prod_{k=1}^{b_{-s_i-1}} B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, 2k - \frac{1-(-1)^{-s_i-1} \operatorname{sign}(-s_i-1)}{2}, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) = \tag{16}$$

$$= \prod_{k=1}^{b_{s_i}} B_i\left(P, Q_{s_1, s_2 \ldots, s_{i-1}, 2k - \frac{1-(-1)^{s_i} \operatorname{sign} s_i}{2}, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) = B^i_{s_i};$$

$$A_{-s_i-1} = \prod_{k=1}^{a_{-s_i-1}} A_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, 1-2k - \frac{1-(-1)^{-s_i-1} \operatorname{sign} s_i}{2}, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) = \tag{17}$$

$$= A^i_{s_i} A_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i-1, s_{i-1}, \ldots, s_n}\right); \quad B^i_{-1} = A^i_0 = I.$$

În mod analog se stabilește și șirul de relații

$$B^i_{s_i+1} = B^i_{-s_i} B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right), \quad s_i \geqslant 1,$$
$$A^i_{s_i+1} = A^i_{-s_i}, \; s_i \geqslant 1, \; B^i_1 = B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right), \; A^i_1 = I, \tag{18}$$

în care I este operatorul identitate.

Plecînd de la formulele (16), (17) și (18), funcția $F(P, Q)$ poate fi prezentată sub forma

$$F(P, Q) = \sum_{s_m \neq s_i}^{\infty} \prod_{j \neq i=1}^{n} A^i_{s_j} B^i_{s_j} \sum_{s_j=1}^{\infty} A^i_{s_i} B^i_{s_i} \left[\Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}\right) + \right.$$

$$\left. + A_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) \Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, \; s_i-1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right)\right],$$

sau

$$F(P, Q) = \sum_{s_m \neq s_i}^{\infty} \prod_{j \neq i=1}^{n} A^i_{s_j} B^i_{s_j} \sum_{s_i=0}^{\infty} A^i_{-s_i} B^i_{-s_i} \left[\Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right] + \right. \tag{20}$$

$$\left. = B_i\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots, s_n}\right) \Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1} \ldots, s_n}\right)\right].$$

Deoarece punctele $Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}$ au drept puncte conjugate față de hiperplanul $x_i = 0$ punctele $Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i-1, s_{i+1}, \ldots, s_n}$, iar punctele $Q_{s_1, s_2 \ldots, s_{i-1}, -s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n}$ au drept puncte conjugate față de hiperplanul punctele $Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1}, \ldots, s_n}$, rezultă

$$C_m^i \left[\Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_n}\right) + A_i \Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i-1, s_{i+1} \ldots, s_n}\right)\right]\Big|_{x_i=0} = 0,$$

$$D_m^i \left[\Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, -s_i, s_{i+1} \ldots, s_n}\right) + B_i \Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i+1, s_{i+1} \ldots, s_n}\right)\right]\Big|_{x_i=a_i} = 0. \tag{21}$$

Afirmația din teoremă rezultă acum din ansamblul condițiilor relative la ne conexiune.

Dezvoltări în alte domenii

Metoda reflectării conduce la acoperirea univocă a unui plan euclidian numai în cazul dreptunghiurilor, triunghiurilor dreptunghice isoscele, triunghiurilor echilaterale și a triunghiurilor ce se obțin din triunghiuri echilaterale prin subdivizarea acestora în două părți egale. Să considerăm aici problema dezvoltării funcțiilor lui Green după soluții fundamentale luînd drept domenii de bază triunghiuri echilaterale și triunghiuri ce se obțin prin subdivizarea în două părți egale a acestora din urmă.

Dezvoltări în cazul triunghiurilor echilaterale

Dacă domeniul de bază al problemei de contur considerate este constituit dintr-un triunghi echilateral, funcția lui Green corespunzătoare poate fi dezvoltată în serie de soluții fundamentale în cazul cînd operatorii —efect nu depind de punctul conjugat și coincid pentru toate laturile triunghiului. Are loc

Teorema 2. *Dacă condițiile de contur corespunzătoare dreptelor* $x_2 = 0$, $x_2 = x_1\sqrt{3}$, $x_1 + x_2\sqrt{3} = a\sqrt{3}$ *admit reflectare cu unul și același operator-efect* A (P, Q) *și dacă seria*

$$F(P, Q) = \sum_{s_1, s_2=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{5} A_{s_1, s_2}^{a_i} \Gamma\left(P, Q_{s_1, s_2}^i\right) \tag{22}$$

este uniform convergentă împreună cu derivatele sale pînă la ordin 2r *inclusiv pentru toate punctele domeniului de bază în afară de punctul* Q, *atunci* $F(P, Q)$ *este funcția lui Green relativă la operatorul eliptic* L.

În (22)

$$a^i_{s_1, s_2} = 1 - \frac{1}{2}[1 + (-1)^i] \operatorname{sign}(s_1 - s_2)(s_2 + 2s_1)(2s_2 + s_1 - 1),$$

$$Q^i_{s_1, s_2} = \left\{ \frac{3a}{2}(s_1 - s_2) + \xi_i, \frac{a\sqrt{3}}{2}(s_2 - s_1) + \eta_i \right\}, \quad Q(\xi_1, \xi_2) \equiv Q(\xi, \eta),$$

$$\xi_5 = \xi_0 = \xi, \quad \xi_1 = \xi_4 = \frac{\eta\sqrt{3} - \xi}{2}, \quad \xi_2 = \xi_3 = -\frac{\xi + \eta\sqrt{3}}{2},$$

$$\eta_0 = -\eta_5 = \eta, \quad \eta_1 = -\eta_4 = -\frac{\xi\sqrt{3} + \eta}{2}, \quad \eta_2 = -\eta_3 = \frac{\xi\sqrt{3} - \eta}{2},$$

Demonstrație. Este evident că funcția $F(P, Q)$ satisface ecuația diferențială considerată. Să arătăm că $F(P, Q)$ satisface condițiile de contur. Ne vom mărgini, ținînd seamă de analogiile ce intervin, la a demonstra cele cerute pentru dreapta $x_2 = 0$. Pentru celelalte drepte demonstrația este practic identică, de îndată ce se execută o rotire a sistemului de coordonate, respectiv de unghiul $\frac{\pi}{3}$ și $\frac{2\pi}{3}$.

Să reprezentăm funcția $F(P, Q)$ sub forma

$$F(P, Q) = \sum_{s_1, s_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1 s_2}} \Gamma(P, Q^i_{s_1, s_2}) + A^{a^i_{s_2 s_1}} \Gamma(P, Q^i_{s_2, s_1}) + \sum_{s_1 = -\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1 s_1}} \Gamma(P, Q^i_{s_1, s_1}), \tag{24}$$

în care sumarea se extinde în prima sumă la toți indicii pentru care $(s_1, s_2) \neq (s_2, s_1)$. Dacă cea din urmă sumă din (24) se transcrie acum sub forma

$$\sum_{s_1 = -\infty}^{\infty} [\Gamma(P, Q^0_{s_1, s_1}) + A\Gamma(P, Q^5_{s_1, s_1})] + [A\Gamma(P, Q^1_{s_1, s_1}) + \Gamma(P, Q^4_{s_1, s_1})] + [\Gamma(P, Q^2_{s_1, s_1}) + A\Gamma(P, Q^3_{s_1, s_1})] \tag{25}$$

și se observă faptul că punctele $Q^i_{s_1, s_1}$ au drept puncte conjugate $Q^{5-i}_{s_1, s_1}$ rezultă nemijlocit că suma considerată satisface condițiile de contur de pe dreapta $x_2 = 0$.

Să reprezentăm prima sumă din (25) sub forma

$$\sum_{s_1, s_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{5} A^{a^i_{s_1, s_1}} \Gamma(P, Q^i_{s_1, s_2}) + A^{a^{5-i}_{s_2 s_1}} \Gamma(P, Q^{5-i}_{s_2, s_1}). \tag{26}$$

Ținînd seama de faptul că punctele $Q^i_{s_1, s_2}$ sînt conjugate cu punctele $Q^{5-i}_{s_1, s_2}$ față de dreapta $x_2=0$ și avînd în vedere că are loc egalitatea

$$| a^i_{s_1 s_2} - a^{5-i}_{s_1 s_2} | = 1 ,$$

se conchide că și expresia (26) satisface condițiile de contur impuse.

În vederea aplicațiilor ulterioare formula (22) se poate transcrie sub forma

$$F(P, Q) = \frac{1}{3} \sum_{s_1, s_2=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{6} A^i_{s_1 s} [\Gamma(P, Q^i_{s_1, s_2}) + \Gamma(P, Q^i_{s_1, s_2}) + \Gamma(P', S'^i_{s_1, s_2}) + \Gamma(P', U^i_{s_1, s_2}) + \Gamma(P'', V^i_{s_1, s_2}) + \Gamma(P'', Z^i_{s_1, s_2})] , \tag{27}$$

în care punctele P, $Q^i_{s_1, s_2}$, $R^i_{s_1, s_2}$, P', $S^i_{s_1, s_2}$, $U^i_{s_1, s_2}$, P'', $V^i_{s_1, s_2}$, $Z^i_{s_1, s_2}$ au următoarele coordonate:

$$P(x_1, x_2),\ P'\left(\frac{x_2\sqrt{3}-x_1}{2}, -\frac{x_1\sqrt{3}+x_2}{2}\right),\ P''\left(-\frac{x_1+x_2\sqrt{3}}{2}, \frac{x_1\sqrt{3}-x_2}{2}\right),$$

$$Q^i_{s_1, s_2}(3a s_1 + \xi_i, a\sqrt{3} s_2 + \eta_i),\ R^i_{s_1, s_2}\left(3a s_1 + \frac{3a}{2} + \xi_i, a\sqrt{3} s_2 - \frac{a\sqrt{3}}{2} + \eta_i\right),$$

$$S^i_{s_1, s_2}\left(3a s_1 + \frac{\eta_i\sqrt{3}+\xi_i}{2}, a\sqrt{3} s_2 - \frac{\xi_i\sqrt{3}+\eta_i}{2}\right),$$

$$U^i_{s_1, s_2}\left(3a s_1 - \frac{3a}{2} + \frac{\eta_i\sqrt{3}-\xi_i}{2}, a\sqrt{3} s_2 - \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{\xi_i\sqrt{3}+\eta_i}{2}\right), \tag{28}$$

$$V^i_{s_1, s_2}\left(3a s_i - \frac{\xi_i+\eta_i\sqrt{3}}{2}, a\sqrt{3} s_2 + \frac{\xi_i\sqrt{3}-\eta_i}{2}\right),$$

$$Z^i_{s_1, s_2}\left(3a s_1 + \frac{3a}{2} - \frac{\xi_i+\eta_i\sqrt{3}}{2}, a\sqrt{3} s_2 - \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{\xi_i\sqrt{3}-\eta_i}{2}\right).$$

Problema spectrelor plăcilor triunghiulare

Să studiem acum problema de mecanică tehnică a vibrațiilor relativă la o placă triunghiulară. Schema matematică a problemei constă în determinarea spectrului și a funcțiilor proprii corespunzătoare relative la ecuația diferențială

$$\Delta^2 \Delta^2 w - \lambda^2 w = 0 \tag{29}$$

și la un număr de condiții de contur care corespund cu probleme „bine puse" în sensul lui Hadamard.

În ipoteză, de ex., că placa este cu borduri rezemate articulat, condițiile de contur se reduc la

$$u\Big|_{Fr\,D} = 0, \quad \frac{d^2u}{dn^2}\Big|_{Fr\,D} = 0, \tag{30}$$

în care n este normala la contur și, ca de obicei, prin simbolul $\frac{d}{dn}$ s-a notat prima derivată de direcție după normala n.

Deoarece funcția lui Green corespunzătoare operatorilor diferențiali liniari (29), (30) este o funcție analitică de parametrul λ^2, în afară de un număr enumerabil de puncte situate pe axa reală din planul λ, abscisele punctelor astfel obținute sînt valorile proprii (spectrul) corespunzătoare problemei considerate, iar funcțiile proprii referitoare la spectrul căpătat se determină prin reziduri în aceste puncte.

În condițiile de contur (30) operatorul —efect este egal cu operatorul identitate I, iar soluția fundamentală este dată prin

$$\Gamma(P, Q) = -\frac{1}{4\pi^2}\iint_{E_2} \frac{e^{i\omega_1(\xi - x_1) + i\omega_2(\eta - x_2)}}{(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \lambda^2}\, d\omega_1\, d\omega_2. \tag{31}$$

În consecință, formula (27) conduce la următoarea expresie pentru funcția lui Green

$$\begin{aligned} F(P, Q, \lambda^2) = \frac{1}{12\pi^2} \sum_{s_1, s_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{5} (-1)^j \iint_{E_2} \exp\{i\omega_1(3as_1 + \xi_j - x_1) + \\ + i\omega_2(a\sqrt{3}\, s_2 - \eta_j - x_2)\} + \exp\left\{i\omega_1\left(3as_1 + \frac{3a}{2} + \xi_j - x_1\right) + \right. \\ \left. + i\omega_2\left(a\sqrt{3}\, s_2 - \frac{a\sqrt{3}}{2} + \eta_j - x_2\right)\right\} + \exp\left\{i\omega_1\left(3as_1 + \frac{\eta_j\sqrt{3} - \xi_j}{2} - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{x_2\sqrt{3} - x_1}{2}\right) - i\omega_2\left(a\sqrt{3}\, s_2 - \frac{\xi_j\sqrt{3} + \eta_j}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} + x_2}{2}\right)\right\} + \\ + \exp\left\{i\omega_1\left(3as_1 + \frac{3a}{2} + \frac{\eta_j\sqrt{3} - \xi_j}{2} - \frac{x_1 + x_2\sqrt{3}}{2}\right) + i\omega_2\left(a\sqrt{3}\, s_2 - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{\xi_j\sqrt{3} + \eta_j}{2} + \frac{x_1\sqrt{3} + x_2}{2}\right)\right\} + \exp\left\{i\omega_1\left(3as_1 - \frac{\xi_j + \eta_j\sqrt{3}}{2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{x_1 + x_2\sqrt{3}}{2}\right) + i\omega_2\left(a\sqrt{3}\, s_2 + \frac{\xi_j\sqrt{3} - \eta_j}{2} - \frac{x_1\sqrt{3} - x_2}{2}\right)\right\} + \\ + \exp\left\{i\omega_1\left(3as_1 + \frac{3a}{2} - \frac{\xi_j + \eta_j\sqrt{3}}{2} + \frac{x_1 + x_2\sqrt{3}}{2}\right) + i\omega_2\left(\sqrt{3}\, a\, s_2 - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{\xi_j\sqrt{3} + \eta_j}{2} - \frac{x_1\sqrt{3} - x_2}{2}\right)\right\}\Bigg] \frac{d\omega_1\, d\omega_2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - \lambda^2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Se stabilește nemijlocit că toate condițiile pe care le reclamă aplicarea formulei de sumabilitate a lui Poisson [25] sînt îndeplinite în cazul expresiei (31). Aplicînd formula lui Poisson la (31) și executînd un număr de calcule laborioase, se obține:

$$F(P,Q,\lambda^2)=\frac{4}{9\sqrt{3}a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+\cos k\pi}{\frac{16k^4\pi^4}{9a^4}-\lambda^2}\psi_k^0(x_1x_2)\psi_k^0(\xi,\eta)+$$

$$+\frac{8}{9\sqrt{3}a^2}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(n-k)\pi}{\left(\frac{4n^2\pi^2}{9a^2}+\frac{4k^2\pi^2}{3a^2}\right)^2-\lambda^2}\left[\psi_{kn}^c(x_1,x_2)\psi_{kn}^c(\xi,\eta)+\right. \tag{33}$$

$$\left.+\psi_{kn}^s(x_1,x_2)\psi_{kn}^s(\xi,\eta)\right],$$

în care s-a pus:

$$\psi_k^0(x_1,x_2)=\sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}}x_2-\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_2+x_1\sqrt{3})+\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}-x_2),$$

$$\psi_{kn}^c(x_1,x_2)=\cos\frac{2n\pi}{3a}x_1\sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}}x_2-\cos\frac{n\pi}{3a}(x_2\sqrt{3}-x_1)\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}+$$

$$+x_2)+\cos\frac{n\pi}{3a}(x_1+x_2\sqrt{3})\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}-x_2); \tag{34}$$

$$\psi_{kn}^s(x_1,x_2)=\sin\frac{2n\pi}{3a}x_1\sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}}x_2-\sin\frac{n\pi}{3a}(x_2\sqrt{3}-x_1)\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}+$$

$$+x_2)-\sin\frac{n\pi}{3a}(x_1+x_2\sqrt{3})\sin\frac{n\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}-x_2).$$

Funcțiile $(1+\cos k\pi)\psi_k^0(x_1,x_2)$, $[1+\cos(n-k)\pi]\psi_{kn}^c(x_1,x_2)$, $[1+\cos(n-k)\pi]\psi_{kn}^s(x_1,x_2)$ satisfac condițiile cerute. La valoarea proprie

$$\lambda_k^2=\frac{16k^4\pi^4}{9a^4} \tag{35}$$

corespunde funcția proprie

$$(1+\cos k\pi)\psi_k^0(x_1,x_2), \tag{36}$$

iar la valoarea proprie

$$\lambda_{kn}^2=\left(\frac{4n^2\pi^2}{9a^2}+\frac{4k^2\pi^2}{3a^2}\right)^2 \tag{37}$$

corespund funcțiile proprii de două forme

$$[1+\cos(n-k)\pi]\psi_{kn}^c(x_1,x_2)\text{ și }[1+\cos(n-k)\pi]\psi_{kn}^s(x_1,x_2). \tag{38}$$

Dezvoltarea funcției lui Green în domeniul triunghiular, ce se obține prin împărțirea în două părți egale a unui triunghi echilateral

Presupunem că domeniul fundamental este constituit dintr-un triunghi, mărginit de dreptele

$$x_2 = 0,\ x_2 = x_1\sqrt{3} \quad \text{și} \quad x_1 = \frac{a}{2}.$$

În ipoteza condițiilor de contur similare cu (30), fie A — operatorul—efect al condițiilor de contur de pe dreptele $x_2=0$, $x_2=x_1\sqrt{3}$ și C — operatorul —efect al condițiilor de contur de pe dreapta $x_1=\frac{a}{2}$. Dacă operatorii - efect nu depind de punctele conjugate și sînt permutabile, sînt îndeplinite toate condițile teoremei 1**). Are loc în consecință următoarea

Teoremă 3. *Funcția lui Green $G(P, Q)$ relativă la un triunghi ce se obține prin subdivizarea unui triunghi echilateral în două părți egale are forma*

$$G(P, Q) = F(P, Q) + C\,F(P, Q^*), \tag{39}$$

în care $F(P, Q)$ *este definită prin intermediul formulei* (22), *iar punctul* Q^* *are coordonatele* $Q^*\{a-\xi, \eta\}$.

Mecanica vibrațiilor plăcilor triunghiulare ce se obțin prin subdivizarea triunghiurilor echilaterale în două părți egale

Să studiem oscilațiile proprii ale plăcilor în formă triunghiulară obținute prin subdivizarea triunghiurilor echilaterale în două părți egale. Funcția lui Green corespunzătoare operatorului

$$\Delta^2\Delta^2 - \lambda^2 \tag{40}$$

și condițiilor de contur menționate mai sus (borduri cu reazeme articulate) se determină prin formula

$$G(P, Q, \lambda^2) = F(P, Q, \lambda^2) - F(P, Q^*, \lambda^2). \tag{41}$$

Formula (41) arată că orice pol al funcției $G(P, Q, \lambda^2)$ este totodată și pol al funcției $F(P, Q, \lambda^2)$, afirmația reciprocă nefiind valabilă. Cu alte cuvinte, oscilațiile proprii ale plăcilor de forma considerată trebuie căutate printre

**) Ipotezele în care teorema este valabilă nu reclamă neapărat condițiile de contur (30).

oscilațiile proprii ale plăcilor de formă de triunghi echilateral. Un studiu mai detaliat arată că spectrul corespunzător problemei considerate este dat de

$$\nu_{kn}^2 = \left(\frac{4n^2\pi^2}{9a^2} + \frac{4k^2\pi^2}{3a^2} \right)^2 . \tag{42}$$

Funcțiile proprii ale problemei sînt de două forme:

$$[1+\cos(n-k)\pi]\,[\psi_{kn}^{c}(x_1, x_2) - \psi_{kn}^{c}(a-x_1, x_2)];\ [1+\cos(n-k)\pi]\,[\psi_{kn}^{s}(x_1, x_2) - \\ + \psi_{kn}^{s}(a-x_1, x_2)]\,. \tag{43}$$

Într-una din lucrările viitoare se va studia mecanica vibrațiilor plăcilor corespunzătoare domeniilor pentru care metoda reflectării conduce la acoperiri multiple.

Concluzii

Aplicarea metodelor reflectării și a dezvoltării funcțiilor lui Green în serii de soluții fundamentale în mecanica tehnică a vibrațiilor conduce, în variate probleme concrete, la determinări de spectre și de mulțimi de soluții proprii corespunzătoare, permițînd, acolo unde atare probleme și-au găsit anterior soluții prin folosirea altor metode, confruntări și verificări prețioase. Din această din urmă categorie fac parte de ex., unele probleme relative la vibrația plăcilor, rezolvate cu ajutorul metodei calculului variațional într-un volum recent al lui O. D. Oniașvili [26]. Aici se încadrează și un studiu cu totul recent datorit lui V. V. Bolotin, relativ la determinarea densității oscilațiilor proprii a învelișurilor elastice subțiri [27], iar în legătură cu unele probleme actuale de programare dinamică, studiate de primul dintre autori în [28], trebuie citată problema variației funcțiilor lui Green în lumina programării dinamice, abordată de R. Bellman și H. Osborn în [29].

BIBLIOGRAFIE

1. D. MANGERON, *Sur les solutions par compositions de certains systèmes différentiels d'ordre supérieur*. Bull. Inst. polytechn. Jassy, *2, 1*, 295—303, 1946.
2. D. MANGERON, *Sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. C.r. Acad. Sci., Paris, *204*, 94—96; 544—546; 1022—1024, 1937.
3. D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per le equazioni differenziali non lineari a derivate parizali con caratteristiche reali multiple*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. 6, 18, 5—10, 1932.

4. M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Ann. Sci. Univ. Jassy, I section (Math., Phys., Chimie), *XXVI, 1,* 183—232, 1940.
5. D. MANGERON, *On the Dirichlet's problem concerning partial differential equations of higher order.* Bul. Inst. politehn. Iași, s.n., *3* (7), *3—4,* 49—52, 1957.
6. D. MANGERON, *Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière.* Mathematica, Cluj, *14,* 31—35, 1938.
7. D. MANGERON, *Fonctions de Green d'ordre p dans la théorie des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* Revista științifică, Iași, *XXXII, 1,* 1946.
8. E. de GIORGI, *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy, relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali di tipo parabolico.* Scritti Matematici offerti a Mauro Picone. Bologna, Azzoguidi, 781—787, 1955.
9. Л. Е. КРИВОШЕИН, *Приближенные методы решения обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.* АН Кирг. ССР. Фрунзе, 1962.
10. Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ, *О краевых задачах для общих дифференциальных операторов в частных производных.* ДАН СССР, 122, 8, 959—962, 1958.
11. Э. Б. КАРПИЛОВСКАЯ, *О сходимости метода коллокации.* ДАН СССР, 151, 4, 766—769, 1963.
12. F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, *XXIII,* 163—213, 1954.
13. G. STAMPACCHIA, *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico.* Giorn. di matem. di Battaglini, (4), *78,* 81—96, 1948—49.
14. M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, (2), V, 51—72, 1936.
15. A. ROSENBLATT, *Sur l'application de la méthode des approximations de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples.* C.r. Acad. Sci., Paris, *197,* 1278—1280, 1933.
16. L. POLI, P. DELERUE, *Le calcul symbolique à deux variables et ses applications.* Mémorial des Sci. Math.,*CXXVII,* Gauthier-Villars, Paris, 1954, p. 49—50.
17. А. Д. МЫШКИС, *Исследования по задаче Коши.* УМН, 2[29], 1948.
18. А. Ф. ШЕСТОПАЛ, *Метод отражений и его применение к задачам математической физики.* Analele științ. ale Univ. Iași, s.n., (Sub tipar).

19. А. Ф. ШЕСТОПАЛ, *Разложение функций Грина для прямоугольных областей.* Укр. Мат. Ж., XII, 1, 1961.
20. Д. МАНЖЕРОН, А. Ф. ШЕСТОПАЛ, *Проблема разложения функций Грина линейных дифференциальных операторов и некоторые ее применения к исследованию колебательных процессов.* Mathematica, Cluj, (Sub tipar).
21. L. HÖRMANDER, *Opérateurs différentiels à caractéristiques simples.* Les équations aux dérivées partielles. Colloques internationaux du CNRS, Paris, 1963, 41—46.
22. G. FICHERA, M. PICONE, *Calcolo per il difetto del più basso autovalore di un operatore ellittico del secondo ordine.* Atti Accad. Naz. dei Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., (8), *30*, *4*, 411—418, 1961.
23. M. SCHECHTER, *General boundary value problems for elliptic partial differential equations.* Comm. Pure Appl. Math., *12*, *3*, 457—486, 1959; *12*, *4*, 561—578, 1959.
24. И. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции и действия над ними.* Физматгиз, М., в. 1, 1959.
25. S. BOCHNER, *Lectures on Fourier Integrals.* Princeton University Press, New Jersey, 1959.
26. О. Д. ОНИАШВИЛИ, *Некоторые динамические задачи теории оболочек.* АН СССР, АН Груз. ССР, М., 1957.
27. В. В. БОЛОТИН, *О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек.* ПММ, XXVII, 2, 1963, 362—364.
28. D. MANGERON, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur.* C. r. Acad. Sci., Paris, *255*, 2894—2896, 1962.
29. R. BELLMAN, H. OSBRON, *Dynamic programming and the Variation of Green's Functions.* J. Math. Mech. *72*, 1, 1958.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОТРАЖЕНИЙ И МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА В РЯДЫ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ РЕШЕНИЯМ К ЗАДАЧАМ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ КОЛЕБАНИЙ

(Резюме)

Авторы исходят из ряда собственных работ относящихся к новому классу граничных задач, давших впоследствии повод к исследованиям и других авторов [10]—[17], характеризуемых дифференциальным оператором высшего порядка (***) или же прототипными задачами вида (*), (**) [1]—[3].

Используя метод отражений и метод разложения функций Грина линейных дифференциальных операторов в ряды по фундаментальным

решениям, кристаллизованные в [18] — [20] в ряде задач относящихся к „прямоугольным“ областям n измерений, авторы исследуют в настоящей статье разложения относящиеся к некоторым треугольным областям (формулы (27), (28)). Полученные результаты применяются затем в целях определения спектров и множеств собственных функций относящихся к механике колебаний треугольных пластинок.

Статья заканчивается указаниями на некоторые новые обобщения которые будут изложены в одной из последующих статей.

APPLICATION OF THE REFLEXION METHOD AND OF GREEN'S FUNCTION EXPANSIONS IN SERIES OF FUNDAMETAL SOLUTION METHOD IN THE OSCILLATION THEORY

(Summary)

The authors start from their own research work concerning a new class of boundary value problems [1]—[3]. The essential results they obtained, based on the consideration of partial derivatives differential operators (***) or on the initially formulated problems (*), (**), was continued both by the authors themselves and by many other research workers [10]—[17].

By using the reflexion method and Green's function expansions in series of the fundamental solution method it was obtained a set of results concerning the n — dimensional „rectangular“ domains [18]—[20]. In the present paper the expansions mentioned above are established for a set of triangular domains (formulae (27), (28)) and the corresponding spectral analysis and the determination of autosolutions concerning oscillation mechanics of various triangular plates ave given.

Some extensions indicated at the end are to be presented in one of the next papers.

APPLICATION DES MÉTHODES DE LA REFLEXION ET DU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE GREEN EN SÉRIES DE SOLUTIONS FONDAMENTALES A L'ÉTUDE DE CERTAINS PROBLÈMES DE LA MÉCANIQUE DES VIBRATIONS

(Résumé)

Les auteurs prennent le point de départ d'une série de travaux propres antérieurs relatifs à une nouvelle classe de problèmes à la frontière, dont se sont occupés ensuite nombre d'autres chercheurs [10]—[17], ayant l'opérateur différentiel d'ordre supérieur (***) ou bien les prototypes (*) (**) [1]—[3].

Tout en utilisant la méthode des reflexions et celle du développement des fonctions de Green en séries de solutions fondamentales, cristallisées dans [18]—[20] en ce qui regardent les domaines „rectangulaires" à n dimensions, ils étudient ici les développements ci-dessus concernant certains domaines triangulaires (formules (27), (28)). On les applique ensuite au calcul des spectres et à la détermination des fonctions propres relatifs aux plaques triangulaires correspondantes.

On indique enfin quelques autres extensions qui feront objet de l'un des travaux prochains.

ANWENDUNG DER REFLEXIONSMETHODE UND DER METHODE DER ENTWICKLUNG DER GREEN'SCHEN FUNKTIONEN IN REIHEN DER FUNDAMENTALLÖSUNGEN IN DER SCHWINGUNGEN DER MECHANIK

(Zusammenfassung)

Die Verfasser gehen von einer Reihe eigenen Forschungsarbeiten aus, die einer Klasse neuer Randwertproblemen, deren Prototypen (*), (**), (***) sind, gewidmet ist und deren Resultate von mehreren anderen Forschern erweitert und benützt worden waren [1]—[3], [10]—[17].

In dieser Arbeit sind die Reflexionsmethode und die Methode der Entwicklung der Green'schen Funktionen in Reihen der Fundamentallösungen [18]—[20] zum Studium der obenerwähnten Enwicklungen, die einige trianguläre Gebiete betreffen, angewendet und die Eigenwerte und Eigenfunktionen der triangulären Platten berechnet.

Einige am Ende des Artikels erwähnte Extensionsaufgaben werden in Kürze anderswo erscheinen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

MATEMATICA

SUR UN THÉORÈME ET UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE LA MOYENNE

I. M. MIU

Dans ce qui suit, nous donnerons encore une démonstration d'un théorème établi par nous en [1] et ensuite un théorème plus général. Puis, nous allons généraliser le théorème de la moyenne de Cauchy pour les fonctions d'une et plusieurs variables, et ensuite nous donnerons des applications.

CHAPITRE I

Sur un théorème

Dans [1] nous avons donné et demontré le

§ 1. *Théorème I.*

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) et $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions définies sur $[a, b]$ avec valeurs finies et continues sur (a, b).

Si $f(a)=f(b)=0$, et $\varphi(x)$ n'a aucune racine en $[a, b]$ la fonction $\Phi(x)=\psi(x)f(x)+\varphi(x)f'(x)$ s'annule au moins une fois en (a, b).

De ce théorème nous avons déduit le

Théorème II.

Soit l'équation :

$$f(x)=0 \tag{1}$$

Nous considérons la fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) et $\psi(x)$, $\varphi(x)$, deux fonctions definies sur $[a, b]$ avec valeurs finies et continues sur (a, b). Il résulte que les racines réelles des équations

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x)=\psi(x)f(x)+\varphi(x)f'(x)=0\\ \varphi(x)=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

séparent les racines réelles de l'équation (1) dans l'intervalle $[a, b]$.

Nous avons montré les avantages de ce théorème dans le cas général et dans le cas des équations algébriques.

Par exemple, pour l'équation algébrique :

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

quand elle n'a pas de racines multiples, les degrès n_1 et n_2 des équations (2) peuvent être réduites de telle sorte que

$$n_1 + n_2 = n - 1$$

Dans ce qui suit, nous donnerons une autre démonstration du théorème I.

Supposons que la fonction $f(x)$ s'annule pour $x=a$ et $x=b$ et admettons que ces valeurs soient des racines consécutives simples de cette fonction.

Comme $f(x)$ s'annule pour $x=a$ et $x=b$, et comme $\psi(x)f(x)$ est continue sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ pour ε très petite, il résulte que nous pouvons choisir une valeur $\varepsilon > 0$ suffisamment petite, telle que pour $x = a + \varepsilon < b$ et pour $x = b - \varepsilon > a + \varepsilon$, les nombres $\psi(a+\varepsilon) f(a+\varepsilon) = \eta_1$, $\psi(b-\varepsilon) f(b-\varepsilon) = \eta_2$ en valeur absolue, soient autant petites que nous les voulons.

Comme $x=a$, $x=b$ sont racines consécutives simples de l'équation $f(x)=0$ et comme $\varphi(x)$ ne s'annule pas dans (a, b) il résulte que les valeurs :

$$\Phi(a+\varepsilon) = \eta_1 + \varphi(a+\varepsilon) f'(a+\varepsilon)$$

$$\Phi(b-\varepsilon) = \eta_2 + \varphi(b-\varepsilon) f'(b-\varepsilon)$$

sont de signes contraires, parce que $\varphi(a+\varepsilon)$, $\varphi(b-\varepsilon)$ ont les mêmes signes et $f'(a+\varepsilon)$, $f'(b-\varepsilon)$ ont des signes contraires pour une valeur $\varepsilon > 0$ suffisamment petite.

Il résulte d'ici que $\Phi(x) = \psi(x)f(x) + \varphi(x)f'(x)$ s'annule au moins une fois en (a, b).

Dans le cas des racines multiples, elles peuvent se considérer comme limite des plusieurs racines simples quand elles se confondent.

Quand $x=a$, $x=b$ ne sont pas des racines consécutives de l'équation $f(x) = 0$ le théorème est évident parce que dans ce cas en $[a, b]$ on peut considérer deux racines consécutives de la fonction.

Nous pouvons enoncer un théorème plus général :

*Théoreme I**

Soient les fonctions $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ definies sur l'intervalle $[a, b]$ avec valeurs finies telle que :

1° La fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b).

2° Les fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ sont définies sur $[a, b]$ et continues sur (a, b).

3° Les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ n'ont pas de zéros communs dans $[a, b]$.

Entre deux zéros réels consecutifs de la fonction $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a, b]$ on trouve au moins un zéro réel des fonctions:

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) \text{ et } \varphi(x).$$

Démonstration: Considérons le cas plus général quand $f(x)$ s'annule pour $x \in [a, \alpha]$ et pour $x \in [\beta, b]$, $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ et dans l'intervalle (α, β) la fonction $f(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de x, et $\varphi(x)$ ne s'annule pas dans $[a, b]$.

Pour $\varepsilon > 0$, suffisamment petit, nous approximons la fonction $f(x)$ pour $x = \alpha + \varepsilon$ et $x = \beta - \varepsilon$ par la différentielle:

$$f(\alpha + \varepsilon) \approx f'(\alpha + \varepsilon)\,\varepsilon$$
$$f(\beta - \varepsilon) \approx -f'(\beta - \varepsilon)\,\varepsilon$$

Il en résulte qu'on peut approximer la fonction $\Phi(x)$ au points $x = \alpha + \varepsilon$, $x = \beta - \varepsilon$:

$$\Phi(\alpha + \varepsilon) \approx f'(\alpha + \varepsilon)\,[\varepsilon\psi(\alpha + \varepsilon) + \varphi(\alpha + \varepsilon)] \approx f'(\alpha + \varepsilon)\,\varphi(\alpha + \varepsilon)$$

$$\Phi(\beta - \varepsilon) \approx f'(\beta - \varepsilon)\,[-\varepsilon\psi(\beta - \varepsilon) + \varphi(\beta - \varepsilon)] \approx f'(\beta - \varepsilon)\,\varphi(\beta - \varepsilon).$$

Comme $\varphi(x)$ conserve sur $[a, b]$ le même signe et comme $f'(\alpha + \varepsilon) f'(\beta - \varepsilon) < 0$, il résulte que la fonction $\Phi(x)$ a au moins une racine dans l'intervale (α, β).

De ce qui précede résulte la théoreme énoncé. (Voir aussi notre ouvrage „Sur les zéros réels de certaine fonctions." [1].

CHAPITRE II

La généralisation du théorème de la moyenne

§ 1. *Le cas des fonctions d'une variable*

On connaît le théorème des accroissements finis de Cauchy:

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies sur un intervalle I et $a, b > a$, deux points de I. Si nous avons remplies les conditions suivantes:

1) $f(x)$ et $g(x)$ sont continues sur l'intervalle fermée $[a, b]$,

2) $f(x)$, et $g(x)$ sont des fonctions dérivables sur l'intervalle ouvert (a, b),

3) $g'(x) \neq 0$ pour $x \in (a, b)$, il résulte que $g(a) \neq g(b)$ et il existe un point $c \in (a, b)$ de telle sorte que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{3}$$

Nous nous proposons de généraliser ce théorème.

Soit les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, definies sur l'intervalle I et $a < b$ deux points de I, qui satisfont les conditions suivantes:

1) $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$,

2) $f_1(x)$, $f_3(x)$ et $f_2(x)$ sont fonctions dérivables sur l'intervalle ouvert (a, b).

Considérons la fonction auxiliaire :

$$F(x) = f_1(x) + \alpha f_2(x) + \beta f_3(x) \tag{4}$$

et déterminons les constantes α et β de telle sorte que la fonction $F(x)$ s'annule pour $x=a$ et $x=b$.

On aura :

$$\left.\begin{aligned} F(a) &= f_1(a) + \alpha f_2(a) + \beta f_3(a) = 0 \\ F(b) &= f_1(b) + \alpha f_2(b) + \beta f_3(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Comme la fonction $F(x)$ s'annule pour $x=a$ et $x=b$, nous pouvons lui appliquer le théorème I.

Considérons deux fonctions $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ continues dans l'intervalle fermé $[a, b]$ telle que $\varphi(x)$ ne s'annule pour aucune valeur $x \in [a, b]$

Il résulte de théorème I, que dans l'intervalle (a, b) il éxiste un point c, telle que nous aurons :

$$\psi(c) F(c) + \varphi(c) F'(c) = 0$$

ou

$$\psi(c)[f_1(c) + \alpha f_2(c) + \beta f_3(c)] + \varphi(c)[f_1'(c) + \alpha f_2'(c) + \beta f_3'(c)] = 0 \tag{6}$$

Pour que le système (5) admette des valeurs bien déterminées pour α et β, il faut que nous ayons :

$$\left.\begin{vmatrix} f_2(a) & f_3(a) \\ f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ et } f_1(a), f_2(b)\right\} \tag{7}$$

ne soit pas nulles en même temps.

Le système en α et β formé avec les équations (5) et (6) peut s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} &[\psi(c) f_2(c) + \varphi(c) f_2'(c)]\alpha + [\psi(c) f_3(c) + \varphi(c) f_3'(c)]\beta + \\ &+ \psi(c) f_1(c) + \varphi(c) f_1'(c) = 0 \\ &f_2(a)\alpha + f_3(a)\beta + f_1(a) = 0 \\ &f_2(b)\alpha + f_3(b)\beta + f_1(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Comme il existe un système de valeurs α, β qui vérifie le système (8) il résulte que nous avons :

$$\begin{vmatrix} \psi(c) f_1(c) + \varphi(c) f_1'(c) & \psi(c) f_2(c) + \varphi(c) f_2'(c) & \psi(c) f_3(c) + \varphi(c) f_3'(c) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Comme la fonction $\varphi(x) \neq 0$ pour $x \in [a, b]$, nous divisons la prémière ligne du déterminant par $\varphi(c)$ et posons :

$$\psi(c) : \varphi(c) = \lambda,$$

où λ peut prendre toutes les valeurs réelles.

Alors le déterminant (9) deviendra :

$$\begin{vmatrix} \lambda f_1(c)+f_1'(c) & \lambda f_2(c)+f_2'(c) & \lambda f_3(c)+f_3'(c) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

La formule (10) généralise le théorème des accroissements finis de Cauchy.

Pour établir la formule (10) nous sommes partis de la fonction auxiliaire (4) et nous avons trouvé les conditions (7), mais comme les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ont toutes le même rôle, nous pouvons partir avec une des fonctions auxiliaires :

$$F_1(x) = f_2(x) + \alpha f_1(x) + \beta f_3(x)$$
$$F_2(x) = f_3(x) + \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

et nous trouverons des conditions analogues à (7).

Ainsi, la généralisation du théorème des accroissements finis est donnée par le

Théorème III

Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ trois fonctions définies sur l'intervalle I et a, $b > a$, deux points de I.

Si ces fonctions satisfont aux conditions suivantes :

1°) $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

2°) $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont dérivables sur l'intervalle ouvert (a, b).

3° Il existe un système de valeurs α et β des équations (5) differentes de zéros.

Alors pour chaque valeur $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, existe un point $c \in (a, b)$ de telle sorte qu'on ait la relation :

$$\begin{vmatrix} \lambda f_1(c)+f_1'(c) & \lambda f_2(c)+f_2'(c) & \lambda f_3(c)+f_3'(c) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Observation :

Considérons le cas particulier quand a, b sont les zéros de la fonction $f_1(x)$ et en même temps nous avons :

$$\delta_{23} = \begin{vmatrix} f_2(a) & f_3(a) \\ f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0$$

Il résulte que les deux équations (5) se réduisent à l'équation :

$$\alpha f_2(a) + \beta f_3(a) = 0 \qquad (5')$$

Dans les hypothèses considérées pour les fonctions $\psi(x)$; $\varphi(x)$, il résulte qu'il existe un nombre $c \in (a, b)$ pour lequel nous avons la relation (déduite de 6)) :

$$\lambda[f_1(c)+\alpha f_2(c)+\beta f_3(c)]+f_1'(c)+\alpha f_2'(c)+\beta f_3'(c)=0 \qquad (6')$$

où entre α et β existe la rélation (5′)

Dans l'hypothèse $f_2(a)\neq 0$, $f_3(a)\neq 0$, on élimine β entre (5′) et (6′) et on aura :

$$\lambda\left[f_1(c)+\alpha f_2(c)-\alpha\frac{f_3(c)f_2(a)}{f_3(a)}\right]+f_1'(c)+\alpha f_2'(c)-\alpha\frac{f_3'(c)f_2(a)}{f_3(a)}=0$$

En considérant aussi $\alpha f_1(x)$ comme une fonction avec les mêmes propriétés que $f(x)$, on peut prendre $\alpha=1$ et il résulte le

Théorème

Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, trois fonctions définies sur l'intervalle I et a, $b>a$, deux zéros de la fonction $f_1(x)$ situées en I.

Si ces fonctions satisfont aux conditions suivantes :

1°) $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont continues sur $[a, b]$

2°) $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont derivables sur (a, b).

3°) $\delta_{23}=0$, $f_2(a)\neq 0$, $f_3(a)\neq 0$.

Il résulte qu'entre deux zéros a, b de la fonction $f_1(x)$, il existe un nombre c telle qu'on aura :

$$\lambda[f_1(c)f_3(a)+f_2(c)f_3(a)-f_2(a)f_3(c)]+f_1'(c)f_3(a)+ f_2'(c)f_3(a)-f_2(a)f_3'(c)=0 \qquad (11)$$

pour chaque $\lambda\in(-\infty,+\infty)$.

§ 2. *Diverses applications aux fonctions d'une variable.*

I. Si nous particularisons le théorème III, en faisant $\lambda=0$, $f_3(x)=1$, on obtient le théorème de la moyenne de Cauchy.

Une condition du théorème III, dans ce cas est : Pour toutes les valeurs de $x\in(a, b)$ il faut que $f_2'(x)\neq 0$ ou $f_1'(x)\neq 0$ selon que la forme finale de la formule a au dénominateur $f_2'(c)$ ou $f_1'(c)$.

II. Si dans le théorème III nous faisons : $\lambda=0$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=1$, on aura la formule de la moyenne de Lagrange.

III. Pour $\lambda=0$ en (10), on aura une généralisation plus restreinte :

$$\begin{vmatrix} f_1'(c) & f_2'(c) & f_3'(c) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix}=0 \qquad (12)$$

IV. Si nous résolvons par rapport à λ la relation (10) il résulte :

Etant données trois fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, qui sont assujetties aux conditions du théorème III, il existe un ensemble de valeurs M des c inclus en (a, b), telle que pour toutes les valeurs de $c \in M$ le rapport :

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \\ f_1'(c) & f_2'(c) & f_3'(c) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \\ f_1(c) & f_2(c) & f_3(c) \end{vmatrix} \tag{13}$$

prenne toutes les valeurs réelles.

V. Si dans le théorème III nous faisons $f_3(x) = 1$, il résulte que, étant données deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, assujetties aux conditions de ce théroème, on aura :

$$\begin{vmatrix} \lambda f_1(c) + f_1'(c) & \lambda f_2(c) + f_2'(c) & \lambda \\ f_1(a) & f_2(a) & 1 \\ f_1(b) & f_2(b) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

VI. Si dans (14) on soustrait la deuxième ligne de la 3me, et si on divise par $f_2(b) - f_2(a)$, pour c, $c_1 \in (a, b)$ on obtiendra :

$$\begin{vmatrix} \lambda f_1(c) + f_1'(c) & \lambda f_2(c) + f_2'(c) & \lambda \\ f_1'(c_1) & f_2'(c_1) & 0 \\ f_1(a) & f_2(a) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

De même on trouve la relation :

$$\begin{vmatrix} \lambda f_1(c) + f_1'(c) & \lambda f_2(c) + f_2'(c) & \lambda \\ f_1'(c_1) & f_2'(c_1) & 0 \\ f_1(b) & f_2(b) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{15'}$$

Il résulte que pour deux fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ définies en $[a, b]$ et qui satisfont aux conditions du théorème III, pour chaque valeur réelle de λ il y a deux points c, $c_1 \in (a, b)$ pour lesqueles nous avons simultanément les relations 15), 15').

VII. Nous remarquons que dans tous les cas étudiés, quand intervient λ ,on peut considérer : d'autres trois fonctions, ou d'autres deux fonctions, ou une seule fonction et on obtient de nouvelles relations en égalant les valeurs de λ tirées des unes et des autres formules.

Par exemple nous appliquons le théorème III : à trois fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ continues dans $[a_1, b_1]$ et à d'autres trois fonctions $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ continues dans $[a_2, b_2]$, toutes les fonctions étant assujetties aux conditions du théorème considéré.

En égalant les valeurs de λ tirées de ces deux formules, résulte qu'il existe deux nombre $c_1 \in (a_1, b_1)$, $c_2 \in (a_2, b_2)$ telle qu'on aura :

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & f_3(a_1) \\ f_1(b_1) & f_2(b_1) & f_3(b_1) \\ f_1'(c_1) & f_2'(c_1) & f_3'(c_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(a_2) & g_2(a_2) & g_3(a_2) \\ g_1(b_2) & g_2(b_2) & g_2(b_2) \\ g_1(c_2) & g_2(c_2) & g_3(c_2) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} g_1(a_2) & g_2(a_2) & g_3(a_2) \\ g_1(b_2) & g_2(b_2) & g_3(b_2) \\ g_1'(c_2) & g_2'(c_2) & g_3'(c) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & f_3(a_1) \\ f_1(b_1) & f_2(b_1) & f_3(b_1) \\ f_1(c_1) & f_2(c_1) & f_3(c_1) \end{vmatrix} \tag{16}$$

Avec le théorème III on peut obtenir encore plusieurs relations, soit en particularisant les fonctions, soit en donnant des valeurs particulières à λ, soit en considérant, par exemple, dans (16) des valeurs particuliéres pour les 6 fonctions, ou en particularisant les domaines, etc.

§ 3. *Fonctions de plusieurs variables*

Le théorème de la moyenne de Cauchy peut être généralisé aussi pour les fonctions de n variables.

Soient les fonctions :

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n), \ \psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$F_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \ F_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ F_3(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

continues pour $x_i \in [a_i, b_i]$ et qui ont des dérivées partielles de premier ordre pour $x_i \in (a_i, b_i)$, $i = 1,2, \ldots n$.

Nous remplaçons dans ces fonctions x_i par $a_i + t(b_i - a_i)$ telle que $t \in [0,1]$ et posons :

$$b_i - a_i = h_i$$

$$\psi(t) = \psi(a_1 + th_1, \ a_2 + th_2, \ldots, a_n + th_n)$$

$$\varphi(t) = \varphi(a_1 + th_1, \ a_2 + th_2, \ldots, a_n + th_n)$$

$$F_j(t) = F_j(a_1 + th_1, \ a_2 + th_2, \ldots a_n + th_n), \ j = 1, 2, 3$$

Les fonctions $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $F_j(t)$ de variable t, sont continues par rapport à t pour $t \in [0,1]$ et dérivable pour $t \in (0,1)$.

Ecrivons pour les fonctions $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $F_j(t)$, $j=1, 2, 3$, la relation analogue avec (9) et on aura :

$$\begin{vmatrix} \psi(\theta)F_1(\theta)+\varphi(\theta)F_1'(\theta) & \psi(\theta)F_2(\theta)+\varphi(\theta)F_2'(\theta) & \psi(\theta)F_3(\theta)+\varphi(\theta)F_3'(\theta) \\ F_1(0) & F_2(0) & F_3(0) \\ F_1(1) & F_2(1) & F_3(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

où

$$0<\theta<1$$

$$F_j'(\theta) = \left| h_1 F'_{jx_2} + h_2 F'_{jx_2} + \ldots + h_n F'_{jx_n} \right|_{\substack{x_1=a_1+\theta h_1 \\ x_2=a_2+\theta h_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n=a_n+\theta h_n}}$$

$$F'_{jx_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Pour $t \in [0,1]$ nous avons $\varphi(t) \neq 0$, donc, divisons la première ligne du déterminant (17) par $\varphi(\theta)$ et on pose :

$$\psi(\theta) : \varphi(\theta) = \lambda,$$

où λ peut prendre toutes les valeurs réelles.

On aura :

$$\begin{vmatrix} \lambda F_1(c_i)+DF_1(c_i) & \lambda F_2(c_i)+DF_2(c_i) & \lambda F_3(c_i)+DF_3(c_i) \\ F_1(a_1, a_2, \ldots a_n) & F_2(a_1, a_2, \ldots a_n) & F_3(a_1, a_2, \ldots a_n) \\ F_1(b_1, b_2, \ldots b_n) & F_2(b_1, b_2, \ldots b_n) & F_3(b_1, b_2, \ldots b_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

Cette relation généralise le théroème de la moyenne pour les fonctions de plusieurs variables.

Dans la relation (18) nous avons noté :

$$F_j(c_i) = F_j(c_1, c_2, \ldots c_n)$$

$$DF_j(c_i) = \left[\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] F_j(x_1, x_2, \ldots x_n) \Big|_{\substack{x_1=c_1 \\ x_2=c_2 \\ \cdots\cdots \\ x_n=c_n}}, \quad j=1,2,3$$

Il résulte, que dans les conditions spécifiées plus haut, pour chaque valeur $\lambda \in (-\infty, \infty)$ il existe un système de valeurs $c_i \in (a_i, b_i)$, $i=1, 2, \ldots n$, pour lesquelles nous avons la relation (18).

Nous pouvons analoguement comme dans les cas de fonctions d'un variable, obtenir de nombreuses autres formules si on part de la formule 18).

Catedra de matematică

BIBLIOGRAPHIE :

[1] *I. M. Miu*, — Une nouvelle méthode pour la séparation des racines réelles des équations. (Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, Tom. XXV, Fascicola 4).

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ И ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ С СРЕДНЕМ

(Краткое содержание)

В этой работе автор дает новое доказательство своей теоремы опубликованной в [1].

С помощью этой теоремы автор обобщает теорему Коши о среднем значении посредством формулы (10) для трех функций одной переменной и другое обобщение посредством формулы (18) для трех функции n переменных.

В работе даны мночисленные применения.

ON A THEOREM AND A GENERALISATION OF THE AVERAGE THEOREM

(Summary)

In this paper, the author gives a new proof of his theoreme published in [1].

By means of his theorem it is provided a generalisation of the average theorem o fCauchy by the formula (10) for three functions of a variable and another generalisation for the formula (19)) for three functions of n variables.

The paper presents also numerous applications.

SUR UN THÉORÈME ET UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE LA MOYENNE

(Résumé)

Dans ce travail l'auteur donne un nouvelle démonstration de son théorème [1].

A l'aide de ce théorème, l'auteur généralise le théorème de la moyenne de Cauchy premièrement pour trois fonctions d'une variable — formule (10) — et deuxièment pour trois fonctions de n variable — formule (18).

L'auteur donne de nombreuses applications.

ÜBER EINEN SATZ UND DIE VERALLGEMEINERUNG DES MITTELWERTSATZES

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit, gibt der Verfasser einen neuen Beweis seines Satzes der in [1] veröffentlicht ist.

Mit Hilfe dieses Satzes gibt der Verfasser eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes von Cauchy durch die Formel (10) für Funktionen mit einer Veränderlichen und eine andere Verallgemeinerung durch die Formel (18) für 3 Funktionen mit n Veränderlichen.

In der Arbeit werden zahlreiche Anwendungen gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

CHIMIE-FIZICĂ

THE ALUMINO THERMIC REDUCTION OF MAGNESIUM COMPOUNDS

K. GRJOTHEIM, O. HERSTAD, and K. JOHANSEN,
Institute of Inorganic Chemistry,
The Technical University of Norway,
Trondheim, NORWAY.

Magnesium is widely and plentifully distributed in nature. It constitutes $2^1/_2\%$ of the earth's crust, which makes it the sixth most abundant chemical element or the third most abundant commercial metal. As a typical alkaline earths magnesium belongs to the reactive metals and therefore never occurs in the free state in nature.

The most important raw materials for the production of magnesium are sea-water, naturally occuring underground brines $MgCl_2$, and the common rocks : magnesite $MgCO_3$, and dolomite $MgCO_3 \cdot CaCO_3$.

Presently commercially less important magnesium containing minerals are forsterite Mg_2SiO_4, which in isomorphous mixture with fayalite Fe_2SiO_4 forms olivine, others are brucite $Mg(OH)_2$, carnallite $KMgCl_3 \cdot 6H_2O$, epsomsalt $MgSO_4 \cdot 7H_2O$, kieserite $MgSO_4 \cdot H_2O$, serpentine $Mg_3H_4Si_2O_9$ and some other silicate minerals. These last minerals occur in large quantities throughout the world, but they are not considered economically significant at the present time.

Metallic magnesium was first obtained by Bussy in 1829 by heating the anhydrous chloride with potassium ; and by Bunsen in 1852 by electrolysis of the fused chloride. The technical processes for extracting magnesium from its ores has resolved itself from these two general methods : (1) electrolysis of fused magnesium chloride, and (2) by the thermal reduction of magnesium oxide.

All commercially succesful electrolytic methods utilize anhydrous magnesium chloride as the cell feed. Fundamental differences in practice reside entirely in the choice of raw materials and the methods employed to produce anhydrous magnesium chloride.

However, electrolysis is fundamentally unfavourable in the case of metals high in the electrochemical series, since many abundant natural impurities are less electro-positive Magnesium and are deposited before the

metal in question. This requires therefore a very pure cell feed, in this case anhydrous magnesium chloride which is difficult to produce and handle.

These rigid electrolyte requirements of raw material purity is relaxed for the thermic processes. Another great advantage of any thermic process is that magnesium is realtively volatile and may be distilled directly from the reaction system. In the thermal reduction of magnesium oxyde, various reducing agents are available. However, only three have been used commercially: carbon, calcium carbide and silicon (as ferro silicon).

At. 1900°C, MgO, carbon, CO and Mg(g) are in equilibrium at 1 atm. pressure. However, the metal cannot be recovered by ordinary condensation and must be shock cooled, producing a pyrophoric powder which must be redistilled to produce massive crystals. A number of attempts to handle this process have been made, but the problem of handing the pyrophoric powder is not satisfactorily solved.

The reduction of MgO by another metal seems to offer many possibilities. Commercially used and best investigated is the use of silicon (as ferrosilicon, an alloy with iron) as the reducing agent and calcined dolomite as the raw material. The reaction is:

$$2\,CaO(s) + 2\,MgO(s) + Si(s) = Ca_2SiO_4(s) + 2\,Mg(g)$$

This equilibrium has been measured by several and as late as in the August number this year of the Transactions of the Metallurgical Society of AIME (L. M. Pidgeon, Trans. AIME, *227* (1963) 821) it is believed to be a discrepancy between measured and calculated values for p_{Mg} for this reaction. However, the last two years there were published new values for the heat of formation of SiO_2, $\Delta H_{f\,298} = -217.5$ Kcal/mole (W. P Good, J. Phys. Chem *66* (1962) 380 and S. S. Wise, J. L. Margrave, H. M. Feder, and W. N. Hubbard, J. Phys. Chem. *66* (1962) 381). — This new value is 8 Kcal more negative than the former existing data and brings the thermodynamic calculation in excellent agreement with the experimental results.

Regarding aluminium as the reducing agent up to a few years ago very little information existed in the literature on the reaction between magnesium compounds and metallic aluminium. The available information itself was conflicting, and, to clarify the existing discrepancy, the reactions between aluminium and magnesium oxide (MgO), calcined dolomite (CaO.MgO) and olivine (Mg_2SiO_4) were studied at our institute. The following coworkers have taken part in the project: Dr. J. M. Toguri, O. Herstad, K. Johansen and R. Skarb (4, 5, 6, 7, 8).

The logical approach for the study of these reactions

$$Al + Mg\text{-compound} \rightarrow Al\text{-product} + Mg(g)$$

between condensed states with the formation of a gaseous phase is:

1. The measurement of the equilibrium vapour pressure of the gas, in this case magnesium, associated with the respective reactions, and

2. the identification of the end products of the reaction in order to establish the reaction scheme.

Experimental

The experimental method adopted to measure the equilibrium vapour pressure of magnesium was the transportation method, since the expected vapour pressure range was between $\frac{1}{100}$ to 100 mm of Hg over the actual temperature range. This method of measuring vapour pressure has proved to be successful for a number of similar reactions 9, 10, 11). It is a dynamic method, in which the magnesium vapour in equilibrium with the solid components is carried away by a stream of inert gas flowing at a constant velocity. The amount of magnesium vapour transported is determined by condensing the vapour in a suitable condensor. The vapour pressure is then proportional ta the mass of entraieed vapour divided by the total volum of gas leaving the equilibration zone.

The important feature of ot the transportation methods is the geometry of the apparatus. It must be designed to insure saturation of the carrier gas over a range of flow rates where the diffusion errors are negligible, and where the measured pressure is independent of flow rate.

The furnace utilized for this purpose is shown in Fig. 1. It is a Kanthal A wire wound electrical furnace very much used in our laboratories and similar to that described in detail by Motzfeldt (12). With this furnace an uniform temperature zone was obtained readily within $\pm$ 1.5°C, along the middle 15 cm of the furnace for temperatures of 800 - 1200°C.

An inconel tube (76% Ni, 15% Cr, and 9% Fe) of 3.2 cm I. D. was used as the reaction tube, since it was found to be chemically inert against the reactants and products of the reaction concerned, below 1150°C.

The charge is placed between two inconel perforated spacers, as shown in Fig. 1. These spacers not only keep the charge in place but also aid in packing the charge together, thus contributing to the saturation of the carrier gas.

A steel condenser filled with washed steel wool is placed near the outlet of the reaction tube. This serves to condense and collect completely the evolved magnesium gas.

The carrier gas utilized throughout these investigations was S-argon gas obtained from Norsk Hydro, the analysis given was 99.94%. The impurities CO_2 and H_2O were removed by passing the argon through an ascarite and a dehydrite tower respectively.

The gas flow was measured using a calibrated rotameter (obtained from Rotameter Ltd., England) and the total volume was determined by means of a calibrated gas meter (obtained from G. Kromschröder AG, Germany).

A Pt-Pt 10% Rh thermocouple was placed into the charge, as shown in Fig. 1, to measure the temperature in conjunction with a precision potentiometer (Tinsley and Co., Ltd., England) with a mirror galvanometer (Lange, Germany).

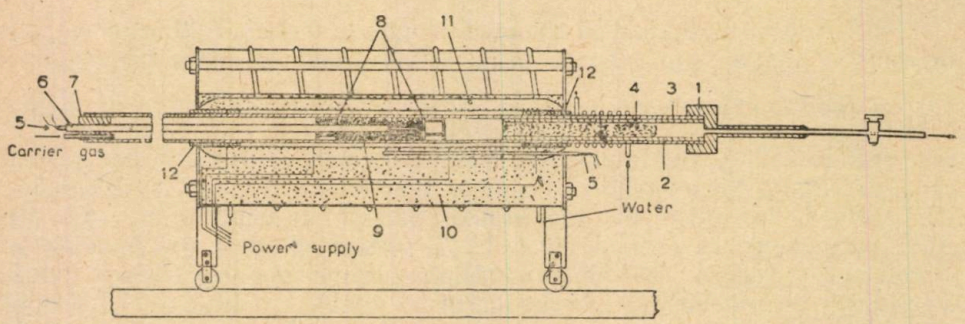


Fig. 1

Preparation of charge

The aluminium powder (99.9 per cent Al, and approximately —200 mesh), the pro analysis grade magnesium oxide and the calcium oxide used throughout this investigation were obtained from Merck, Germany. Calcined dolomite was obtained from Hammarfallene, Norway, and the olivine was obtained from A/S Olivin, Aheim, Norway. The analyses for the latter two minerals are shown in Table 1.

Table 1

Analysis in Weight Per Cent.

	Dolomite (calcined)	Olivine
MgO	40,3 %	48,0%
CaO	58,3 %	
SiO_2		42,0%
Al_2O_3	0,06%	± 0,1%
Fe_2O_3	0,16%	± 8,0%
Cr_2O_3		± 0,3%
NiO		± 0,2%
MnO		± 0,1%
insoluble	1,18%	

In all cases, the oxides were dried at 1000°C for 12 hours, to remove water and carbon dioxide, then mixed with the required amount of alu-

minium and ground in a ball mill. The powdered mixture was pressed into briquettes, which were broken into pieces of approximately 5 mm. particle size and packed into the reaction tube. Approximately 120 g of the charge was used. The reactants prepared in this manner gave rise to a large sample surface area to reaction tube volume ratio, a condition which is favourable for insuring saturation of the carrier gas.

The experiment was started by moving the furnace which is at a temperature 100°C higher than the required temperature, along the reaction tube to a position such that the sample was located in the uniform temperature zone. During this period a stream of argon was passed from the opposite end until the required temperature was obtained, a period of approximately 5 to 10 minutes. When the temperature was reached the flow of argon was reversed and zero time was observed.

Results and discussion

A. *Effect of Flow Rate on the Apparent Vapour Pressure*

A number of experiments were carried out to determine the effect of the rate of the carrier gas on the measured vapour pressure. Typical results are shown for the system Al-MgO at a temperature of 998°C in

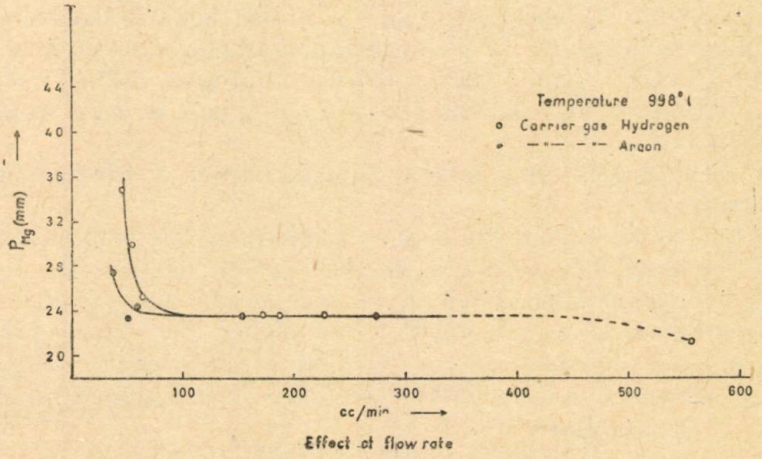


Fig. 2

Fig. 2. In the case of argon as the carrier gas, the flow rate was varied from 37 to 274 ml/min. For flow rates exceeding 100 ml/min, there appears a plateau where the vapour pressure is independent of the flow rate. At lower flow rates, the resulting pressure, that is the mass of magnesium collected per unit volume, is much higher. This indicates that in addition to the equilibrium concentration of the vapour in the carrier

gas, there is movement of vapour due to thermal and self diffusion. This feature has been analyzed by Lepore and Van Wazer (13).

The existence of a relatively large region where the pressure is independent of the flow rate, insured saturation of the carrier gas as well as satisfactory design of the apparatus.

B. *Effect of Carrier Gas on the Vapour Pressure*

To insure that the pressure measurements were independent of the nature of the carrier gas, hydrogen was also utilized as the entrainment gas. The results are shown in Fig. 2, at a temperature of 998°C. The flow rate was varied from 43 to 557 ml/min. In the range from 100—350 ml/min the vapour pressure is independent of the flow rate and is identical to that observed with argon. However, as expected the pressure increases very rapidly at low flow rates. At 43 ml/min a 50% increase in pressure was observed.

These experiments showed that the measured pressure is independent of the nature of the carrier gas in the region of the plateau.

C. *Vapour pressure measurements*

The temperature ranges and the results of the equilibrium vapour pressure measurements of the magnesium over the three reactions studied are shown in Fig 3, where log P_{atm} is plotted against the reciprocal of the absolute temperature. In the temperature ranges investigated (MgO : 870—1141°C, CaO - MgO : 887—1035°C, Mg_2SiO_4 : 943—1150°C), the data for the respective reactions can be represented, as seen from Fig. 3, by straight lines.

For each temperature a number of experiments at different flow rates were carried out.

For olivine the vapour pressure of magnesium was found to vary with the ratio of aluminium to olivine in the reaction mixture. Below a mole ratio of 4 : 3 (aluminium : olivine), no magnesium was obtained even at 1100°C. However, at a ratio of 2 : 1 and higher, the vapour pressure of magnesium was constant and a function of temperature only. Consequently a ratio of 2 : 1 was selected for these investigations.

D. *Analysis of the Reaction Products*

(a) Pure MgO.

The solid reaction product obtained for the reaction between metallic aluminium and solid magnesium oxide was found, both from chemical and X-ray diffraction analysis, to be $MgAl_2O_4$ and not Al_2O_3, as reported independently by Beljajew (14) and Treadwell (15). Therefore the reaction scheme is :

$$4\ MgO(s) + 2\ Al(l) = MgAl_2O_4(s) + 3\ Mg(g) \qquad (1)$$

(b) Calcined Dolomite.

Chemical analyses of the condensed magnesium showed no traces of calcium. The solid residue was analyzed by X-ray diffraction and the diffraction patterns obtained corresponded only to the reactants : CaO,

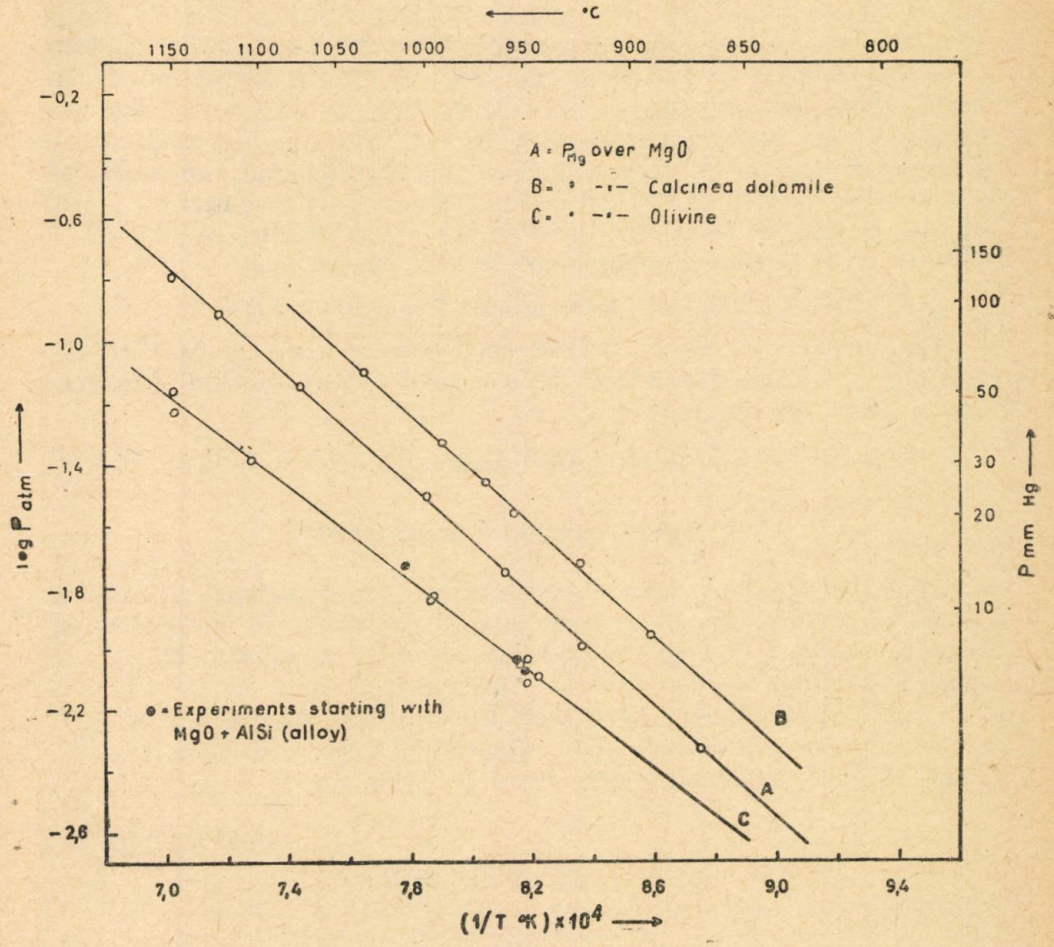


Fig. 3

MgO, Al, and the product : 12 CaO - 7 Al_2O_3, when compared with the ASTM Index (16). This rection is therefore written as follows :

$$12\ CaO(s) + 21\ MgO(s) + 14\ Al(l) = 12\ CaO \cdot 7\ Al_2O_3(s) + 21\ Mg(g) \qquad (II)$$

The literature indicates a difference in opinion regarding the similarity of the two compounds 5 $CaO \cdot 3\ Al_2O_3$ and 12 $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$. The existence of the compound 5 $CaO \cdot 3\ Al_2O_3$ was first reported by Rankin and Wright (17). However, later investigators have found that this formula does not satisfy all the known characteristics of the compound. Bussem and Eitel (18) concluded, from a structural analysis of the compound, that it should be 12 $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$. Recently, Aruja (19) following an X-ray analysis concluded that the X-ray powder patterns of the compounds 5 $CaO \cdot 3\ Al_2O_3$ and 12 $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$ showed no resemblance. There thus appears to be a controversy as to whether the two compounds are essentially indentical or not. Nevertheless, since X-ray patterns obtained, at all temperatures of this investigations, corresponded to the powder pattern of 12 $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$ reported by Swanson et al (16, 20), this formula is used. The question about the stability of 12 $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$ is under further investigations in our laboratories.

(c) Olivine (Mg_2SiO_4 with around 7 weight % FeO)

The solid end products of this reaction were found to be $MgAl_2O_4$, MgO and Si, and as shown later the measured vapour pressure of magnesium is above the reaction:

$$4\ MgO(s) + 2\ AlSi(l) = MgAl_2O_4(s) + 2\ Si(s) + 3\ Mg(g) \qquad (III)$$

E. *Thermodynamic Considerations*

At the temperatures where these reactions are considered, aluminium appears as a liquid. Thus, some solution of magnesium in the aluminium would be expected. For this reason the unreacted aluminium balls were collected from the reaction products and analyzed. In a few experiments small beads of aluminium were placed between the charge and condenser, in the uniform temperature zone, and these were also analyzed. The results at four temperatures are shown in Table 2.

Table 2

Analysis of magnesium in aluminium.

Temp. (°C)	Mole % of Mg in aluminium	Activity of magnesium	
		From analisys of aluminium	From pressure measurements
870	3,7 ± %	0,037	0,048
921	5,9 ± %	0,059	0,056
959	6,0 ± %	0,060	0,066
998	10,4 ± %	0,104	0,079

Assuming ideality, the activity of magnesium has been calculated from the analysis. This is found to be in good agreement with the activity derived from the measured pressure, as shown in Table 2.

Thus it was assumed that within the limits of the error of the analysis, aluminium formed an ideal solution with magnesium at the temperature at which the investigation was carried out.

On this assumption, the equilibrium constants for the respective reactions were calculated for each temperature investigated. A „Σ-plot" (Darken and Gurry (21)) was then carried out, now using the specific heat functions from JANAF's (22) tables. The derived functions are shown in Table 3:

Table 3

Thermodinamic Data Obtained for the Reactions Investigated

Reaction I:

$$4\ MgO(s) + 2\ Al(l) = MgAl_2O_4(s) + 3\ Mg(g)$$

$$\text{Log } p_{Mg\ (mm\ of\ Hg)} = -\frac{9000}{T} + 8.456$$

$$\Delta H^{\circ}_{1300^{\circ}K} = 123.5 \quad \text{Kcal}$$

$$\Delta S^{\circ}_{1300^{\circ}K} = 76.49 \text{ e. u.}$$

$$\Delta G^{\circ}_{1300^{\circ}K} = 24.0 \quad \text{Kcal}$$

Reaction II:

$$12\ CaO(s) + 21\ MgO(s) + 14\ Al(l) = 12\ CaO \cdot 7\ Al_2O_3(s) + 21\ Mg(g)$$

$$\log p_{Mg\ (mm\ of\ Hg)} = -\frac{8754}{T} + 8.462$$

$$\Delta H^{\circ}_{1225^{\circ}K} = +865.9 \quad \text{Kcal}$$

$$\Delta S^{\circ}_{1225^{\circ}K} = +559.55 \text{ e. u.}$$

$$\Delta G^{\circ}_{1225^{\circ}K} = +180.5 \quad \text{Kcal}$$

Reaction III:

$$4\ MgO(s) + 2\ AlSi(l) = MgAl_2O_4(s) + 3\ Mg(g) + 2\ Si(s)$$

$$\log p_{Mg\ (mm\ of\ Hg)} = -\frac{7643}{T} + 7.06$$

F. *Discussion*

(a) Pure MgO

The phase diagram for the system MgO-$MgAl_2O_4$ (23) shows no solid solubility on the MgO side of the diagram. Thus, combining the experimental data with the in the literature available data on MgO and Al_2O_3, one obtains for the reaction

$$MgO(s) + Al_2O_3(s) = MgAl_2O_4(s)$$

the following data:

$$\Delta H^{\circ}_{1300^{\circ}K} = -1{\cdot}98 \text{ Kcal},$$

and

$$\Delta S^{\circ}_{1300^{\circ}K} = 4{\cdot}5 \text{ e. u.}$$

From low temperature heat capacity measurements, Kelly (24) arrived at an entropy of formation of the spinel from the oxide of 0.6 ± 0.2 e. u.

The unreasonable large value of the entropy and the positive heat obtained in the present study might be due to the assumptions made with respect to the solubility of MgO in $MgAl_2O_4$, to the ideality of the Al-Mg system and to the uncertainty of the existing literature data and the method of calculation. It should be stressed that it is not possible to get accurate entropy values from a small range of temperature. This conclusion is also confirmed by the recently published work by Altman (25).

(b) Calcined Dolomite

The phase diagram for the system CaO-MgO-Al_2O_3 indicates, in the temperature range of the present investigation, that CaO, MgO and 12 Ca0.7 Al_2O_3 cannot be in equilibrium. As seen from Fig. 4, the calcium aluminate expected is 3 $CaO.\ Al_2O_3$. However, the X-ray diffraction lines of the residue clearly indicated that the calcium aluminate present was 12 $CaO.\ 7\ Al_2O_3$, corresponding to the X-ray lines reported by Swanson et al. (20).

The possible reasons for this might be attributed to the fact that 3 $CaO.\ Al_2O_3$ is not a stable compound at the temperatures of the present investigation, and that the kinetics of the formation of 12 $CaO.\ 7\ Al_2O_3$ are much faster than those of 3 $CaO.\ Al_2O_3$.

A number of experiments were carried out in which 3 $CaO.\ Al_2O_3$, prepared by heating CaO and Al_2O_3 in stoichiometric amounts at 1350°C for 48 hours and then quenching to room temperature, was held at various temperatures for a period of time and then quenched. X-ray diffraction patterns for these samples showed that below 1200°C, traces of 12 CaO.7 Al_2O_3 were formed. When 1 per cent CaF_2 was added, the diffraction lines for $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$ were more intense than in samples without CaF_2, under the same conditions.

When samples of the reaction mixture (calcined dolomite and aluminium) were heated to temperatures beyond 1200°C, both $12\ CaO \cdot 7\ Al_2O_3$ and

3 $CaO \cdot Al_2O_3$ appeared, the amount of 3 $CaO \cdot Al_2O_3$ increasing with longer heating periods.

These results agree with those reported for the reaction between

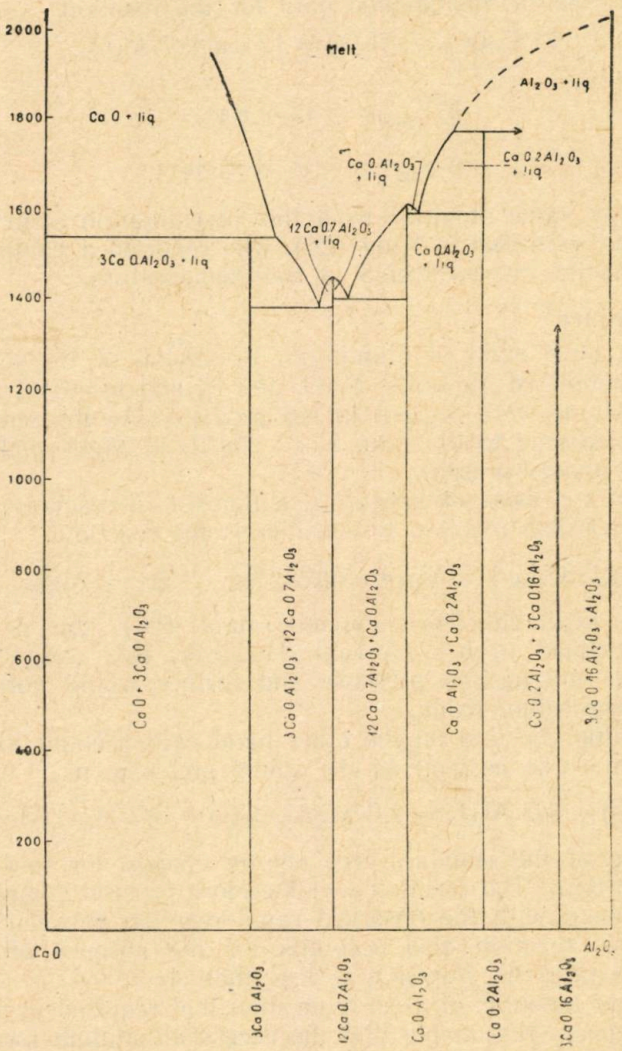


Fig. 4

aluminium and calcium oxide, where 12 $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$ is formed below 1200°C and 3 $CaO \cdot Al_2O_3$ formed above 1200°C.

It was concluded that 12 $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$ must be the stable calcium aluminate in equilibrium with CaO at the temperatures of the present in-

vestigation. The thermodynamic calculations were thus based on the formation of 12 $CaO \cdot 7\ Al_2O_3$. These are shown in Table 3.

Combining the available data for CaO and Al_2O_3 with the experimental results, the thermodynamic data for the reaction

$$12\ CaO + 7\ Al_2O_3 = 12\ CaO \cdot 7\ Al_2O_3 \qquad (5)$$

are as follows:

$$\Delta H^\circ_{298} = -\ 18.5\ \text{Kcals}$$

$$\Delta S^\circ_{298} = \quad 46.31\ \text{e. u.}$$

The entropy value obtained from this investigation is in surprisingly good agreement with that of King (26), who reported a value of 50.6 e. u. from heat capacity measurements at low temperature.

(c) Olivine

When the mole ratio of aluminium to olivine of the reactants was 4 : 3, large amounts of $MgAl_2O_3$, MgO, and Si and traces of metallic aluminium and olivine were present in the products. As the amount of aluminium was increased to the ratio 2 : 1 ; $MgAl_2O_4$, MgO, and Al-Si alloy were the only phases present.

To account for these observations, a number of reactions can be formulated. One possible reaction to consider is the reaction

$$Mg_2SiO_{4(s)} + 2\ Al_{(l)} = MgAl_2O_{4(s)} + Si_{(s)} + Mg_{(g)}.$$

From the available thermodynamic data (28), the ΔG° value at 1000°C is calculated to be —5 kcal. However, this would lead to an extremely large magnesium pressure and further would not explain the presence of magnesium oxide.

The following reaction on the other hand, will account for the observed magnesium oxide as well as the spinel and silicon.

$$Mg_2SiO_4(s) + 4/3\ Al(l) = 2/3\ MgAl_2O_4(s) + 4/3\ MgO(s) + Si(s)$$

Calculation of the standard free energy change for this reaction at 1000°C is —28 Kcal. The reaction will therefore proceed completely to the right in agreement with the observed rapid reaction between olivine and aluminium. This reaction also accounts for the absence of magnesium when the mole ratio $Al : Mg_2SiO_4$ is less than 4 : 3.

When larger amounts of aluminium than that required by this reaction are used, it appears reasonable that the excess aluminium forms an alloy with silicon. This alloy then reacts with magnesium oxide according to equation III.

$$4\ MgO(s) + 2\ AlSi(s) = MgAl_2O_4(s) + 3\ Mg(g) + 2\ Si(s) \qquad (III)$$

The measured vapour pressure of magnesium is therefore over the above equilibrium (Equation III).

This was confirmed by determining the equilibrium between magnesium oxide and an aluminium silicon alloy (Al : 0.38, Si : 0.54, Fe : 0.08).

The measured vapour pressure of magnesium over this system, within the temperature range of the investigation, is identical to that over the present olivine and aluminium system, as seen from Fig. 3.

Using a mole ratio of Al : Mg_2SiO_4 of 2 : 1, should lead to an alloy containing Al : Si in a mole ratio 2 : 3. In the case of olivine the formed alloy also contains about 8 mole% iron, which together with silicon acts as a solute in aluminium. The phase diagram of the Al : Si : Fe system (29), shows that a liquid of this composition is saturated with silicon at temperatures below 1200°C. On the basis that the measured pressure was found to be only a function of the temperature, the corresponding composition of the liquid alloy at each temperature is simply given by the liquid line of the phase diagram.

At a constant temperature, the phase diagram indicates that as the aluminium is consumed in reaction III, silicon will also precipitate out from the liquid alloy such that the composition of the liquid alloy remains constant. It is therefore possible to use the Gibbs-Duhem relationship to calculate an approximate value for the activity of aluminium in the liquid alloy from the phase diagram combined with the knowledge of the heat of fusion of silicon.

However, a direct value of the activity of aluminium along the liquidus line on the silicon side of the phase diagram is obtainable, if the present vapour pressure measurements are combined with the previously reported magnesium pressure determinations over the equilibrium system MgO and Al(1). The activity of aluminium along the liquid is given by the expression

$$a_{Al} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right) 3/2$$

where P_1 is the equilibrium magnesium pressure over reaction III, and P_0 the equilibrium magnesium pressure over the system MgO and Al.

Substituting for values of P, the activity of aluminium along the liquidus in the temperature range 943—1150°C is given by

$$\log a_{Al} = \frac{2035}{T} - 2.08$$

Thus at 950°C, $N_{Al} = 0.55$, and $a_{Al} = 0.38$ and similarly at 1150°C, $N_{Al} = 0.36$ and $a_{Al} = 0.22$.

From these it may be concluded that olivine and aluminium form an unstable system whichi in the presence of excess aluminium reacts completely according to the equation

$$3\,Mg_2SiO_4(s) + 6\,Al(1) \rightarrow 2\,MgAl_2O_4(s) + 4\,MgO(s) + 2\,AlSi(1) + Si(s)$$

The products of this reaction form the equilibrium system

$$4\,MgO(s) + 2\,AlSi(1) = MgAl_2O_4(s) + 2\,Si(s) + 3\,Mg(g) \qquad (III)$$

which gives the measured vapour pressure.

These investigations show that the possibility of using aluminium as a reducing agent is favourable on a theoretical basis. However, comparing the cost of aluminium and silicon, the last appears to be most favourable. Therefore the reactions investigated here are mostly of theoretical interest. However, if it were possible to obtain a cheaper aluminium-silicon alloy, this would also make an economical preferable reducing agent as seen from these reactions.

Acknowledgements

The investigations on the reduction of magnesium compounds have been supported by research grants from Elektrokemisks Forskningsfond, for which the authors are grateful.

REFERENCES

(1) *L. M. Pidgeon,* Trans. AIME, *227,* 821 (1963)
(2) *W. A. Good,* J. Phys. Chem., *66,* 380 (1962).
(3) *S. S. Wise, J. L. Margrave, H. M. Feder* and *W. N. Hubbard,* J. Phys. Chem., *66,* 381 (1962).
(4) *K. Grjotheim, O. Herstad* and *J. M. Toguri,* Can. J. Chem., *39,* 443 (1961).
(5) *K. Grjotheim, O. Herstad* and *J. M. Toguri,* Can. J. Chem., *39,* 2290 (1961).
(6) *K. Grjotheim, O. Herstad* and *J. M. Toguri,* Can. Min. Bull. *55,* 396 (1962).
(7) *K. Grjotheim, O. Herstad, R. Skarb, J. M. Toguri,* Can. J. Chem. *41,* 739 (1962).
(8) *J. M. Toguri,* Tidsskrift for Kjemi, Bergvesen og Metallurgi, *9,* 211 (1960).
(9) *A. Schneider* and *E. Hesse,* Z. Elektrochem. *46,* 279 (1940).
(10) *L. M. Pidgeon* and *J. A. King,* Discussion Faraday Soc. *4,* 197 (1948).
(11) *T. Rosenqvist* and *B. Ellingsaeter,* J. Metals, *212,* 1111, (1956).
(12) *K. Motzfeldt,* Physico-chemical measurements at high temperature, Butterworths Scientific Pub., London, p. 51 (1959).
(13) *J. V. Lepore* and *J. R. Van Wazer,* U. S. Atomic Energy Commission, MDDC 1188 (1948).
(14) *A. I. Beljajew,* Metallurgie des Aluminiums, Vol. 11, VEB Verlag Tech., Berlin, p. 281 (1956).
(15) *W. D. Treadwell,* Helv. Chim. Acta, *19,* 126 (1936).
(16) ASTM X-ray Powder Data, File 9—413.
(17) *G. A. Rankin* and *F. E. Wright,* Am. J. Sci *39,* 1 (1915).
(18) *W. Bussem* and *A. Eitel,* Z. Krist. *95,* 175 (1936).
(19) *E. Aruja,* Acta Cryst. *10,* 337 (1957).
(20) *H. E. Swanson, M. I. Cook, T. Isaacs,* and *E. H. Evans,* Natl. Bur. Stand. (U. S.), Circ. 539, 114 (1956).

(21) *Darken and Gurry*, Physical Chemistry of Metals, McGraw-Hill Book Comp., Ltd., New York 1953.
(22) JANAF Thermochemical Data, Dow Chemical Company, Thermal Laboratory, Midland, Michigan (USA).
(23) *A. M. Alper, R. N. McNally, P. H. Ribbe,* and *R. C. Doman*, J. Am. Ceram. Soc. *45*, [6] 263 (1962).
(24) *K. K. Kelley*, U. S. Bureau of Mines Bulletin 584 (1960)
(25) *R. L. Altman*, J. Phys. Chem. *67* [2] 366 (1963).
(26) *E. G. King*, J. Phys. Chem. *59*, 218 (1955).
(27) *E. Levin, H. McMurdie*, and *F. Hall*, The Phase Diagram for Ceramists, Am. Ceram. Soc. (1956).
(28) *O. Kubaschewski* and *E. Evans*, Metallurgical Thermochemistry, Pergamon Press, Ltd. London 1958.
(29) *S. Takeda* and *K. Mutuzaki*, Tetsu to Hagane, *26*, 335 (1940).

АЛЮМИНИЕВО-ТЕРМИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СОЕДИНЕНИЙ МАГНИЯ

(Резюме)

Указывается, что термические методы получения металлического магния представляют преимущества перед электролизом и имеют большую экономическую перспективу. Рекомендуется в качестве восстановительного агента металлический алюминий и указывается актуальность физико-химического изучения реакции типа:

$$Al + комб — Mg = Al — продукт + Mg.$$

Была измерена равновесное упругость паров магния, в реакциях между алюминий и окисью магиния (MgO), кальцинированными доломитами (CaOMgO) и оливином (Mg_2SiO_4).

На основании полученных результатов была рассчитана теплота реакции (ΔH) энтрония (ΔS) и энталпия реакции (ΔG) и были изложены соображения о химической структуре конечных алюминиевых соединений.

THE ALUMINO-THERMAL REDUCTION OF THE MAGNESIUM COMPOUNDS

(Summary)

It has been demonstrated that the thermal methods of obtaining metallic magnesium offer advantages over the electrolysis and are of a growing economic interest.

The metallic aluminium is recommended as a reducing agent and the present-day importance of the physical chemical study of the reactions of the type: Al + Mg — compound = Al — product + Mg, is demonstrated.

The equilibrium vapour pressure of magnesium has been measured for the reactions between aluminium and the magnesium oxide (MgO), calcinated dolomite (CaO MgO) and olivine (Mg_2SiO_4).

On the basis of the results obtained, the reaction heat (ΔG) entropy (ΔS) and the reaction enthalpy (ΔG) have been calculated considerations have been made on the chemical structure of the end Al products.

LA RÉDUCTION ALUMINIO-THERMIQUE DES COMBINAISONS DE MAGNÉSIUM

(Résumé)

On montre que les méthodes thermiques d'obtention du magnésium métallique présentent des avantages par rapport à l'électrolyse et qu'elles ont une grande perspective économique. On recommande comme agent de réduction l'aluminium métallique et on montre l'actualité de l'étude physicochimique des réactions de type :

$$Al + comb - Mg = Al - product + Mg$$

On a mesuré la tension de vapeurs du magnésium, à l'équilibre, pour les réactions entre l'aluminium, et l'oxyde de magnésium (MgO), dolomite calcinée (CaO MgO) et olivine (Mg_2SiO_4).

A partir des résultats obtenus, on a calculé la chaleur de réaction (AG), l'entropie (AS) et l'enthalpie de réaction (AG) et on a fait des considérations sur la structure chimique des combinaisons d'aluminium résultées.

DIE ALUMINO-THERMISCHE REDUKTION DER MAGNESIUMVERBINDUNGEN

(Zusammenfassung)

Es wird gezeigt, dass die thermischen Methoden zur Gewinnung des metallischen Magnesiums im Vergleich mit der Elektrolyse vorteilhaft und von grosser ökonomischer Zukunft (Perspektive) sind. Als Reduktionsmittel wird metallisches Aluminium epmfohlen und die Aktualität des physisch-chemischen Studiums der Reaktionen der Art :

$$Al + Mg - Verbindung = Al - product + Mg$$

vorgeführt.

Es wurde din Dampfspannung des Magnesiums, im Gleichge wichtszustand, (the equilibrum vapour pressure of the magnesium), bei de Reaktionen zwischen Aluminium und. Magnesiumoxyd (MgO), kalziniertem Dolomit (CaO Mgo) und Olivin (Mg_2SiO_4), gemessen.

Auf den erhaltenen Ergebnissen fussend, wurden die Reaktionswärme (ΔG), die Entropie (ΔS) und die Reaktionsentalpie (ΔG) gemessen und wurden Schlüsse über die chemische Struktur der erhaltenen Aluminiumverbindungen gezogen (the end Al-products).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

SOME PROBLEMS CONNECTED WITH THE STRUCTURE OF THE BATH FOR THE ALUMINIUM ELECTROLYSIS

J. BRYNESTAD, K. GRJOTHEIM, and J. L. HOLM,
Institute of Inorganic Chemistry,
The Technical University of Norway,
Trondheim, NORWAY

I. Introduction.

This year, 1963, is the 100 years anniversary of the birth of botn Charles Hall and Paul Heroult, the foundres of the technical process for the production of metallic aluminium. This, the most important of the light metals, has had a complicated history, but once a commercial production method was found, it has remained almost the same for the last 80 years.

Aluminium occurs to the extent of 7.3% in the earth's crust (next in abundance to oxygen and silicon) in many silicate rocks and also as the free oxyde Al_2O_3, corundum, or combined with water and also with other compounds. Presently of most interest for the aluminium industry is bauxite — mostly colloidal $Al_2O_3 \cdot H_2O$ with diaspore ($Al_2O_3 \cdot H_2O$) and gibbsite ($AlO_3 \cdot 3H_2O$). The important solvent for the aluminium electrolysis, the mineral cryolite, Na_3AlF_6, is a semi-transparent rock found in Greenland. As a reactive metal, aluminium is never found in the free state in nature. The first technical process for making metallic aluminium was developed around 1854 by St. Clair de Ville, a Paris schooll teacher. He obtained the metal by beating sodium aluminium chloride with sodium :

$$NaAlCl_4 + 3\,Na = 4\,NaCl + Al$$

This thermic process was very expensive. De Ville received, we think, the first direct government subsidies for light metal production from the French Emperor Napoleon III.

Cheap aluminium was first made in 1889 by the electrolysis of a solution of aluminium oxide dissolved in fusel cryolite. The process was patented almost simultaneosly in 1886 by Heroult in France and by Hall in America. The two methods differed only in detail. In the 80 years of

its commercial life the extractive metallurgy of aluminium has undergone very little change. The first electrolytical cells used carried 600 amp, and this has now grown to more than 100.000 amp. During this time aluminium has become the most used non-ferrous metal. However, the fundamental process is entirely the same.

In spite of this, there are a number of unsolved problems in connection with the process, for instance such questions as what is the structure of the melt, what is the solubility of the carbon oxide gases in the melt, what are the reactions at the anode and the cathode, and of what the so-called „metal fog" in the bath consists. This latter phenomenon occurs when metallic aluminium is added to molten cryolite. Before the addition, the melt is quite clear, but when aluminium is added a fog-like opacity spreads out from the metal surface, and in a fairly short time the whole melt will be opaque.

On reason for this lack of knowledge is the experimental difficulties in making accurate measurements in this reactive system. We will only remind you of the fact that we do not yet have any crucible material which resists both molten cryolite and liquid aluminium.

At our Institute several investigations have been carried out that may throw some light on these problems. The work to be described here deals with one phase of this effort. In the following we will present for you some of our results on investigations of the structure of the bath.

II. Structural models for pure molten cryolite.

As mentioned, in the electrolytic production of aluminium, the electrolyte consists of a solution of aluminium oxide in molten cryolite. To understand the chemistry of this important metallurgical process, a knowledge of the structure of molten cryolite is essential. A study of the two component system sodium fluoride-aluminium fluoride provides a sound basis for the discussion of the structure of molten cryolite.

The phase diagram of this system has been investigated by a number of workers. The last results obtained in our laboratories by Holm (1) is shown in Fig. 1. It is seen that there existsonly one congruently melting compound in the system at the composition $3\,NaF + 1\,AlF_3$ correspoding to the compound cryolite, Na_3AlF_6. The phase diagram also shows a second compund cryolite, $Na_5Al_3F_{14}$, wich melts incongruently.

Brosset has shown from X-ray investigations that the aluminium ion is octahedrally surrounded by 6 fluorine ions in solid cryolite.

The rather high peak in the phase diagram at the compound cryolite indicates that this compound is quite stable. This is also supported by the large negative value of the heat of formation of cryolite. From three moles of sodium fluoride and one mole of aluminium fluoride, the heat of oframtion is about —20 kcal according to Caughlin (2). Some dissociation, however, must be inferred from the horizontal tagent to the curve at its maximum.

The dissociation of the cryolite-anion has been described by two different models.

1. Disociation model, chemical dissociation of the AlF_6^{3-} anion into ions of lower coordination number charges (3).

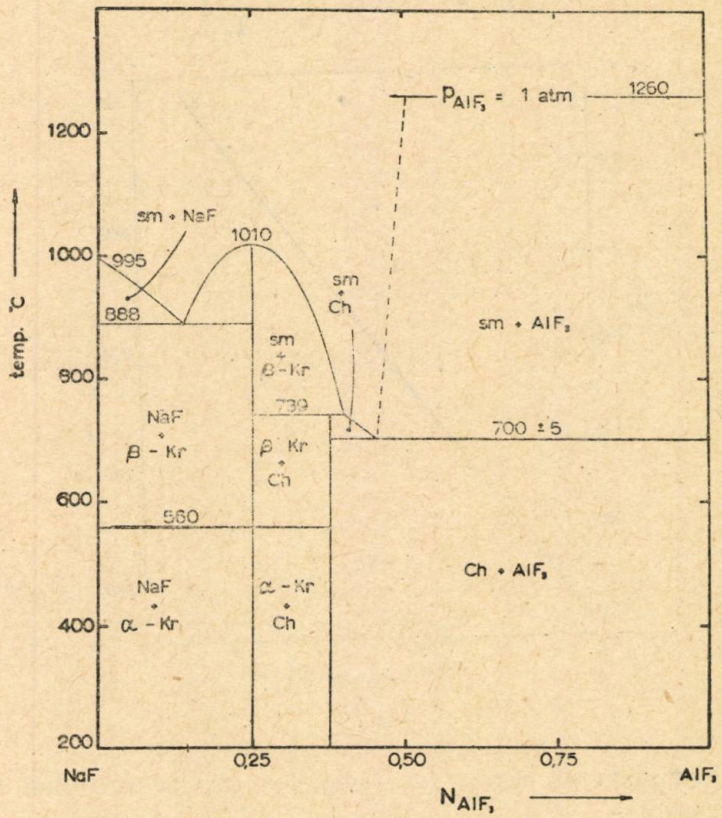


Fig. 1.

2. Order-disorder model, by use of the quasilattice theory for molten salts (1), (4). The lattice is built up from Na^+, Al^{3+} and F^- ions. In this model an ordered arrangement is favoured with Al^{3+} ions surorunded mainly by Na^+ ions in the second coordination shell. A small degree of $Al^{3+} - Na^+$ disorder in this model would correspond to the small degree of dissociation of the cryolite complex. The problem would be similar to the order-disorder in alloys having a high degree of order. The number of F^- ions surrounding the Al^{3+} ions would not enter these calculation.

Both models will be discussed here.

III. The dissociation model and structural properties of molten cryolite.

First the theoretical basis for the dissociation model will be given: The cryoscopic method is based on the wellknown equation

$$\Delta G_A = -\Delta H_f \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) \tag{1}$$

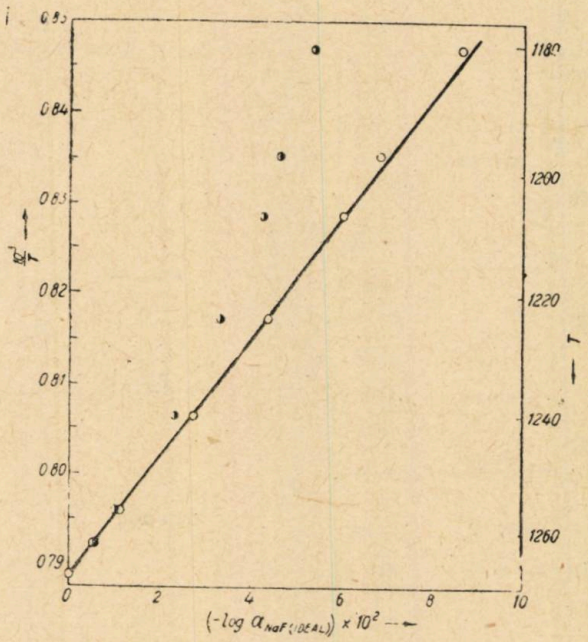


Fig. 2

On the assumption of ideality this equation can be rewritten in terms of the entropy:

$$\Delta S_A = \Delta H_f \left(\frac{1}{T} - \frac{T_0}{1}\right) \tag{2}$$

If for example we take the sodium fluoride side of this phase diagram, we can assume Temkin's model, then the following aquation is valid.

$$\ln (N_{Na+} \cdot N_{F-}) = \frac{\Delta H_f}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \tag{3}$$

In this equation the entropy term from eq. 2 is replaced by the product of the cation and anion fractions of sodium and flouride.

Plotting the logarithm of this ionic product versus the reciprocal temperature term, the slope of the curve should give the heat of fusion with the „best" strctural model.

In Fig. 2 this calculation is demonstrated assuming two different models for the dissolved cryolite. The one assuming the simple ions Na^+, Al^{3+} and F^-, and the other assuming the AlF_6^{3-} ions, which corresponds to that cryolite disolves in soduim fluoride according to the scheme:

$$Na_3AlF_6 \rightarrow 3\ Na^+ + AlF_6^{3-}$$

The slope of the curve indicates the formation of AlF_6^{3-} complex ions.

To get information about which dissociation products pure cryolite gives on melting, the freezing point depression caused by addition of different salts to cryolite is useful, since cryoscopic measurements give the numebr of foreign particles added to the solvent. In Table 1 the result by the addition of the following salts to cryolite is shown. From this we can see that $BaCl_2$ gives three, KCl two; CaF_2, KF and NaCl one foreign particles. However, NaF and AlF_3 both give no foreign species.

From this it has been concluded (5) that the dissociation of cryolite follows the scheme:

$$Na_3AlF_6 = 3\ Na^+ + 3\ F^- + AlF_3$$

However, the fact that small additions of sodium flouride or aluminium flouride have a negligible efect on the freezing point of cryolite only proves that cryolite dissociates into products that must be possible to build up from the constituenst of sodium flouride and aluminium flouride. With respects to the dissociation scheme itself, there are several possibilities.

The formation of ploynuclear complex ions as $Al_2F_{11}^{5-}$, $Al_2F_{10}^{4-}$ and $Al_2F_9^{3-}$ (Schema Ia, Ib and Ic) in the melt seems not to be very reasonable.

$$2\ AlF_6^{3-} = Al_2F_{11}^{5-} + F^- \qquad \text{(Scheme Ia)}$$

$$2\ AlF_6^{3-} = Al_2F_{10}^{4-} + 2\ F^- \qquad \text{(Scheme Ib)}$$

and

$$2\ AlF_6^{3-} = Al_2F_9^{3-} + 3\ F^- \qquad \text{(Scheme Ic)}$$

The polynuclear ions are characterized by Al-F-Al type of binding which is known in solid crystal structures as chiolite, $Na_5Al_3F_{14}$, sodium tetrafluoroaluminate, $NaAlF_4$, and weberite, Na_2MgAlF_7. These compounds, however, are not stable, they all disproportionate either in the solid state ($NaAlF_4$) or in the liquid state ($Na_5Al_3F_{14}$ and Na_2MgAlF_7) (1).

The first scheme represented by a simple dissociation would be:

$$Al_6^{3-} = AlF_5^{2-} + F^- \qquad \text{(Scheme II)}$$

Here one AlF_6^{3-} octahedron loses one fluoride ion to form an AlF_5^{2-} group. However, the coordination number 5 is very rare.

Table 1

Freezing point depressions of cryolite with the corresponding number of foreign particles added.

Added substance	Depression
NaF	0
AlF_3	0
NaCl	1
KF	1
CaF_2	1
KCl	2
$BaCl_2$	3

The next step in the dissociation of the AlF_6^{3-} ion may be represented by

$$AlF_6^{3-} = AlF_4^- + 2\ F^- \qquad \text{(Scheme III)}$$

Assuming step-wise dissociation, subsequent to Scheme III the following occurs,

$$AlF_4^- = AlF_3 + F^-$$

The over-all reaction would be

$$Na_3AlF_6 = 3\ Na^+ + 3\ F^- + AlF_3$$

This is the dissociation process suggestede by Rolin (5), based on the observation that $\Delta t/m$ for cryolite approaches zero when the concentration of aluminium fluoride approaches zero. It will be apparent that this observation may be explained by other dissociation schemes as well.

The last scheme to be considered here is

$$AlF_6^{3-} = Al^{3+} + 6\ F^- \qquad \text{(Scheme IV)}$$

In this scheme it is supposed that when one Al-F bond is broken the whole complex falls apart. Schemes III and IV herefore must be regarded as the limiting cases for the intermediate dissociation steps.

Dissociation calculations have been carried out on all this different schemes. In the calculations it was assumed that the mixtures behaved like ideal mixtures of anions and cations. The method of calculations is too tedious to discuss here, a simplification of the method has been published by Brynestad (6).

In the Fig. 3 the result of the calculations for the six different schemes is shown along with the experimentally determined liquidus line.

The clossest agreement between the observed and the calculated liquidus curve was obtained when cryolite was assumed to dissociate according to the Scheme III :

$$AlF_6^{3-} = AlF_4^- + 2\,F^-$$

with a dissociation constant equal to 6.027×10^{-2}.

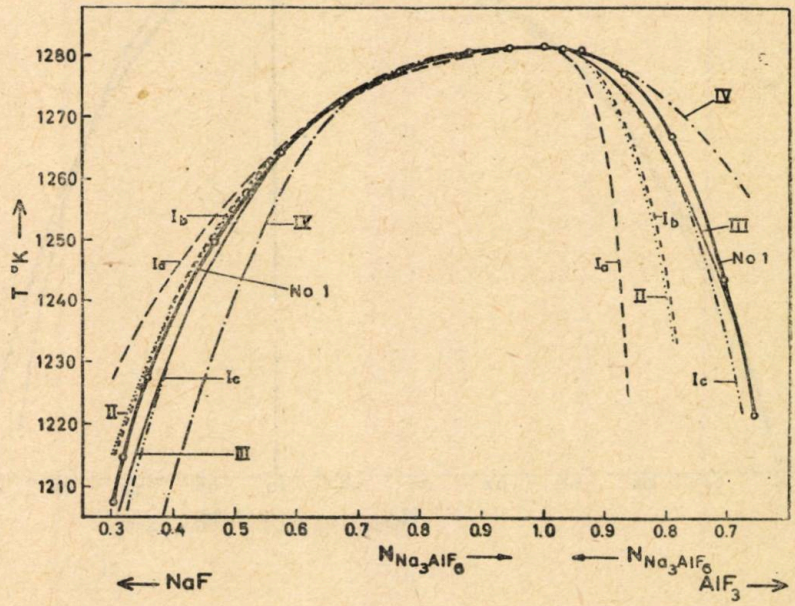


Fig. 3

To get an indication of the sensitivity of this type of calculation with respect to variations in the heat of dissociation, calculations on Scheme III have been carried out for two different heats of dissociation, 22000 cal/mole and 10000 cal/mole respectively. The first value is form a paper by Frank and Foster (7) of Alcoa. This comparison is shown in Fig. 4. By taking into account the heat of dissociation of the cryolite anion, it can be seen from this figure that one gets a somewhat better fit with the experimental data by assuming a heat of dissociation of about 10000 cal/mole for Scheme III. However, these calculations are not conclusive with regard to an estimation of the heat of dissociation, because the concept of ideality is a rather rough approximation, and therefore more quantitative conclusions from such calculations are not justified.

In judging the merits of the different schemes the extent of agreement between the calculated and the experimental curves is not the only point

of importance. Not only should consideration be given tot the agreement between the calculated curves, and the experimental data, but it is more important that the disociation scheme itself may sense chemically. On this basis, it may be concluded that the Schemes Ia, Ib, and Ic and II are rather improbable.

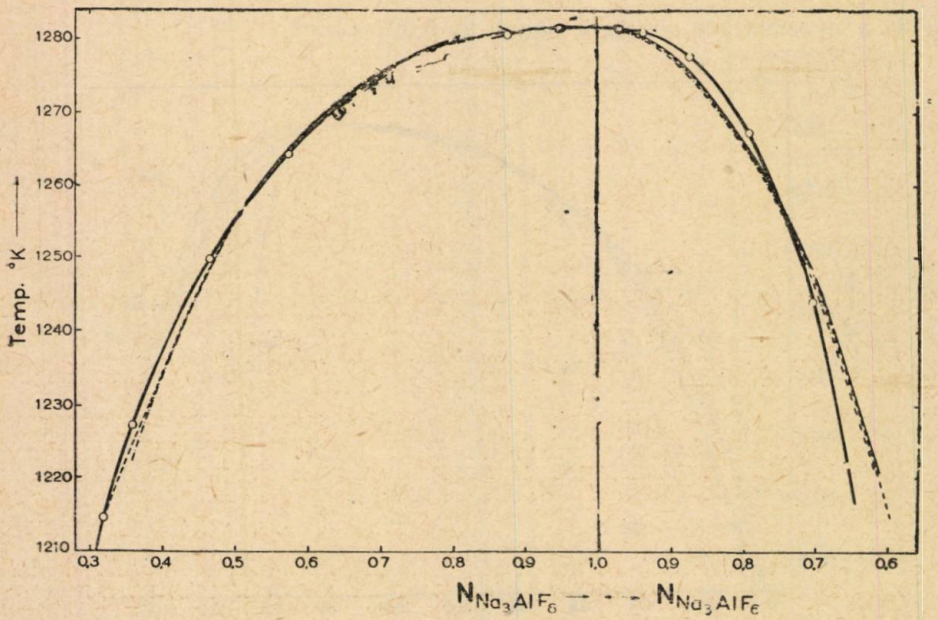


Fig. 4

From a mthematical point of view it is interesting to note that there is a good correlation between the calculated curve from Scheme Ic and the experimental data. However, from a structural point of view, the ion $Al_2F_9^{3-}$ is quite improbable as already mentioned. Regrading schemes III and IV it may be said that scheme III fits somewhat better with the experimental curve than does scheme IV.

Scheme III has also now been suported by investigations from several others as Rolin (8), Landon and Ubbelohde (9), and Frank and Foster (7).

The support is given by Rolin from cryoscopic measurements, by the work of Landon and Ubbelohde from considerations of the chemical bindig in the NaF-AlF_3 melts, and by Frank and Foster on the basis of vapour pressure, conductivity, and density measurements of the same system.

The dissociation of Na_3AlF_6 in a solvent that is indifferent with respect to the dissociation equilibrum has also been studied at our Institute. For this purpose the phase diagram of the system Na_3AlF_6—Na_2SO_4 was determined (10). Using our measurement on the

sulphate side of the system calculations according to four different models were made. These are shown in Fig. 5. The full line on this figure corresponds to the calorimetrically determined heat of fusion of sodium sulphate. The only model which agrees with this heat of fusion is the

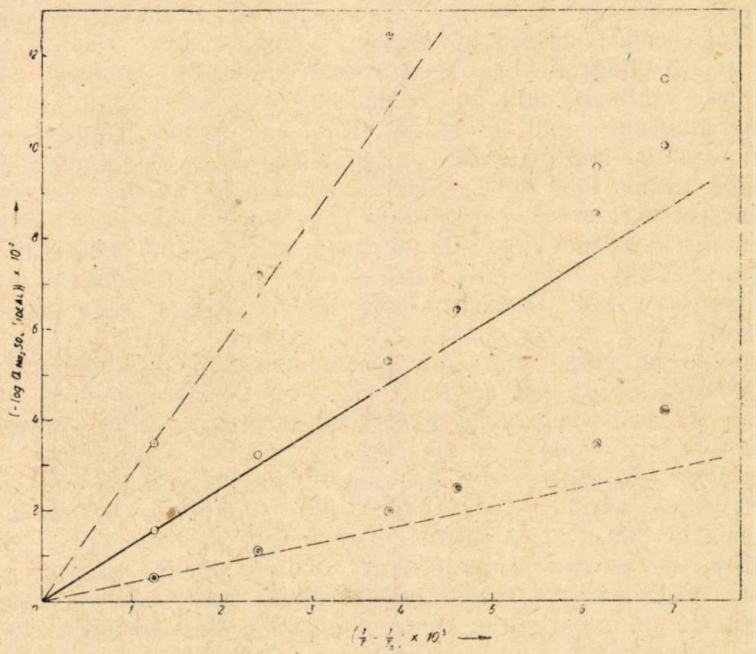


Fig. 5

one represented by scheme III, indicating that molten cryolite consists of the structural elements Na^+, AlF_6^{3-}, AlF_4^- and F^- ions (with AlF_6^{3-} partly dissociated).

Thus, the physical properties of liquid cryolite are best explained by the model that these particles are present. Definitely, it can be said that the aluminium ion is mainly present in the form of AlF_6^{3-} complex ions.

IV. Structural properties of alumina in molten cryolite.

Up to now have only discussed the structural elements in the binary system $NaF—AlF_3$. This was necessary for a similar discussion on the more intricate ternary mixture $NaF—AlF_3—Al_2O_3$. This system and particularly the region which consists of cryolite with small additions of aluminium oxide corresponding to the electrolyte used in the production of aluminium will be discussed.

The solubility and the solution mechanism of alumina in molten cryolite have received considerable attention during the later years because of its industrial importance. Thus the phase diagram for the

system cryolite-aluminium oxide has been studied by several scientists. Even though the diagram given by the different workers differ considerably, all investigations up to the last few years indicated an appreciable solid solubiilty of aluminium oxide in cryolite.

However, recent investigations (1) at our Institute show clearly no evidence of solid solubility of aluminium oxide in cryolite. The question has been examined by several methods:

The phase diagram has been redetermined by carefully controlled cooling-curve methods, and no indications of a solid solubility curve in the phase diagram could be found. This was further supported by the appearance of the break in the cooling curve of the solid cryolite-aluminium oxide system at 560°C which corresponds to the transforamtion temperature of pure cryolite from the cubic to the monoclinic modification. This demonstrated that there is no measurable solid solubility at this temperature. X-ray diffraction, microscopic investigations, and density measurements of both quenched and slowly cooled samples confimed these results.

It should be noted that this system forms a pseudobinary section of the ternary reciprocal system sodium fluoride-aluminium flouride-aluminium oxide-sodium oxide while the system cryolite-sodium aluminate ($NaAlO_2$) is a part of this ternary system. This system has also been carefully investigated by the same methods as mentioned for the system cryolite-aluminium oxide. No solid solubility was found on the cryolite side of this system either.

Neither the earlier investigations of the phase diagram cryolite-aluminium oxide nor the recent ones indicate any stable compound the components in the solid state. Hence the phase diagram does not furnish any direct evidence as to which complexe might be formed when aluminium oxide is dissolved in molten cryolite.

As may be seen from Table 2, several authors have proposed previously that aluminium oxide dissolves in molten cryolite forming complex ions containing two oxigens. The measurements of the freezing point depression of cryolite by addition of Al_2O_3 or $NaAlO_2$ should give information on the number of oxygen ions in the complex.

The well known freezing point depression equation, mentioned before (equation 3), was here used in this form:

$$\frac{c\,n_2}{n_1 + n_2} = \frac{\Delta H_f}{R}\,\frac{\Delta T}{1284 - \Delta T} \qquad (4)$$

Here n_1 is the weighed-in number of moles of cryolite and n_2 is weighed-in number of moles of oxide. ΔH_f is the heat of melting of cryolite, 27.64 kcal, with the melting point at 1284°K. The parameter c is introduced to designate the number of „foreign" particles added to the cryolite per mole of Al_2O_3 respectavely of $NaAlO_2$ added.

The results of the freezing point depression calculations are given in Fig. 6. Here the experimental points for addition of sodium aluminate are shown with filled circles, and those for aluminium oxide addition

with open circles. These data are compared with the calculated liquidus lines for values of the number of „foreign" particles eqaul to 1, 2, and 3. It is seen that for small additions, the data indicate that two „foreign" particles have been added for each $NaAlO_2$, and three „foreign" particles for each Al_2O_3 added. This strongly suggests that the single oxygen

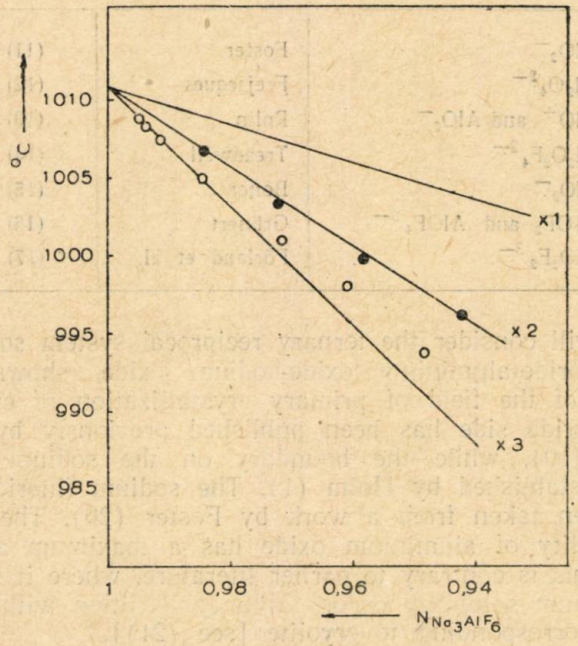


Fig. 6

ions are responsible for the observed freezing point lowering, since sodium ions and aluminium ions as mentioned are already present in the melt.

This result is not surprising if we consider other evidence regarding the ionic nature of aluminium oxide. In Table 3 and 4 is shown, first, a table of electric conductivity for various oxides at their melting points, and next a table of the viscosities, also at the metling points. It is seen that the conductivity of aluminium oxide is many orders of magnitude higher than of the network formers B_2O_3 and SiO_2, and likewise that the viscosity is much lower. In both respects the aluminium oxide shows a closer resemblance to the typical ionic compounds magnesium oxide or lithium chloride. Hence, it may be assumed that the oxygen bridges characteristic for boron and silicon oxides are scarcely present in molten aluminium oxide.

On the other hand, configurations of the type O—Al—O, corresponding to the aluminate ion AlO_2^{2-}, are also unlikely, since the cryoscopic data indicate unpaired oxygen ions as already shown.

Table 2

Different proposals found in the literature regarding the structural elements in molten cryolite with added aluminium oxide.

Group	Author	Reference
AlO_2^-	Foster	(11)
$Al_2O_4^{2-}$	Frejacques	(12)
AlO^+ and AlO_2^-	Rolin	(13)
$Al_2O_2F_4^{2-}$	Treadwell	(14)
AlO_2^-	Boner	(15)
$AlOF_3$ and $AlOF_4^{3-}$	Grünert	(16)
$AlO_2F_2^{3-}$	Förland et al.	(17)

Next we will consider the ternary reciprocal system sodium fluoride-aluminium fluoride-aluminium oxide-sodium oxide, shown in Fig. 7. The boundary of the field of primary crystallization of cryolite on the aluminium flouride side has been published previously by Fenerty and Hollingshead (19), while the boundary on the sodium fluoride side recently was established by Holm (1). The sodium fluoride side of the system has been taken from a work by Foster (20). The results show that the solubility of aluminium oxide has a maximum at the cryolite composition. This is contrary to earlier literature, where it is often stated that the maximum solubility occurs at a composition with more sodium fluoride than corresponding to cryolite [see (21)].

The phase diagram seems to suggest that the solubility of aluminium-oxygen compounds in foluride melts depends on the ratio of aluminium to oxygen. A certain minimum concentration of Al^{3+} in the fluoride melt seems to be necessary for the dissolution of aluminium oxide. For example, both aluminium oxide and sodium aluminate $NaAlO_2$ are virtually insoluble in sodium fluoride, whereas both dissolve in cryolite.

Table 3

Specific conductivity for some oxides. (Mackenzie (18))

Oxide	T_f °C	Specific conductivity (ohm^{-1} cm^{-1})
B_2O_3	450	10^{-6}
GeO_2	1115	10^{-5}
SiO_2	1710	10^{-5}
MgO	2800	35
CaO	2580	40
Al_2O_3	2050	15

The eutectic composition in the cryolite-sodium aluminate system corresponds to the overall formula $Na_5Al_2OF_9$. The eutectic in the system aluminium oxide-cryolite is at 20 mole% Al_2O_3 corresonding to the

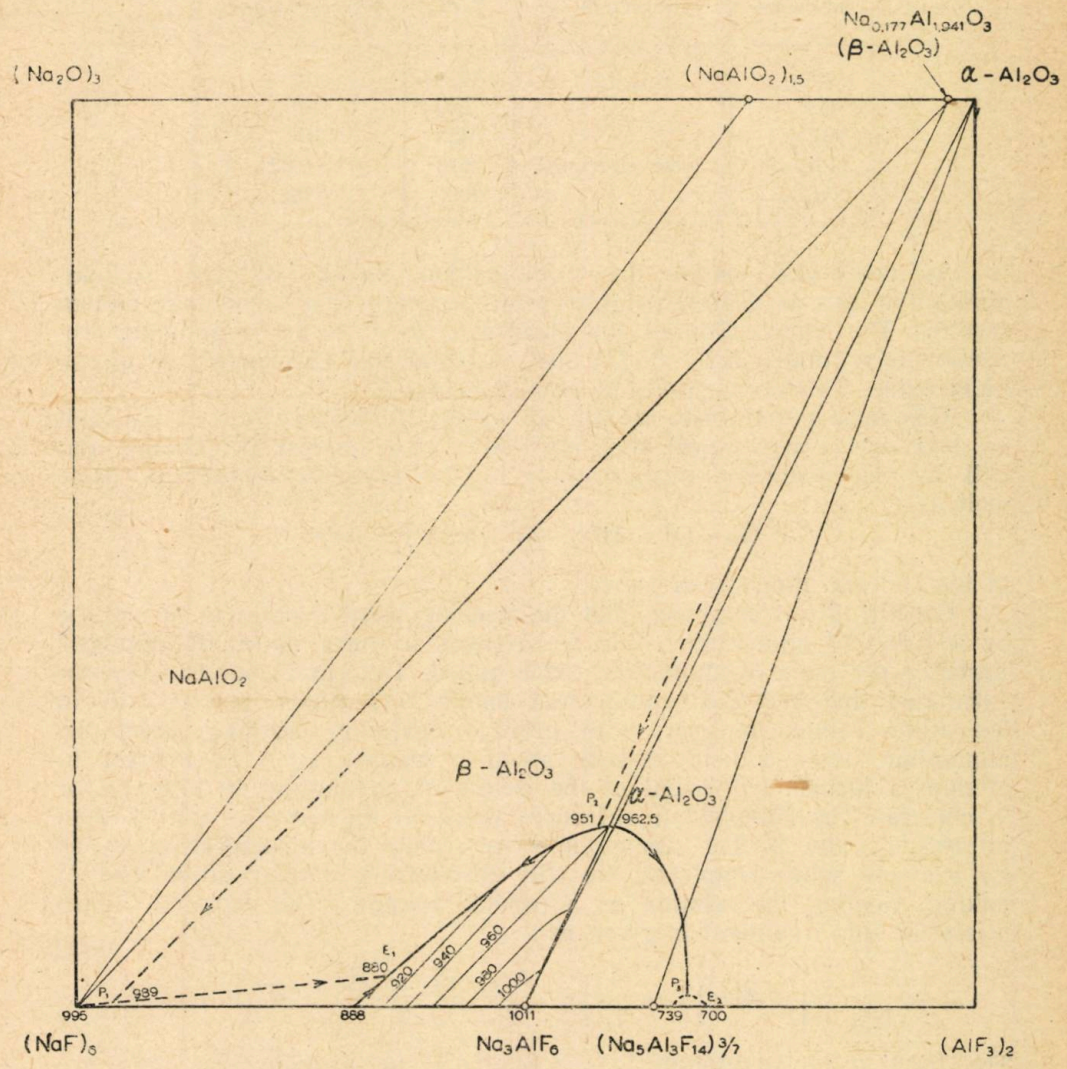


Fig. 7

overall formula $Na_4Al_2OF_8$. In both cases we notice that the fluoride melt is saturated with respect to aluminium oxide when the ratio Al/O attains the value 2 : 1. In thus it seems that to get an appreciable concentration of O^{2-} ions in the melt the ratio Al/O has to exceed this value.

Table 4

Vihcosity for some oxide and halogenide melts. (Mackenzie (18))

Substance	Structure	T_f °C	Viscosity (poise)
SiO_2	network	1710	10^7
BeF_2	„	540	10^6
B_2O_3	„	450	10^5
LiCl	ionic structure	613	0,02
Al_2O_3	„ „	2050	0,6

As mentioned earlier the configuration Na—F—Al with sodium-aluminium ions as nearest neighbours are strongly favored in pure molten cryolite. The composition of the electrolyte used in the aluminium production is normally about 87.5 mole% cryolite and 12.5 mole% of aluminium oxide. This corresponds to an Al/O ratio of 3 : 1.

This means that there is still an excess of sodium ions in the melt so that one would expect that Na^+—Al^{3+} next nearest neighbours also will be the dominant configuration in the cryolite- aluminium oxide melt as

$$Na^+ \; O^{2-} \; Al^{3+} \quad \text{or} \quad Na^+ \; F^- \; Al^{3+}$$

at the concentration given above.

On Fig. 5 it was shown that the freezing point depression of cryolite by addition of aluminium oxide corresponds to three moles of „foreign" particles per mole of aluminium oxide added. The agreement between the calculated line and the experimental points was almost perfect only in the dilute range, however, with positive deviation occuring when the aluminium oxide content exceeds about 2 mole%. It is of interest to attempt a further refinement of the treatment, attempting to interpret or to calculate the complete liquid curve down to the eutectic. Rather than introducing any further assumptions regarding the structural units, as for example some complexes, we will introduce a small positive heat of mixing, treating the mixture as a regular solution. The equation appropriate for this treatment is given as :

$$b = \frac{1}{N_{Al-O}^2}\left[-\Delta H_f\left(T - \frac{T}{T_f}\right) + \frac{\Delta c_p}{2}\,\frac{(T_f - T)^2}{T} - RT \ln N_{Al-F}\right]$$

The fraction of aluminium ions surrounded by fluoride ions only are denoted N_{Al-F} while the fraction of Al^{3+} ions surrounded by one oxygen ion and flouride ions are denoted N_{Al-O}. The two fractions N are expressed in terms of the weighed-in mole fraction n_1 of cryolite and n_2 of aluminium oxide.

$$N_{Al-F} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + 2n_2} \quad \text{and} \quad N_{Al-O} = \frac{3n_2}{n_1 + 2n_2}$$

Choosing a value of about +2500 cal for the parameter b, it is possible to explain the course of the liquid line of the system. This is demonstrated on the Fig. 8, where the results of the reverse calculation is presented, with b-values calculated from the experimental data. Is is seen that the b-values thus caculated remain fairly constant about 2.5 kcal.

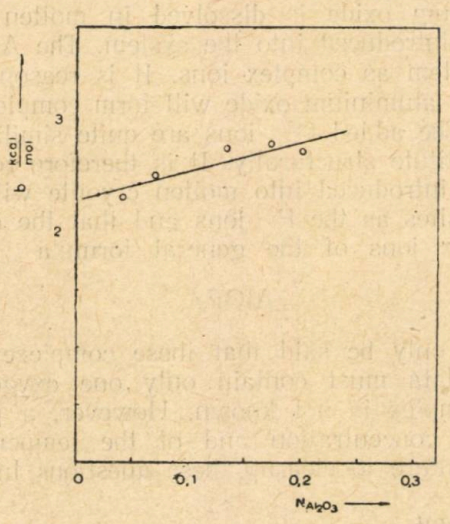


Fig. 8

It was mentioned at the outset that cryolite is a rather stable compound and that the complex anion AlF_6^{3-} would be expected to be present to a major extent also in molten cryolite. On the other hand, it cannot be compared with complex anions like sulphate, carbonate or nitrate anions where covalent bonds are prevalent in the complex. As shown in a work by Frank and Foster (22) who measured transport properties in this system, it is not possible to distinguish between the Al^{3+} ions originating from the added aluminium oxide and those from the cryolite From the present work it also appears that all the anions of the melt associate themselves equally to all the Al^{3+} ions of the melt.

V. Conclusion.

As a summary it might be said that our informations on the electrical conductivity and the viscosity of liquid aluminium oxide indicate that pure aluminium oxide is predominantly ionic in the molten state.

Regarding the structure of pure molten cryolite, the Na^+ and Al^{3+} ions are so different that they can not substitute structuraly for each other. These and several investigations show that free Al^{3+} ions do not

appear to any significant extent in molten cryolite. The most significant stuctural elements in liquid cryolite appear to be:

$$Na^+, \quad AlF_6^{3-}, \quad AlF_4^-, \quad \text{and} \quad F^-$$

wich means that the AlF_6^{3-} ion by the fusion process is partially dissociated into AlF_4^- and 2 F^- ions.

When aluminium oxide is dissolved in molten cryolite, Al^{3+} ions and O^{2-} ions are introduced into the system. The Al^{3+} ions are already present in the system as complex ions. It is reasonable that the added Al^{3+} ions from the aluminium oxide will form complex ions with free F^- ions in the melt. The added O^{2-} ions are quite similar in size to the F^- ions and can substitute structurally. It is therefore reasonable to assume that the O^{2-} ions introduced into molten cryolite will occupy essentially the same type of sites as the F^- ions and that the oxgen ions therefore may form complex ions of the general formula

$$AlOF_x^{1-x}$$

At present it can only be said that these complexes from the freezing point depression data must contain only one oxygen. The number of fluorine in the complex is not known. However, a priori, these can be a funciton of the concentration and of the temperature as well. We hope in the near future to clearup these questions further.

Acknowledgement.

These investigations have been supported by the Royal Norwegian Council for Scientific and Industrial Research.

REFERENCES.

(1) *Holm, J. L.:* „Undersökelse av sturktur og faseforhold for en del systemer med tilknytning til aluminiumelektrolysen". Institute of Inorganic Chemistry, The Technical University of Norway, 1963.

(2) *Coughlin, J. P.*, J. Am. Chem. Soc. *80*, 1802 (1958).

(3) *Grjotheim, K.:* „Contribution to the Theory of Aluminium Electrolysis". Det Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter 1956, Nr. 5, Bruns Bokhandel, Trondheim, Norway.

(4) *Förland, T.:* „Theormodynamic Properties of Systems of Fused Salts", Chapter in „Fused Salts", ed. by Sundheim, McGraw-Hill Book Co., N. Y. 1962.

(5) *Rolin, M.:* Ann. Phys. Sci. 12 *6*, 970 (1951).

(6) *Brynestad, J.*, Z. Phys. Chem., Neue Fölge, *30*, 123 (1961).

(7) *Frank, W. B.* and *Foster, L. M.*, J. Phys. Chem. *64*, 95 (1960).

(8) *Landon, G. J.* and *Ubbelohde, A. R.*, Proc. Roy. Soc. *A240*, 160 (1957).

(9) *Rolin, M.*, Bull. Chim. Soc. France, 1960, 681.

(10) *Grjotheim, K., Halvorsen, T.*, and *Urnes, S.*, Can. J. Chem., *37*, 1170 (1959).

(11) *Foster, Jr., P. A.* and *Frank, W. B.*, J. Electrochem. Soc. *107*, 997 (1960).

(12) *Frejacques, M.*, Bull. Soc. Franc. Electr. *9*, 684 (1949).

(13) *Rolin, M.*, Ann. Phys. *6*, 970 (1951).

(14) *Treadwell, W. D.*, Schweiz. Arch. angew. Wiss. u. Techn. *6*, 69 (1940).

(15) *Boner, J. F.*, Helv. Chim. Acta *33*, 1137 (1950).

(16) *Grünert, E.*, Z. Elektrochem. *48*, 393 (1947).

(17) *Förland, T., Storegraven, H.*, and *Urnes, S.*, Z. Anorg. u. Allgem. Chem. *279*, 205 (1955).

(18) *Mackenzie, J. D.*: „Oxide Melts". Adv. in Inorg. Chemistry and Radiochemistry, vol. 4, p. 423. Academic Press Inc., N. Y. 1963.

(19) *Fenerty, A.* and *Hollingshead, E. A.*, J. Electrochem. Soc. *107*, 993 (1960).

(20) *Foster, Jr., P. A.*, J. Am. Chem. Soc. *45*, 145 (1962).

(21) *Belyajev, A. I.*: „Metallurgie des Aluminiums", VEB Verlag Technik, Berlin 1956.

(22) *Frank, W. B.* and *Foster, L. M.*, J. Phys. Chem. *61*, 1531 (1957).

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СВЯЗАННЫЕ СО СТРУКТУРОЙ СПЛАВОВ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ЭЛЕКТРОЛИЗЕ АЛЮМИНИЯ

(Резюме)

На основе критического обсуждения физико-химических свойств (фазовых диаграмм), криоскопического понижения температур, электропроводимости, вязкости, реннтгеновских спектров), делаются выводы по поводу химической структуры расплавленного криолита и криолито-глиноземных расплавов ($Na_3AlF_6 + Al_2O_3$)-указывается что наиважнейшие структуры элементы в чистом криалито-глиноземном расплаве являются: Na^+, AlF_6^{3-}, AlF_4^- и F^-.

Наличие свободных ионов Al мало вероятно. Чистый плиноэем состоит из ионов Al^{3-} и O^{2-}. При растворении алюминия в криолите сохраняет сбаих свойства ионы O^{2-}, размеры которых равны ионам F^-. Следует понимать, что ионы алюминия образуют комплексные ионы типа $AlOF_x^{1-x}$ в которых число ионов фтора не смогли точно установить.

SOME PROBLEMES CONNECTED WITH THE STRUCTURE OF THE BATH FOR THE ALUMINIUM ELECTROLYSIS

(Summary)

On the basis of a critical discussion on the physical-chemical properties (the phase diagram, cryoscopic depression, electric conductivity, viscosity, X-ray spectra), conclusions have been drawn with a view to the chemical structure of the molten cryolite and of the molten mixture of aluminum cryolite ($Na_3AlF_6 + Al_2O_3$).

It is illustrated that the most important structural elements in the pure molten cryolite are: Na^+, AlF_6^{3-}, AlF_4^- and F^-.

The occurring of free ions Al^{3+} is very unlikely. Pure alumina is made up of ions Al^{3+} and O^{2-}. But on dissolving aluminium into cryolite, only the O^2 —ions maintain their individuality, being of similar sizes with the F^- ions.

It is likely that the aluminium ions make up complex ions of the $AlOF_x^{1-x}$ type in which the number of clorine ions could not be established with accuracy as yet.

CERTAINS PROBLÈMES CONCERNANT LA STRUCTURE DES BAINS UTILISÉES A L'ÉLECTROLYSE DE L'ALUMINIUM

(Résume)

A partir d'une discussion critique des propriétés physico-chimiques (diagramme de fusion dépression cryoscopique, conductibilité électrique, viscosité, spectres des rayons X) on conclut sur la structure chimique du cryolite fondu et du mélange fondu de cryolite — alumine ($Na_3AlF_6+Al_2O_3$). On montre que les éléments de structure les plus importants dans le cryolite pur fondu sont: Na^+, AlF_6^{3-}, AlF_4^-, et F^-. L'existence des ions libres Al^{3+} est très peu probable. L'alumine pure est formée d'ions Al^{3+} et O^{2-}. Mais à la dissolution de l'alumine dans le cryolite, sulement les ions O^{2-}, qui ont des dimensions similaires aux ions F, gardent leur individualité. Il est probable que les ions d'aluminium forment des ions complexes du type $AlOF_x^{1-x}$ ou le nombre des ions de fluore n'a pas été encore exactement établi.

EINIGE FRAGEN IN BEZUG AUF DIE STRUKTUR DER IN DER ELEKTROLYSE DES ALUMINIUMS VERWENDETEN SCHMELZEN

(Zusammenfassung)

Auf einer kritischen Betrachtung der physikalischchemischen. Eigenschaftn fussend (Phasendiagramm, Viskosität, X — Strahlenspektrum (Röntgenstrahlenspektrum), werden Schlussfolgerungen in Bezug auf die chemische Struktur des geschmolzenen Kryolit und des geschmolzenen Gemisches von Kryolit — Tonerde ($Na_3AlF_6 + Al_2O_3$), gezogen. Es wird gezeigt, dass die wichtigsten zusammensetzenden Elemente im reinen geschmolzenen Kryolit: Na^+, ALF_6^{3-}, AlF_4^- und F^- sind.

Das Vorhandensein der freien Al^{3+} Ione ist sehr unwahrscheinlich. Die reine Tonerde ist aus Al und O^{2-} Ionen zusammengesetzt. Aber bei Auflösung der Tonerde in Kriolit, behalten ihre Individualität nur die O^{2-} Ione, welche von ähnlicher Grösse wie die F^- Ione sind. Es ist wahrscheirlich, dass die Aluminium-Ione komplexe Ionen der Art $ALOF_x^{1-x}$ bilden, in welchen die Zahl der Fluor-Ionen noch nicht mit Sicherheit festgesetzt werden konnte.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

RECUPERAREA VANADIULUI DIN CATALIZATORI UZAȚI CU AJUTORUL SCHIMBĂTORILOR DE IONI

T. IONESCU, M. FLOAREA, F. STOICA, G. TUDORACHE

La fabricarea acidului sulfuric prin procedeul de contact se folosesc catalizatori pe bază de pentoxid de vanadiu, procurați din import. După o perioadă de funcționare, ca urmare a reacțiilor secundare, a nerespectării regimului termic optim, precum și a altor cauze, masa catalitică își pierde activitatea chimică, prin trecerea pentoxidului de vanadiu în combinații inactive (sulfat de vanadil și vanadil vanadați) [1], [2], [3].

Avînd în vedere că vanadiul este un metal deficitar, recuperarea lui din catalizatorii uzați prezintă un interes deosebit. Aceste mase catalitice pot constitui o sursă pentru obținerea de vanadiu.

În lucrarea de față ne-am propus să studiem recuperarea vanadiului din catalizatorii epuizați, în stare cît mai pură, cu ajutorul rășinilor schimbătoare de ioni. În acest scop s-a studiat extracția vanadiului din masa catalitică inactivă, folosind ca agent de extracție soluții diluate acide, alcaline și apă.

În fiecare caz s-a urmărit variația cantității de pentoxid de vanadiu extras în funcție de timpul de extracție și concentrația agentului de extracție.

Extracția s-a făcut prin fierbere, sub agitare continuă, raportul optim dintre catalizator și agentul de extracție fiind 1/40.

Rezultatele sînt date în tabela 1 ; cea mai bună extracție a fost realizată cu soluția de hidroxid de sodiu 2,5%, după 5 ore de fierbere.

Extractele obținute au fost prelucrate în vederea recuperării vanadiului sub formă de vanadat de amoniu, sau pentoxid de vanadiu. În acest scop s-a căutat să se rețină vanadiul, din soluțiile respective, pe anioniți și cationiți. Din soluțiile de acid azotic și hidroxid de sodiu, vanadiul nu este reținut pe rășini schimbătoare de ioni.

În soluțiile rezultate de la extracția cu apă, vanadiul se află sub formă de sulfat de vanadil. S-a constatat că ionul vanadil este bine reținut de cationiții puternic acizi. În același timp sînt reținuți și ceilalți cationi existenți în soluție ; la eluarea cu acid sulfuric 10% se obțin soluții con-

Tabela 1

Extracția vanadiului din catalizatorii cu 8,2% V_2O_5.

Agent de extracție	Concentrația agentului de extracție %	Timp de extracție h	V_2O_5 extras %	Randament %
HNO_3	1	1	5,00	60,9
		3	5,78	70,5
		5	5,92	72,2
	5	1	6,00	73,1
		3	6,38	77,8
		5	6,50	79,2
	10	1	7,23	88,1
		3	7,85	95,7
		5	7,62	92,9
NaOH	0,5	1	2,45	30,0
		3	2,77	33,7
		5	2,83	34,5
	1	1	2,71	33,0
		3	5,87	71,5
		5	7,15	87,2
	2,5	1	6,1	74,4
		3	6,92	84,3
		5	8,00	97,5
H_2O	—	1	3,7	45,1
		3	5,0	60,9
		5	6,8	83,0

centrate de sulfet de vanadil, impurificate cu cationii care se eluează odată cu sulfatul de vanadil.

Datele din literatură [4], [5] arată că vanadiul formează cu perhidrolul compuși peroxidici, a căror compoziție depinde de concentrația acidului în soluția respectivă.

În soluții puternic acide se formează compuși ai cationului $\left(V\begin{matrix}O\\O\end{matrix}\right)^{3+}$ iar în soluții slab acide se formează acidul pervanadic, care este destul de stabil.

Această însușire a fost folosită pentru separarea vanadiului de ceilalți cationi, prin schimb ionic, din soluții acide. Vanadiul din soluția acidă a fost trecut în forma anionică prin tratare cu H_2O_2 30% folosindu-se 6 cmc H_2O_2 la 1 litru soluție cu 0,2% V_2O_5.

Reținerea cationilor din această soluție, de către cationiți, nu este influențată de acțiunea oxidantă a perhidrolului.

Se cunoaște că reținerea maximă a ionului Fe^{3+} pe rășini cationice are loc dintr-o soluție de acid sulfuric 0,1 n.

Avînd în vedere acest lucru, s-a corectat aciditatea soluției pînă la 0,1 n; la extracția cu apă se obține o soluție acidă aproximativ 0,05 n.

Din soluţia cu aciditatea corectată, şi tratată cu perhidrol, se poate separa cationul Fe^{3+} prin reţinerea pe răşini cationice puternic acide.

Pentru această separare au fost experimentate următoarele răşini cationice: Allasion CS, Kastel C-300, Wofatit CP-300, Amberlite IRC-50, Dowex-50 × 10, cationit romînesc CS-1 şi Zeo Karb-225, toate sub forma HR; regenerarea răşinilor s-a făcut cu acid clorhidric 4%.

Cea mai mare capacitate de reţinere a ionului Fe^{3+}, din soluţia cu 0,2% V_2O_5 şi 0,08% Fe, o manifestă răşina cationică Dowex-50 × 10; 100 g din această răşină reţine total fierul din 10,4 l soluţie. Efluentul respectiv a fost concentrat pînă la un conţinut de 1% V_2O_5.

Din această soluţie s-a făcut precipitarea metavanadatului de amoniu, sau a pentoxidului de vanadiu.

Pentru precipitarea metavanadatului de amoniu s-a adăugat NaOH 50% pînă la pH 8,5—9, apoi soluţie de clorură de amoniu pînă la pH=7,0—7,2.

Alcalinizarea soluţiei se poate face şi cu hidroxid de amoniu şi apoi precipitarea metavanadatului de amoniu cu clorură de amoniu.

Precipitarea pentoxidului de vanadiu a fost efectuată, din soluţia acidă concentrată, prin oxidarea cu acid azotic, la pH=2—2,5. Precipitarea a fost cantitativă.

În afară de procedeul descris, de obţinere a metavanadatului de amoniu, respectiv a pentoxidului de vanadiu, cu ajutorul schimbătorilor de ioni, s-a studiat şi posibilitatea obţinerii metavanadatului de amoniu din soluţii rezultate de la extracţia cu hidroxid de sodiu, care nu pot fi prelucrate prin schimb ionic. S-a folosit soluţia obţinută prin extracţia catalizatorilor uzaţi, cu hidroxid de sodiu 2,5% care conţine 0,66% V_2O_5; soluţia este lipsită complet de fier. În această soluţie (pH=9,5 — 10) s-a făcut precipitarea metavanadatului de amoniu cu clorură de amoniu, la temperatura de 35—40°C.

Concomitent cu vanadatul de amoniu precipită şi aluminiul din soluţie sub formă de $Al(OH)_3$; se obţine deci metavanadat de amoniu impur, conţinînd 67% V_2O_5. Pentru a se obţine şi în acest caz metavanadat pur s-a separat în prealabil aluminiul sub formă de $Al(OH)_3$, coborîndu-se pH-ul la 7,5 prin adăugare de acid clorhidric. Prin separarea ulterioară a precipitatului de $Al(OH)_3$ rezultă însă pierderi apreciabile de vanadiu.

Concluzii.

— Extracţia vanadiului din catalizatorii uzaţi, de la industria acidului sulfuric, se poate realiza prin fierberea cu apă timp de 5 ore, în care caz se recuperează aproximativ 85% din vanadiul existent în catalizator.

Cel mai mare randament de extracţie s-a obţinut cu NaOH 2,5% în care caz se recuperează 99% din vanadiul existent în catalizator.

Avînd în vedere că de obicei catalizatorii uzaţi nu mai sînt valorificaţi, randamentul de extracţie cu apă, faţă de randamentul de extracţie cu soluţie de NaOH, nu influenţează costul produsului final, cu atît mai mult

cu cît s-a constatat că, folosind ca agent de extracție apa, se poate obține fie matavanadat de amoniu, fie pentoxid de vanadiu.

— Reținerea cationilor din soluția apoasă se realizează cantitativ cu ajutorul cationiților puternic acizi, în special cu Dowex-50X10.

— Din efluenții obținuți, prin trecerea peste cationiți, metavanadatul de amoniu, sau pentoxidul de vanadiu, se separă cantitativ în stare pură.

— Pentru obținerea metavanadatului de amoniu, sau pentoxidului de vanadiu, în stare pură, este indicat să se separe vanadiul de ceilalți cationi cu rășini schimbătoare de ioni.

Pentru recuperarea vanadiului, în scopul preparării unei noi mase catalitice, este indicat procedeul de extracție a vanadiului din catalizatorii uzați cu soluții alcaline. Hidroxidul de aluminiu care precipită odată cu metavanadatul de amoniu nu trebuie separat deoarece este un constituent al masei catalitice.

BIBLIOGRAFIE

1. *V. Diaconescu, Em. Poppel, D. Feldmann*, Buletinul Inst. Politehnic Iași tom 1—2 (1955).

2. *P. Paquiez*, L'Industrie Chimique et le Phosphate, 47, 354—69 (1960).

3. *G. D. Lirotkin*, Jurnal prikl. him., 245—248 (1948).

4. *L. M. Orlova*, Zavod. Lab. nr. 1, 29 (1955).

5. *I. P. Alimarin, A. M. Medvedeva*, Zavod. Lab. nr. 8, 911 (1954).

6. *Robert Watter*, J. nucl. inorg. chem. 6, 58—62 (1958).

7. Kâgyâ Kagaku Zasshi, 59, 1121—4 (1956) C.A. 52, 12704 (1958).

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ВАНАДИЯ ИЗ ПЕРЕРАБОТАННЫХ КАТАЛИЗАТОРОВ СЕРНОКИСЛОТНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

(Резюме)

Тяжело изучена возможность извлечения ванадия из переработанных катализаторов сернокислотной промышленности. При помощи ионообменных смол получен ванадий в виде NH_4VO_3 и V_2O_5 чистой формы.

THE RECOVERY OF VANADIUM FROM USED CATALYSTS OF THE SULFURIC ACID INDUSTRY

(Summary)

The possibility of vanadium recovery from out of use catalysts of the sulfuric acid industry has been studied.

Pure vanadium has been recovered as NH_4VO_3 and V_2O_5 by ion exchange.

LA RECUPERATION DE VANADIUM A PARTIR DES CATALYSEUR USÉS DE L'INDUSTRIE DE L'ACIDE SULPHURIQUE

(Résumé)

On a etudié la possibilité de la récupération de vanadium à partir des catalyseurs usés de lindustrie de l'acide sulphurique. On a récuperé le vanadium pur par l'echánge d'ioris, comme métavanadate d'ammonium et pentoxide de vanadium.

WIEDERGEWINNUNG DES VANADIUMS MIT IONENAUSTAUSCHERN AUS VERBRAUCHTEN KATALYSATOREN

(Zusammenfassung)

Man studierte die Möglichkeit der Wiedergewinnung des Vanadiums aus verbrauchten Katalysatoren der Schwefelsäureindustrie.

Mit Hilfe von Ionenaustaunschern wurde das Vanadium in Form von reinem NH_4VO_3 und V_2O_5 erhalten.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

STUDIUL OBȚINERII CLORIȚILOR ALCALINI DIN MATERII PRIME INDIGENE

A. IANU, GR. TEODORESCU, C. BEJAN, F. POPESCU, I. NICULESCU, A. M. IANCU

În nota de față s-au studiat condițiile de obținere a cloritului de sodiu prin absorbția bioxidului de clor într-o soluție alcalină. Ca materie primă pentru prepararea cloritului de sodiu s-au folosit leșiile hipocloritice puse la dispoziție de fabricile clorosodice. Leșiile hipocloritice prin încălzire la 80°C disproporționează în clorat de sodiu și clorură de sodiu. Soluția conține cantități mici și de hidroxid de sodiu și hipoclorit de sodiu nedisproporționat. Bioxidul de clor se produce concomitent cu clorul prin descompunerea cloratului și a clorurii sub acțiunea acidului sulfuric. Deoarece din materia primă ne interesează cloratul de sodiu, se caută ca soluțiile de clorat și clorură de sodiu obținute prin disproporționarea leșiilor hipocloritice să se îmbogățească în acest component. Aceasta se realizează prin depunerea excesului de clorură la concentrarea soluției disproporționate ajungîndu-se la o concentrație de 13,3% clorat și 21,84% clorură.

Condițiile de obținere a bioxidului de clor au fost studiate și comunicate amplu într-o lucrare anterioară [1, 2, 3].

Absorbția bioxidului de clor de care ne ocupăm în această notă se face într-o soluție alcalină în prezența agenților reducători ca: apă oxigenată, peroxizi, zinc și alte substanțe în pulbere, sulf, cărbune și oxid de plumb. Dintre toți acești agenți reducători am ales oxidul de plumb ca fiind cel mai accesibil și dînd rezultate bune după cum reiese din lucrarea lui Holst G. (4). În această lucrare se arată că în timpul reacției are loc procesul de reducere a bioxidului de clor la clorit, concomitent cu oxidarea oxidului de plumb la bioxid de plumb. Reducătorul oxid de plumb prezintă avantajul că are o solubilitate scăzută în soluții alcaline putîndu-se separa astfel prin filtrare de soluțiile rezultate de clorit de sodiu.

Pentru ca să aibă loc reacția de formare a cloritului de sodiu, alcalinitatea soluției trebuie să corespundă unei concentrații de 0,1—2 n care

să garanteze solubilitatea oxidului de plumb sub formă de plumbit care este substanța activă în timpul reducerii. Alături de reducerea bioxidului de clor are loc și reducerea clorului. Studiul reacțiilor din vasul de reacție, implicit a raportului ClO_2/Cl_2, s-a făcut în nota anterioară sus amintită. Pentru calcularea cantităților de materii prime necesare absorbției bioxidului de clor, s-au ales dintre toate reacțiile, cea mai defavorabilă necesitînd cantitatea maximă de oxid de plumb. Aceasta corespunde raportului $1ClO_2/2Cl_2$, $2ClO_2+4Cl_2+5PbO+10NaOH=2NaClO_3+8NaCl+5PbO_2+5H_2O$.

Modul de lucru

Instalația folosită pentru încercările de laborator se compune dintr-un fluometru, vas de reacție, vas de absorbție, vas de siguranță, și un vas spălător legat la trompa de apă, așa cum se vede în figura 1.

Între vasul de absorbție și cel spălător s-a intercalat vasul de siguranță pentru a se preîntîmpina eventuala trecere a conținutului din vasul de absorbție în vasul spălător în cazul înfundării tubului de primire a bioxidului de clor cu suspensie de oxid de plumb.

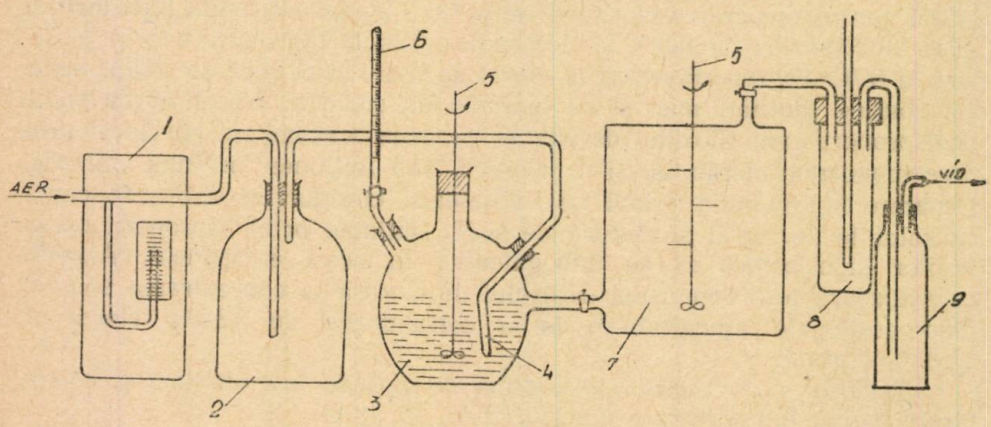


Fig. 1

1 — Fluometru
2 — Vas tampon
3 — Vas de reacție
4 — Tub de admisie a aerului
5 — Agitator
6 — Biuretă
7 — Vas de absorbție
8 — Vas de siguranță
9 — Vas spălător

Bioxidul de clor necesar s-a preparat din soluțiile obținute prin disproporționarea leșiilor hipocloritice și care conțin clorat de sodiu. Descompunerea cloratului de sodiu s-a făcut cu acid sulfuric 40%, cu un randament de 75%. La calcularea cantității necesare de acid sulfuric s-a ținut cont că în afară de descompunerea cloratului, se consumă acid sulfuric și la neutralizarea hidroxidului de sodiu conținut în soluția disproporționată ca și la transformarea clorurii de sodiu în acid clorhidric care joacă rolul de reducător.

Bioxidul de clor și clorul au fost captate în soluție alcalină în care s-a introdus și reducătorul care este o suspensie de oxid de plumb.

După terminarea operației din soluțiile rezultate s-au efectuat analizele necesare stabilirii condițiilor optime de obținere a cloritului de sodiu cum sînt: în vasul de reacție cantitățile de clorat, clorură de sodiu, aciditatea, și în vasul de absorbție cantitățile de clorit, clorat, clorură de sodiu, alcalinitatea.

În vederea stabilirii condițiilor optime de obținere a cloritului de sodiu folosind drept reducător oxidul de plumb s-au variat parametrii care ar putea influența mersul reacției: cantitatea de oxid de plumb și alcalinitatea soluției.

Primele încercări au fost făcute în scopul găsirii cantității optime de hidroxid de sodiu, adăugate (tab. 1).

Tabela 1

Variația cantității de hidroxid de sodiu.

Concentrația H_2SO_4 40%
Timp 8 ore
Temperatura 50° — 100°C
Cantitate PbO: 2,5 exces față de teoretic.

Dozări în vasul de reacție				Dozări în vasul de absorbție					
NaOH g/l	$NaClO_3$ g nereac.	NaCl g nereac.	Aciditate g nereac.	$NaClO_2$ g/l	NaCl g/l	$NaClO_3$ g/l	NaOH g/l	n transf.	n global
2 n	1,45	25,26	63,51	4,29	8,67	1,84		65,2	66
1 n	1,34	25,50	64,75	4,14	8,37	1,98		60,9	53
0,5 n	1,22	20,58	74,25	4,42	7,92	2,64	1,04	65	67

Alcalinitatea soluției s-a variat de la 2n la 0,5n și s-a constatat că și concentrația de 0,5n care corespunde la 20 g hidroxid de sodiu/litru este suficientă pentru a garanta solubilitatea oxidului de plumb în plumbit și asigurînd astfel reducerea bioxidului de clor la clorit. La o cantitate mai mică de hidroxid de sodiu se formează o cantitate insuficientă de plumbit care ar fi consumată de reacția deosebit de agresivă pe care o are clorul. Abia după consumarea clorului poate avea loc reacția între bioxidul de clor și plumbitul care se mai găsește în soluție.

În următoarele încercări s-au urmărit stabilirea cantității necesare de oxid de plumb variindu-se cantitatea de la cea teoretică pînă la un exces de trei ori necesară. (tab. 2). Din compararea datelor obținute s-a ajuns la concluzia că randamentul optim de obținere a cloritului de sodiu este la o cantitate de oxid de plumb de 1,5 ori mai mare ca cea teoretic calculată. Nu s-a ales excesul de oxid de plumb de două ori mai mare decît necesarul convenabil de asemenea, deoarece implică folosirea inutilă a unei cantități mai mari de oxid de plumb și duce la o oarecare îngreunare în agitarea soluției din vasul de absorbție precum și în manipulare.

Tabela 2

Variația cantității de oxid de plumb.

Concentrația acidului : 40%
Temperatura 50° — 100°C
Timp 8 ore
Alcalinitatea soluției : 0,5 n.

Dozări în vasul de reacție				Dozări în vasul de absorbție					
PbO exces.	$NaClO_3$ nereac. g/l	NaCl nereac. g/l	Aciditate nereac. g/l	$NaClO_2$ g/l	NaCl g/l	$NaClO_3$ g/l	NaOH g/l	n global	n transf.
1	1,69	21,54	48,34	4,70	8,60	3,25	0,96	69,1	73,4
1,25	1,63	21,07	67,30	4,74	8,30	2,12	0,95	70	74
1,50	1,06	15,28	74,25	4,80	8,18	1,43	1,06	70,6	73,4
1,75	1,17	15,51	81,61	4,76	8,15	1,70	1,03	70,1	73
2	1,10	24,63	93,37	4,84	8,31	2,14	1,03	71,1	74
2,25	1,32	23,70	87,17	4,63	8,10	2,42	1,02	68	70,6
2,50	1,22	20,88	60,45	4,42	7,93	2,64	1,05	64,8	67,7
2,75	1,29	20,09	66,97	4,40	7,93	2,66	0,99	65,9	67,3
3	1,50	14,67	79,92	4,13	7,09	2,41	0,98	60,7	66,3

În scopul obținerii de soluții de absorbție cît și mai concentrate în clorit de sodiu, următoarele încercări au constat în studiul absorbției bioxidului de clor în sistem recirculat și anume : soluția de absorbție de la o preparare anterioară după completarea cu cantitatea de hidroxid de sodiu și oxid de plumb necesară unei noi absorbții s-a recirculat de un număr de ori pînă s-a obținut o cantitate de clorit absorbită de 37,6 g/litru. Alături de această cantitate de clorit soluția mai conține 8,24 g/litru clorat de sodiu, 88 g/litru clorură de sodiu și 15,6 g/litru hidroxid de sodiu. Soluția se carbonatează prin trecerea unui curent de bioxid de carbon în scopul transformării hidroxidului de sodiu în carbonat de sodiu se concentrează separînd prin depunere clorura și carbonatul de sodiu. Se filtrează și soluția obținută conține un amestec de clorit și clorat de sodiu. Acestea pot fi separate prin evaporare în vid, dar deoarece cloratul nu împiedică cu nimic efectul decolorant al cloritului de sodiu pot fi utilizate și în prezență.

Tabela 3

Probe recirculate

Concentrația acidului : 40%
Timp 8 ore
Temperatura 50°—100° C
Alcalinitatea soluției : 0,5 n.
Cantitatea PbO : 1,5 exces.

Dozări în vasul de reacție			Dozări în vasul de absorbție				
$NaClO_3$ nereact. g/l	NaCl nereact. g/l	Aciditate nereact. g/l	$NaClO_2$ g/l	NaCl g/l	$NaClO_3$ g/l	NaOH g/l	n global
1,69	37,68	111,00	5,76	11,46	2,60	14,64	84,70
2,05	22,05	101,20	10,90	15,01	5,13	14,40	75,60
2,00	26,98	81,23	14,94	30,70	6,09	21,40	61,60
0,99	30,04	77,91	19,40	49,09	6,20	17,00	65,40
0,92	23,48	100,10	25,87	59,04	6,85	15,56	99,00
0,49	25,28	81,72	30,01	68,44	7,03	15,54	60,80
1,63	33,23	99,80	33,22	78,38	7,30	12,70	47,00
1,38	16,28	84,47	37,62	88,00	8,24	15,60	64,00

Concluzii

Materia primă pentru obținerea cloritului de sodiu o formează leșiile hipocloritice care se produc la noi în țară. Prin simpla încălzire și concentrare, hipocloritul disproporționează în clorat și clorură de sodiu cu randament de conversiune în clorat de sodiu de 92%. Soluțiile de clorat și clorură tratate cu acid sulfuric de 40% sînt descompuse în bioxid de clor. Reducerea este garantată de prezența clorurei care cu acidul sulfuric dă acid clorhidric ce are rolul de reducător în această reacție. Bioxidul de clor și clorul format sînt absorbite în soluție alcalină reducătoare în scopul convertirii în clorit alcalin. Reducător în această reacție s-a utilizat oxidul de plumb.

S-au obținut următoarele randamente:

Randamentul de convertire a cloratului în bioxid de clor 75% ; de bioxid de clor în clorit 67% s-au raportat la materia primă leșia hipoclorică este de 50,15%.

Prin această transformare a leșiilor hipocloritice în clorat și acesta la rîndul lui în clorit alcalin avem un cîștig în clor activ de 10—11%, care în parte acoperă cheltuielile legate de acest proces. Cloritul de sodiu are calități specifice ca decolorant și menajant al fibrelor celulozice fiind singura substanță decolorantă a fibrelor poliamidice.

Catedra de chimie anorganică și analitică

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Ianu, A. Steclaci:* Proces tehnologic pentru obținerea cloritului de sodiu din leșiile de la Tîrnăveni. Tom XXI 1959, fasc. 3, Bulet. I.P.B.
2. *A. Ianu, C. Bejan, F. Popescu* și *A. M. Lupu:* Studiul descompunerii cloraților alcalini din materii prime indigene cu acid sulfuric. Tom XXI. 1959, fasc. 4, Bulet. I.P.B..
3. *A. S. Cernîșeșv, V. Stuțer, N. Semionova:* Uspehi Himii, Tom. XXV, 1, 1956.
4. *G. Holst:* Industrial and Eng. Chem.; 42, nr. 11, 3359, 1950.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЧЕНИЯ ЩЁЛОЧНЫХ ХЛОРИТОВ ИЗ МЕСТНОГО СЫРЬЯ

(Резюме)

В настоящей заметке были исследованы условия получения хлорита натрия путём абсорбции двуокиси хлора в щёлочном растворе при наличии окиси свинца в качестве восстановителя.

Сырьём служили промышленные гипохлоритные щёлочи.

Были получены следующие максимальные коэфициенты: коэфициент превращения гипохлоритных щёлочей в двуокись хлора — 70%, коэфициент превращения двуокиси хлора в хлорит — 67% или по отношению к сырью — гипохлоритной щёлочи — выход хлорита составляет 50,15%.

Получение хлорита натрия из пипохлоритных щёлочей даёт выйгрыш в активном хлоре, составляющий 10 — 11%.

STUDY OF OBTAINING ALCALINE CHLORITES FROM NATIVE RAW MATERIALS

(Summary)

In the present note were studied the conditions of obtaining sodium chlorite, by chlorine dioxide absorbtion into an alcaline solution in the presence of lead oxide as reducing agent.

As raw materials were used industrial hypochlorous lessives.

The maximum outturn obtained is :

— conversion outturn of hypochlorous lessives in chlorine dioxide 70%.

— conversion outturn of chlorine dioxide in chlorite 67% or reported to raw material — hypochlorous lessives it is 50,15%.

By obtaining sodium chlorite from hypochlorous lessives it is realised an active chlor gain of 10—11%.

ETUDE POUR OBTENIR LES CHLORITES ALCALINS DES MATIÈRES PREMIERES INDIGÈNES

(Résumé)

Dans la note ci dessous on a étudié les conditions pour obtenir le chlorite de soude, par l'absorbtion du bioxyde de chlore, dans une solution alcaline, en présence de l'oxyde de plomb comme agent réducteur.

On a employé comme matières premières les lessives hypochloritiques industrielles.

Le maximum des rendements obtenus sont :

— le rendement de conversion des lessives hypochloritiques en bioxyde de chlore 70%.

— le rendement de conversion du bioxide de chlore en chlorite 67%, ou rapportés à la matière première, la lessive hypochloritique est de 50,15%.

En obtenent le chlorite de soude des lessives hypochloritiques on réalise un gain en chlore actif de 10=11%.

ÜBER DIE GEWINNUNG VON ALKALI-CHLORIT AUS INLÄNDISCHEN ROHSTOFFEN

(Zusammenfassung)

Gegenwärtige Note berichtet über die Gewinnung von Natrium-Chlorit durch Absorption von Chlordioxyd in einer Alkali-Lösung, unter Verwendung von Bleioxyd als Reduktionsmittel.

Als Rohstoff wurden Industrie-Hypochlorit-Laugen verwendet. Die erzielten Höchstleistungen sind :

— Wirkungsgrad der Konversion von Hypochlorit-Laugen in Chlordioxyd=70% ;

— Wirkungsgrad der Konversion von Chlordioxyd in Chlorit=67% — oder im Verhältnis zum Rohstoff, d.h. Hypochlorit-Lauge, ist 50,15%.

Durch Herstellung von Natrium-Chlorit-Laugen, wird ein Gewinn von aktivem Chlor von 10—11% erzielt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

ELECTRONICĂ

EVALUAREA DISTORSIUNILOR ȘI A DIAFONIEI LA TRANSMISIUNEA INFORMAȚIEI DE CULOARE PRIN MODULAȚIE ÎN CUADRATURĂ

ALEXANDRU SPĂTARU

La sistemul de televiziune în culori, simultan cu modulație în cuadratură, informația de culoare se transmite prin modulație în amplitudine cu purtătoare suprimată.

În varianta N.T.S.C., cele două canale prin care se transmite informația de culoare (canalul I și Q) au lărgimi de bandă diferite și unul din canale (canalul I) are banda de trecere nesimetrică față de frecvența subpurtătoare. La alte variante cele două lărgimi de bandă sînt egale și simetrice.

În cele ce urmează este expusă o metodă generală de calcul care permite evaluarea distorsiunilor și a diafoniei de culoare în cazul în care banda de trecere a canalelor de crominanță nu este simetrică față de frecvența subpurtătoare.

1. Unele considerații privind modulația în amplitudine cu purtătoarea suprimată MA-PS sau cu bandă laterală unică MA-BLU.

Fie $x\ (t)$ mesagiul care poartă informația de culoare și $X(\omega)$ transformata Fourier (densitatea spectrală) și

$$y(t) = T_1\{x(t)\} \tag{1}$$

transformarea liniară definită de:

$$T_1\{\ \} = \{\ \} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \tag{2}$$

care se efectuiază la emisie cu o subpurtătoare de frecvență ω_1 și fază Φ_1.

Transformata Fourier a semnalului $y(t)$ din (1), definește o transformare liniară în domeniul frecvențelor pe care o notăm cu:

$$R_1\{\ \} = \mathfrak{F} \cdot T_1\{\ \} \tag{3}$$

sau:

$$R_1\{x(t)\} = \mathfrak{F} \cdot T_1\{x(t)\} = Y(\omega). \tag{4}$$

În lucrarea (1) se arată că transformarea liniară $R_1\ \{x(t)\}$ se compune din: o translație a densității spectrale $X(\omega)$ cu ω_1 spre dreapta, o rotire a fazei cu $+\ \Phi_1$, o multiplicare cu $\frac{1}{2}$ — și o translație a densității spectrale $X(\omega)$ cu ω_1 spre stînga, o rotire a fazei cu $-\ \Phi_1$, o multiplicare cu $\frac{1}{2}$ (fig. 1).

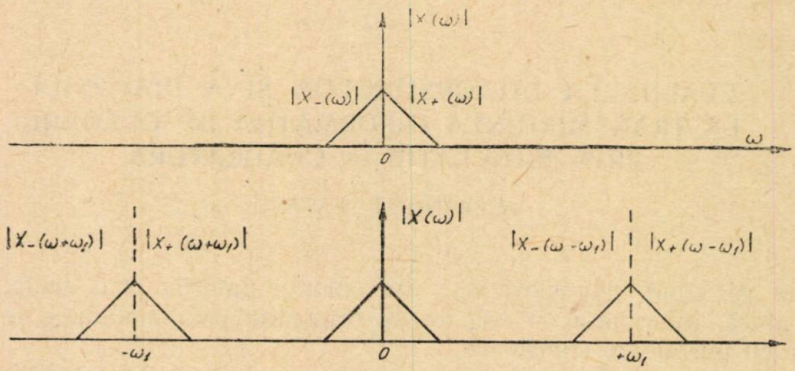


Fig. 1

Reprezentarea transformării $R_1\ \{x(t)\}$

[Cu $X_+(\omega)$ s-a notat valoarea funcției $X(\omega)$ pentru valori pozitive ale argumentului, iar cu $X_-(\omega)$ valoarea funcției pentru argumente negative. $X(\omega) = X_+(\omega) + X_-(\omega)$].

Semnalul $y(t)$ la ieșirea din modulator trece prin canal, care este echivalat cu un filtru de bandă $F_1\ (\omega)$ și ajunge la demodulatorul de la recepție (fig. 2). Aici se efectuiază transformarea lineară $R_0\{\ \}$ cu ajutorul unei subpurtătoare locale de frecvență ω_0 și fază θ_0. La ieșirea demodulatorului se găsește filtrul trece jos $F_0(\omega)$ care elimină toate frecvențele superioare lui Ω_M, cea mai înaltă frecvență din spectrul mesagiului.

Pentru caracterizarea filtrului de bandă $F_1(\omega)$ care reprezintă canalul vom utiliza un model matematic simplificat și anume, vom considera că atenuarea în banda de trecere este constantă și că faza variază linear cu frecvența:

$$F_1(\omega) = Ae^{-j(\omega-\omega_1)\tau} + Ae^{-j(\omega+\omega_1)\tau}$$

unde A și τ sînt considerate constante în banda de trecere a filtrului și nule în afara benzii.

În realitate atît A cît și τ nu sînt constante, ele variază în funcție de mesagiul transmis, însă aceste variații sînt mici și putem să considerăm un regim cvasistaționar.

La ieșirea din demodulator avem un filtru $F_0(\omega)$ ale cărui caracteristici idealizate sînt:

$$F_0(\omega) = \begin{cases} 2 \text{ pentru } -\Omega_0 < \omega < \Omega_0 \\ 0 \text{ pentru } -\Omega_0 > \omega > \Omega_0 \end{cases} \tag{5}$$

Ω_0 fiind frecvența de tăiere, $\Omega_0 > \Omega_M$.

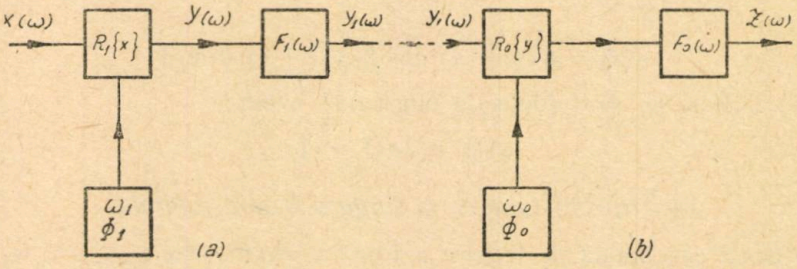


Fig. 2.
(a) emisie (b) recepție.

a) *Transmisiune cu ambele benzi laterale.*

În acest caz banda de trecere a filtrului $F_1(\omega)$ este: $\omega_1 \pm \Omega_M$ și $-\omega_1 \pm \Omega_M$, iar:

$$Y_1(\omega) = F_1(\omega)\, Y(\omega) \tag{6}$$

La emisie avem transformarea:

$$Y(\omega) = R_1\{x(t)\} = \frac{1}{2}\left[e^{j\Phi_1} X(\omega - \omega_1) + e^{-j\Phi_1} X(\omega + \omega_1)\right] \tag{7}$$

iar:

$$Y_1(\omega) = \frac{A}{2}\left[e^{-j(\omega-\omega_1)\tau}\, e^{j\Phi_1} X(\omega - \omega_1) + e^{-j(\omega+\omega_1)\tau}\, e^{-j\Phi_1} X(\omega + \omega_1)\right] \tag{8}$$

La recepție avem transformarea:

$$R_0\{y_1(t)\} = \frac{A}{4}\left[e^{-j(\omega-\omega_1-\omega_0)\tau}\, e^{j\Phi_0} e^{j\Phi_1} X(\omega - \omega_1 - \omega_0) + e^{-j(\omega+\omega_1-\omega_0)\tau}\right.$$

$$e^{-j\Phi_1} e^{j\Phi_0} X(\omega + \omega_1 - \omega_0) + e^{-j(\omega-\omega_1+\omega_0)\tau}\, e^{j\Phi_1} e^{-j\Phi_0} X(\omega - \omega_1 + \omega_0) + \tag{9}$$

$$\left. + e^{-j(\omega+\omega_1+\omega)}\, e^{-j\Phi_1} e^{-j\Phi_0} X(\omega + \omega_1 + \omega_0)\right]$$

iar la ieșirea din filtru $F_0(\omega)$ (frecvența de tăiere Ω_0 fiind $\Omega_0 < \omega_1 + \omega_0 - \Omega_M$)

$$Z(\omega) = F_0(\omega)\, R_0\{y_1\} = \frac{A}{2}\, e^{-j(\omega-\omega_1+\omega_0)}\, e^{j(\Phi_1-\Phi_0)} X(\omega - \omega_1 + \omega_0) +$$

$$+ e^{-j(\omega+\omega_1-\omega_0)}\, e^{-j(\Phi_1-\Phi_0)} X(\omega + \omega_1 - \omega_0) \tag{10}$$

notăm cu $\omega_\Delta = \omega_0 - \omega_1$ şi cu $\Phi_\Delta = \Phi_0 - \Phi_1$ şi avem :

$$Z(\omega) = \frac{A}{2}\left[e^{-j(\omega_\Delta \tau + \Phi_\Delta)}\, e^{-j\omega\tau}\, X(\omega + \omega_\Delta) + e^{j(\omega_\Delta \tau + \Phi_\Delta)}\, e^{-j\omega\tau}\, X(\omega - \omega_\Delta)\right] \tag{11}$$

luînd transformata Fourier avem :

$$z(t) = \frac{A}{2}\left\{e^{-j[\omega_\Delta (t+\tau) + \Phi_\Delta]} + e^{j[\omega_\Delta (t+\tau) + \Phi_\Delta]}\right\} x(t - \tau) \tag{12}$$

$$z(t) = Ax(t - \tau)\cos[\omega_\Delta (t + \tau) + \Phi_\Delta] \tag{13}$$

Dacă $\omega_\Delta = 0$ şi $\Phi_\Delta = 0$ (detecţie sincronă) avem :

$$z(t) = Ax(t - \tau) \tag{14}$$

b) *Transmisiune cu o singură bandă laterală.*

În acest caz banda de trecere a filtrului $F_1(\omega)$ este $\omega_1 < \omega < \omega_1 + \Omega_M$ şi

$$-\omega_1 - \Omega_M < \omega < -\omega_1, \text{ iar } Y_1(\omega) = F_1(\omega)\, Y(\omega) =$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{j\Phi_1} e^{-j(\omega - \omega_c)}\, X_+(\omega - \omega_1) + e^{-j\Phi_1}\, e^{-j(\omega + \omega_c)\tau}\, X_-(\omega + \omega_1)\right] \tag{15}$$

unde

$$\omega_c = \omega_1 + \frac{\Omega_M}{2}.$$

După transformarea la recepţie, la ieşire din filtru $F_0(\omega)$ avem :

$$Z(\omega) = F_0(\omega)\, R_0\{y_1\} = \frac{A}{2}\left[e^{+j(\Phi_1 - \Phi_0)}\, e^{-j(\omega + \omega_0 - \omega_c)\tau}\, X_+(\omega + \omega_0 - \omega_1) + \right.$$

$$\left. + e^{-j(\Phi_1 - \Phi_0)}\, e^{-j(\omega - \omega_0 + \omega_c)\tau}\, X_-(\omega - \omega_0 + \omega_1)\right] \tag{16}$$

punînd $\omega_\Delta = \omega_0 - \omega_1$ şi $\Phi_\Delta = \Phi_0 - \Phi_1$ avem :

$$Z(\omega) = \frac{A}{2}\left[e^{-j\Phi_\Delta}\, e^{-j\left(\omega + \omega_\Delta - \frac{\Omega_M}{2}\right)\tau}\, X_+(\omega + \omega_\Delta) + \right.$$

$$\left. + e^{j\Phi_\Delta}\, e^{-j\left(\omega - \omega_\Delta + \frac{\Omega_M}{2}\right)\tau}\, X_-(\omega - \omega_\Delta)\right]$$

$$Z(\omega) = \frac{A}{2}\left[e^{-j\left(\Phi_\Delta + \omega_\Delta \tau - \frac{\Omega_M}{2}\tau\right)}\, e^{-j\omega\tau}\, X_+(\omega + \omega_\Delta) + \right.$$

$$\left. + e^{j\left(\Phi_\Delta + \omega_\Delta \tau - \frac{\Omega_M}{2}\tau\right)}\, e^{-j\omega\tau}\, X_-(\omega - \omega_\Delta)\right] \tag{17}$$

$$z_s(t) = \frac{A}{2} x(t-\tau) \cos\left[\omega_\Delta (t+\tau) + \Phi_\Delta - \frac{\Omega_M}{2}\tau\right] - \\ - \frac{A}{2} \mathcal{H}[x(t-\tau)] \sin\left[\omega_\Delta (t+\tau) + \Phi_\Delta - \frac{\Omega_M}{2}\tau\right] \tag{18}$$

Dacă am fi transmis banda laterală inferioară am fi obţinut ::

$$Z_i(t) = \frac{A}{2} x(t-\tau) \cos\left[\omega_\Delta (t+\tau) + \Phi_\Delta - \frac{\Omega_M}{2}\tau\right] + \\ + \frac{A}{2} \mathcal{H}[x(t-\tau)] \sin\left[\omega_\Delta (t+\tau) + \Phi_\Delta - \frac{\Omega_M}{2}\tau\right] \tag{19}$$

În cazul detecţiei sincrone $\omega_\Delta = 0$, $\Phi_\Delta - \frac{\Omega_M}{2}\tau = 0$, avem :

$$z_s(t) = \frac{A}{2} x(t-\tau) \tag{20}$$

şi

$$z_i(t) = \frac{A}{2} x(t-\tau) \tag{21}$$

Transmiterea informaţiei de culoare prin modulaţie în cuadratură.

Să notăm cu $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ cele două mesagii de culoare (semnalele diferenţă $E_B - E_Y$ şi $E_R - E_Y$ sau E_Y şi E_Q), care se transmit în conformitate cu schema din fig. 3.

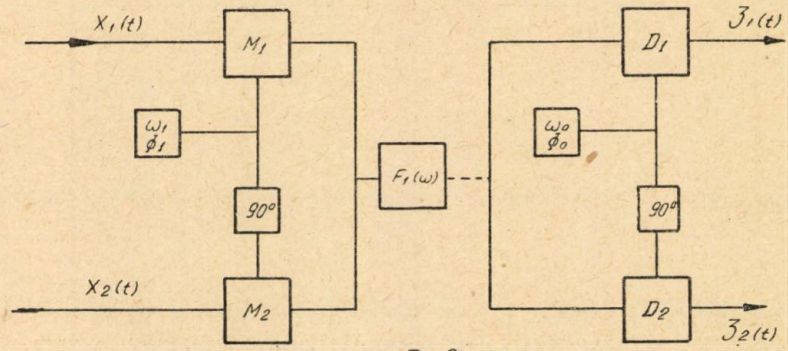


Fig 3

În cazul cînd spectrele celor două semnale se transmit simetric nu apare nici o diafonie între canale ci doar o eventuală distorsiune dată de atenuarea simetrică a celor două benzi laterale.

Dacă însă benzile laterale nu sînt transmise simetric apare o disfonie între cele două căi.

Să presupunem de exemplu că filtrul de bandă $F_1(\omega)$ taie o parte din spectrul semnalelor transmise și anume are banda de trecere cuprinsă între :

$$\omega_1 - \Omega_T < \omega < \omega_1 + \Omega_M$$

și (22)

$$-\omega_1 - \Omega_T < \omega < -\omega_1 + \Omega_M$$

unde Ω_M este cea mai mare frecvență din cele două frecvențe maxime Ω_{M1} și Ω_{M2} din spectrul mesagiului $x_1(t)$ respectiv $x_2(t)$.

În acest caz putem considera că mesagiul transmis este format din suma a două semnale, unul care conține numai componentele de frecvențe mai mici ca Ω_T și altul care conține numai componentele de frecvențe mai mari ca Ω_T, (fig. 4) respectiv :

$$x_1(t) = x_1'(t) + x_1''(t)$$

și (23)

$$x_2(t) = x_2'(t) + x_2''(t)$$

iar

$$X_1(\omega) = X_1'(\omega) + X_1''(\omega)$$

și (24)

$$X_2(\omega) = X_2'(\omega) + X_2''(\omega)$$

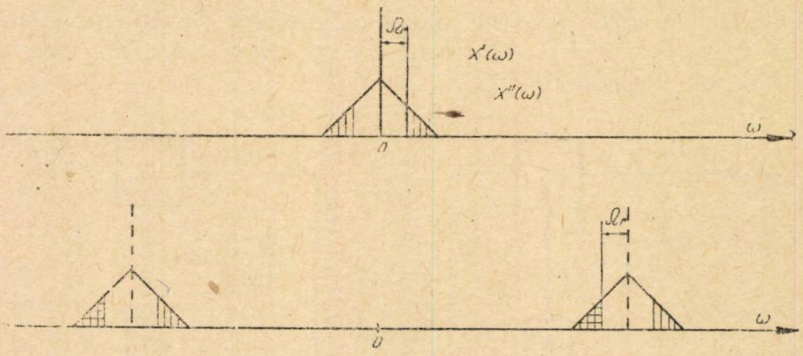


Fig 4

Mesagiile x_1' respectiv x_2' se transmit cu ambele benzi laterale, iar x_1'' respectiv x_2'' se transmit cu o singură bandă laterală.

Ținînd seama de relațiile (13), (14) și (18), (22) semnalul la ieșirea din demodulatorul (1) este :

$$z_1(t) = A\,x_1'(t-\tau) + \frac{1}{2}\,A\,x_1''(t-\tau) - \frac{1}{2}\,A\,\mathcal{H}[x_2''(t-\tau)] \qquad (25)$$

Semnalul la ieșirea la cel de-al doilea demodulator este:

$$z_2(t) = A\,x_2'(t-\tau) + \frac{1}{2}\,A\,x_2''(t-\tau) - \frac{1}{2}\,A\,\mathcal{H}[x_1''(t-\tau)] \qquad (26)$$

Din cele de mai sus rezultă că în cazul în care sistemul de transmisiune $F_1(\omega)$ elimină în mod nesimetric o parte din spectrul semnalelor apar componente de diafonie între cele două canale (date de transformatoarele Hibert $\mathcal{H}[x_2'']$ și $\mathcal{H}[x_1'']$ care distorsionează semnalul).

În afară de aceasta semnalul este distorsionat și de faptul că transmisiunea componentelor de frecvență mai mare ca Ω_T se face cu amplitudinea redusă la jumătate.

Dacă însă unul din cele două mesagii fie el $x_2(t)$ are un spectru mai îngust ($\Omega_{M2} < \Omega_T$) atunci $x_2''(t) = 0$, iar relațiile (26) și (27) devin:

$$z_1(t) = A\,x_1'(t-\tau) + \frac{1}{2}\,A\,x_1''(t-\tau)] \qquad (27)$$

și

$$z_2(t) = A\,x_2'(t-\tau) - \frac{1}{2}\,A\,\mathcal{H}[x_1''(t-\tau)] \qquad (28)$$

Dat fiind că la ieșirea din demodulatorul (2) avem un filtru trece jos cu frecvența de tăiere Ω_T rezultă că termenul $\mathcal{H}[x_1''(t-2)]$ care are un spectru ce ocupă aceleași domenii de frecvențe ca și x_1'' (fiind o transformare liniară a acestuia) va fi eliminat. În consecință:

$$z_1(t) = A\,x_1(t-\tau) - \frac{1}{2}\,A\,x_1''(t-\tau) \qquad (29)$$

și

$$z_1(t) = A\,x_2(t-\tau)$$

Adică între cele două canale nu avem diafonie, iar canalul de bandă largă distorsionează semnalul respectiv datorită transmisiunii cu atenuarea parțială a unei benzi laterale.

În general însă canalul atenuiază în mod nesimetric componentele spectrale ale semnalului transmis astfel încît apar diafonii date de transformata Hilbert a semnalului ce corespunde porțiunii din spectru ce a fost atenuată.

Pe baza celor precedente, considerînd aplicabilă teorema suprapunerii, descompunînd spectrul mesagiului în termeni ce se transmit cu ambele benzi laterale și în termeni ce se transmit cu o singură bandă laterală (datorită atenuării canalului) putem evalua distorsiunile și diafonia pentru multe cazuri particulare importante în diferite aplicații.

Catedra de tuburi electronice

BIBLIOGRAFIE

(1) Al. Spătaru, — Considerații privind unele proprietăți ale modulației lineare. Telecomunicații Nr. 5, 1963.

(2) *W. F. Bailey* and *C. J. Hirsch,* — Quadrature Cross Talk in N T S C Color Television. Proceedings I. R E — January 1954.

ОЦЕНКА ИСКАЖЕНИЙ И ДИАФОНИЙ В ПЕРЕДАЧЕ ЦВЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ КВАДРАТУРНОЙ МОДУЛЯЦИИ

(Резюме)

В общей форме, исследуется проблема искажений и диафоний между каналами, которые передают цветную информацию в цветной телевизионной системе с импульсной модуляцией в квадратуре.

Переданый сигнал разлагается в члены которые передаются обеими боковыми полосами и в члены которые передаются одной боковой полосой, благодаря затуханию передающего канала.

Искажение и диафония получаются благодаря преображению Гильберта передающего члена с одной боковой полосой.

VALUATION OF DISTORSIONS AND BROSS TALK IN THE TRANSMISSION OF BOLOUR INFORMATION, BY QUADRATURE MODULATION

(Summary)

The paper generally discusses the problem of the distorsions and the cross talk between the transmission chanals of the chrominance information, in the colour television system, by quadrature modulation.

The transmitted signal is resolved into components transmitted by a double sideband and components transmitted by o single sideband owing to the attenuation introduced in the transmissions channel.

The resulting distorsion and cross talk are given in terms of Hilbert transform of the component transmitted by a single sideband.

EVALUTION DES DISTORSIONS ET DE LA DIAPHONIE DANS LA TRANSMISSION DE L'INFORMATION DE COULEUR, PAR MODULATION EN QUADRATURE

(Résumé)

Sous une forme générale l'on a traité le problème des distorsions et de la diaphonie entre les canaux de transmission de l'information de couleur, dans le système de télévision en couleurs, par modulation en quadrature.

Le signal transmis est décomposé en termes qui sont transmis par les deux bandes latérales et en termes qui sont transmis par une seule bande latérale, dû à l'atténuation introduite dans le canal de transmission.

La distorsion et la diaphonie qui en résultent sont donnés par la transformation de Hilbert du terme qui est transmis par une seule bande latérale.

BEWERTUNG DER VERZERRUNGEN UND DER DIAPHONIE BEI DER FARBINFORMATION ÜBERTRAGUNG, DURCH QUADRATUR MODULATION

(Zusammenfassung)

Es wird, in einer allgemeinen Form, über die Aufgabe der Verzerrungen und des Nebensprechens zwischen de Radiokanälen, die die Farbinformation zum Fernsehsystem, durch Quadratur modulation überträgt, behandelt.

Das übertragene Signal wird zerlegt, infolge der in den Übertragungskanälen eingeführten Dämpfung, in Glieder, die mit beiden Seitenbänder und in Glieder, die mit einem einzigen Seitenband übertragen werden.

Die Verzerrung und das resultierende Nebensprechen sind durch eine Hilberttransformation des Gliedes, das mit einem Einseitenband übertragen wird, gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

EFECT DE REZISTENȚĂ NEGATIVĂ LA TRANZISTORUL INDUCTIV

C. BULUCEA

Este cunoscut că un tranzistor cu colectorul scurtcircuitat la bază și cu rezistența bazei $r_{bb'}$, mărită artificial (fig. 1), se prezintă inductiv la intrare [1, 2]:

$$Z_{ab} = \mathcal{R} + j\omega\mathcal{L}.$$

Factorul de calitate al acestei inductanțe este însă scăzut ($Q < 10$). În cursul măsurătorilor pentru verificarea teoriei tranzistorului inductiv

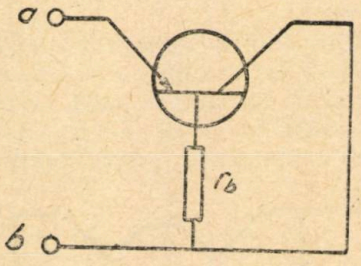


Fig. 1. — Schema tranzistorului inductiv (în curent alternativ)

expusă în [2], s-a obținut $Q = 1 \div 5$ cu tranzistorul EFT 122 lucrînd în punctul static $U_{CB} = -4{,}5$ V, $I_E = 5$ mA.

În lucrarea [1] se arată că, pentru a îmbunătăți factorul de calitate al impedanței Z_{ab} se mărește tensiunea continuă de polarizare a colectorului. Studiind experimental variația rezistenței de intrare cu tensiunea de colector, am obținut curba din fig. 2. Măsurătorile au fost făcute printr-o metodă de punte. La $U_{CB} = -52$ V s-a obținut $\mathcal{R} = 0$. Mărind tensiunea peste această valoare, montajul tranzistorului inductiv a intrat în oscilație, ceea ce indică prezența unei rezistențe negative în acest regim de funcționare.

Pentru tranzistorul considerat (EFT 122) am măsurat tensiunea de străpungere $U_{CBstr} = -90{\cdot}15$ V. La $U_{CB} = -52$ V tranzistorul funcțio-

nează, evident, în regim de multiplicare în avalanșă, însă multiplicarea nu este mare: la aceste valori corespunde un factor de multiplicare

$$M = \left[1 - \left(\frac{U_{CB}}{U_{CBstr}}\right)^n\right]^{-1} = 1{,}07 \div 1{,}5\,,$$

dacă se presupune $n = 5 \div 2$, deci nu apar probleme de instabilitatea punctului static de funcționare.

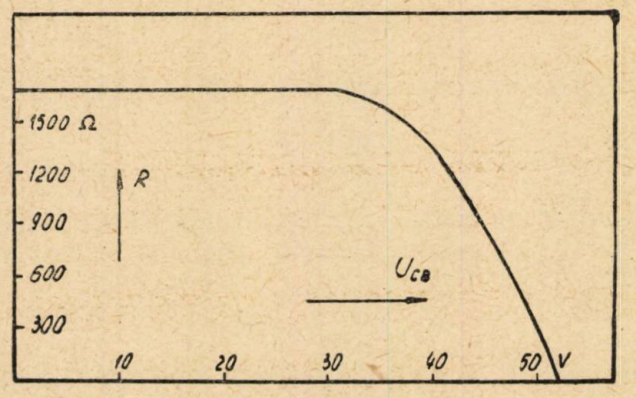


Fig. 2. — Curba variației rezistenței de intrare a tranzistorului inductiv cu tensiunea de colector

În felul acesta, se poate utiliza tranzistorul inductiv lucrînd în regim de multiplicare în avalanșă la joncțiunea colectorului pentru obținerea de inductanțe solide cu factor de calitate foarte mare.

Efectul de rezistență negativă poate fi utilizat într-un montaj relativ simplu de oscilator microminiaturizat: între bornele a și b din fig. 1

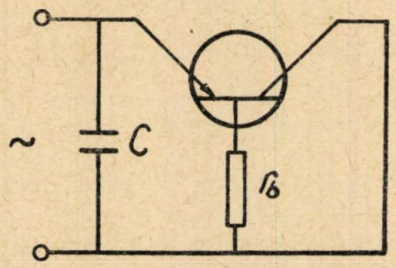


Fig. 3. — Schemă de oscilator propusă (în curent alternativ, fără elementele de alimentare)

se conectează o capacitate, (fig. 3) realizînd astfel un circuit oscilant cu inductanța tranzistorului inductiv.

Incovenientul tensiunii relativ mari de alimentare poate fi ușor înlăturat dacă se folosesc trazistori cu tensiuni reduse de străpungere.

Catedra de tuburi electronice

BIBLIOGRAFIE

[1] *Hans G. Dill* — Inductive Semiconductor Elements and Their Application in Bandpass Amplifiers. (IRE Transactions on Military Electronics, iulie 1961).

[2] *M. Drăgănescu, Gh. Samachișe, C. Bulucea* — On the Operating Conditions of the Inductive Transistor. (Revue de Physique, Acad. R.P.R. nr. 1, 1963).

ЭФФЕКТ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ У ИНДУКТИВНОГО ТРАНЗИСТОРА

(Резюме)

Экспериментальным путём замечен эффект отрицательного сопротивления у индуктивного транзистора с лавинной мультипликацией у коллекторного перехода. Предлгается использование этого эффекта у генератора.

NEGATIVE RESISTANCE EFFECT AT INDUCTIVE TRANSISTOR

(Summary)

Experimentally was established a negative resistance effect at inductive transistor with avalanche multiplication at the collector junction. One suggests to use this effect for an oscillator.

L'EFFET DE RESISTANCE NEGATIVE DU TRANSISTOR INDUCTIF

(Résummé)

On constate, expérimentalement, effet de résistance négative du transistor inductif avec multiplication en avalanche, à la jonction du collecteur. On propose l'utilisation de cet effet à un oscilateur.

NEGATIVER WIDERSTANDSEFFEKT BEIM INDUKTIVEN TRANSISTOR

(Zusammenfassung)

Ein negativer Widerstandseffekt wird beim induktiven Transistor mit Lawinenmultiplikation experimentell festgestellt. Es wird die Verwendung dieses Effekts bei einem Oszilator vorgeschlagen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

ASUPRA DINAMICII RELATIVISTE A SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE

ALEXANDRU TIMOTIN

Pentru o teorie consecventă a cîmpului electromagnetic — fundamentată pe un sistem de definiții, cu conținut fizic univoc, ale mărimilor de stare — este esențială prezentarea prealabilă a cinematicii și a dinamicii pe o cale independentă de electromagnetism se pot introduce sistematic numai cu ajutorul mărimilor mecanice.

În cadrul teoriei relativității restrînse o asemenea formulare autonomă a cinematicii și a dinamicii nu este banală, pentru că bazele ei experimentale și teoretice au fost stabilite cu mijloace de optică și de electromagnetism. Pe de altă parte o astfel de formulare nu prezintă dificultăți, decît dacă se încearcă o reducere la minimum a premizelor utilizate și totodată, o apropiere a lor de experiență — fără a se depăși esențial cadrul fenomenologic al mecanicii prerelativiste. Într-o lucrare anterioară [1] am arătat că relațiile fundamentale ale cinematicii privitoare la transformarea coordonatelor spațialo-temporale la schimbarea sistemului inerției și egala îndreptățire a sistemelor inerțiale în caracterizarea mișcărilor inerțiale (adică — într-o formă particulară — principiul relativității restrînse). Se obține astfel o transformare generală inerțială cu numai două subspecii: transformarea Galilei (cînd experiența nu pune în evidență vreo viteză privilegiată — limită) și transformarea Lorentz (cînd experiența pune în evidență o asemenea viteză).

În cele ce urmează extindem aceste considerații la dinamica relativistă a sistemelor de puncte materiale — arătînd că relația care exprimă dependența masei de viteza și teorema conservării impulsului mecanic sînt consecințe ale principiului relativității restrînse, dacă se caracterizează în mod adecvat clasa interacțiunilor mecanice. Demonstrațiile pur mecanice ale dependenței masei de viteză sînt de mult cunoscute [2], dar ele folosesc fie conservarea impulsului (care în prezentarea de față se deduce ca o teoremă), fie proporționalitatea dintre masă și energie,

fie alte principii organizate axiomatic într-un sistem care depășește în mod esențial mecanica clasică (v. de ex. [3]).

1. Dinamica relativistă a sistemelor de puncte materiale se poate constitui independent de o teorie a cîmpului numai dacă se restrînge studiul la clasa interacțiunilor strict mecanice, la care cîmpul nu participă, adică în care se conservă energia, impulsul, momentul cinetic, etc. în formele lor dependente exclusiv de mărimi mecanice. Evident, toate interacțiunile strict mecanice ale punctelor materiale sînt ciocniri — mișcarea fiecărui punct material între două ciocniri succesive fiind inerțială — deoarece relativitatea simultaneității e incompatibilă cu exercitarea instantanee de acțiuni la distanță. Nu toate ciocnirile sînt însă interacțiuni strict mecanice deoarece experiența arată că există ciocniri la cari participă și particulele elementare ale cîmpului electromagnetic, adică fotonii.

Presupunînd definite lungimile, duratele și masele inerte în fiecare referențial inerțial în parte (ultimele fiind astfel definite încît corpul rezultat prin ciocnirea perfect plastică a două mici puncte materiale de mase egale, proiectate unul împotriva celuilalt cu viteze egale și antiparalele, să fie în repaus) *definim drept clasă a interacțiunilor strict mecanice multimea ciocnirilor în care suma maselor punctelor materiale care participă la fiecare interacțiune în parte se conservă:*

$$\sum m_k = \text{constant} \tag{1}$$

Admitem totodată că o interacțiune care apare strict mecanică într-un sistem de referință este strict mecanică în orice alt sistem de referință inerția, adică admitem invarianța caracterului mecanic al unei interacțiuni la schimbarea referențialului inerțial. La scrierea relației (1) în diferite sisteme inerțiale de referinți vom utiliza și relația de transformare a vitezelor care rezultă din transformarea Lorentz. Dacă u și u' sînt vitezele unui aceluiași punct material în raport cu referențialele S și S' (ultimul avînd viteza v, constantă față de S) și dacă notăm cu $u_{\parallel} = (\bar{u}\bar{v})\frac{\bar{v}}{v^2}$ componenta longitudinală a vitezei și cu $u_{\perp}$ componenta ei transversală (față de v) se știe că

$$u' = \frac{u_{\parallel} - v + u_{\perp}\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}{1 - \bar{u}\bar{v}/c_0^2} \tag{2}$$

unde c_0 e viteza limită, care apare în transformarea Lorentz.

Din (2) se calculează fără dificultăți expresia modulului vitezei $\bar{u}'$ și se deduce relația de transformare

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c_0^2}} = \frac{1 - \bar{u}\bar{v}/c_0^2}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \tag{3}$$

* Comunicare prezentată la 7 aprilie 1962 în cadrul celei de-a VII sesiuni științifice a cadrelor didactice din I.P.B.

2. *Variația masei cu viteza.* Fie m_0 valoarea masei de repaus a unui punct material care are la viteza u masa

$$m = m_0 f(u^2), \quad \text{cu} \quad f(0) = 1 \tag{4}$$

Funcțiunea f, încă nedeterminată, dar presupusă uniformă, continuă și derivabilă, nu poate depinde de direcția vitezei deoarece ar exista în acest caz direcții privilegiate în spațiu — și, deci, sisteme de referință privilegiate — în contradicție cu principiul relativității restrînse.

Considerăm ciocnirea perfect plastică a două puncte materiale identice, proiectate unul împotriva celuilalt cu vitezele $u_1 = u$ și $u_2 = -u$, față de S. În acord cu definiția masei drept măsură a inerției corpurilor, corpul rezultat din ciocnirea și cuplarea celor două mici puncte materiale va fi în repaus în S. Dacă $M = M_0 F(u_3^2)$ e masa lui și $u_3 = 0$ viteza lui în S, relația (1) de conservare a masei se scrie în referențialul S

$$m_0 f(u^2) + f((-u)^2) = M_0 F(0) = M_0 \tag{5}$$

sau

$$2 m_0 f(u^2) = M_0 \tag{6}$$

iar în referențialul S'

$$m_0 [f(u_1'^2) + f(u_2'^2) = M_0 f(u_3'^2) = M_0 F(v^2)] \tag{7}$$

deoarece cu (2) $u_3' = -v$ dacă $u_3 = 0$.

Înlocuind pe M_0 din (6) în (7) și simplificînd cu $m_0 \neq 0$ (ceea ce exclude aplicarea acestui raționament la particulele de masă de repaus nulă, în acord cu caracterul strict mecanic al interacțiunii) se obține ecuația funcțională

$$f(u_1'^2) + f(u_2'^2) = 2 f(u^2)\ F(v^2) \tag{8}$$

în care $u_1'^2$ și $u_2'^2$ sînt funcțiuni de variabilele independente $u^2 = |\bar{u}|^2 = |\bar{u}_1|^2 = |\bar{u}_2|^2$, $v^2 = |\bar{v}|^2$ și $\bar{u}\bar{v}$, determinate cu ajutorul relației (3):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u_1'^2/c_0^2}} = (1 - \bar{u}\bar{v}/c_0^2) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u_2'^2/c_0^2}} = (1 + \bar{u}\bar{v}/c_0^2) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \tag{10}$$

Cum $\bar{u}\bar{v}$ nu apare în (8) el poate fi eliminat între (9) și (10), adunînd aceste relații și se obține o condiție de legătură unică între variabilele ecuației (8) și anume

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u_1'^2/c_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - u_2'^2/c_0^2}} = 2 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \tag{11}$$

Observăm mai întîi că ecuația funcțională (8) trebuie să subsiste și în cazul limită $u \to 0$ în care $f(u^2) \to 1$, iar $f(u_1^2) \to f(v^2)$ și $f\left(\frac{v^2}{2}\right) \to f(v^2)$. Rezultă atunci imediat că

$$f(v^2) = F(v^2), \quad \text{la orice } v^2, \tag{12}$$

adică dependența masei de viteză este aceeași și pentru corpul rezultat prin ciocnirea perfect plastică a celor două mici puncte materiale identice. Cu această observație rezultă pentru funcțiunea necunoscută f ecuația funcțională

$$f(u_1'^2) + f(u_2'^2) = 2 f(u^2) f(v^2) \tag{13}$$

în care variabilele sînt legate prin unica condiție (11). Rezolvarea acestei ecuații funcționale (în ipoteza continuității și derivabilității funcțiunii f) se face comod cu ajutorul schimbării de variabilă

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - u_1'^2/c_0^2}}; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - u_2'^2/c_0^2}}; \quad x = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - v/c_0^2}} \tag{14}$$

sugerată de condiția de legătură (11).

Dacă se notează

$$f(u) = g\left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}}\right) = g(x) \tag{15}$$

unde

$$0 \leqslant u < c_0 \quad \text{și deci} \quad 1 \leqslant x < \infty$$

se obține pentru g ecuația funcțională

$$g(x_1) + g(x_2) = 2\, g(x)\, g(y) \tag{16}$$

cu unica condiție de legătură între valorile variabilei independente:

$$x_1 + x_2 = 2\, x\, y. \tag{17}$$

Considerînd că această relație definește funcția $x_1\ (x_2, x_0, y)$ și derivînd în acest caz relația (16) în raport cu y se obține

$$g'(x_1)\, 2x = 2\, g(x)\, g'(y) \tag{18}$$

Considerînd că aceeași relație definește funcția $x_2(x_1, x_0, y)$ și derivînd în acest caz relația (16) în raport cu y se obține

$$g'(x_2)\, 2x = 2\, g(x)\, g'(y) \tag{19}$$

Relațiile (18) și (19) trebuie să fie valabile pentru orice valori ale variabilelor independente x și y și rezultă

$$g'(x_1) = g'(x_2) \tag{20}$$

Cum în această relație x_1 și x_2 au valori independente între ele, funcția $g'(x)$ trebuie să se reducă la o constantă în domeniul de existență consi-

derat. Introducînd această valoare constantă ne nulă (deoarece prin ipoteză masa depinde de viteză) în (18) și simplificînd, rezultă $x=g(x)$, adică în general :

$$g(x) = x = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}} = f(u^2) \tag{21}$$

Dependența masei de viteză e dată deci de relația

$$\boxed{m = m(u^2) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2\, c_0^2}}} \tag{22}$$

3. *Caracterul universal al dependeței masei de viteză.* Raționamentul precedent poate fi aplicat oricărui punct material susceptibil de a face obiectul unei ciocniri strict mecanice și perfect plastice cu un punct material identic cu el. Dependența masei de viteză este deci, dată de relația (22), oricare ar fi punctul material din clasa considerată. Experiența arată că există și particule care nu sînt susceptibile de a face obiectul unei ciocniri perfect plastice cu alte particule de aceeași masă de repaus (de ex. electronii) ; e însă suficient să considerăm ciocnirea perfect plastică a unei asemenea particule cu un punct material din prima clasă, pentru a ne convinge că relația (22) are un caracter universal. Fie $\bar{w}$ viteza cu care se proiectează o asemenea particulă de masă de repaus m_0, împotriva unui punct material de masă de repaus m_0 și viteză $\bar{u}$, astfel încît corpul de masă de repaus M_0, rezultat prin ciocnirea lor perfect plastică și strict mecanică, să rămînă în repaus în referențialul considerat S. Fie $\bar{w}'$ și $\bar{u}'$ vitezele corespunzătoare în referențialul S' ales astfel încît

$$\bar{v}\,\bar{u} = \bar{v}\,\bar{w} = 0 \tag{23}$$

Relația de conservare a masei se scrie în cele două referențiale sub formele

$$n_0 F(w^2) + m_0 f(u^2) = M_0 \tag{24}$$

$$n_0 F(w'^2) + m_0 f(u'^2) = M_0 f(v^2) \tag{25}$$

în care $F(w^2)$ e funcția de viteză, necunoscută, a particulei considerate. Trecînd la schimbarea de variabilă

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c_0^2}}\,;\quad z' = \frac{1}{\sqrt{1 - w'^2/c_0^2}}\,;\quad x = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}}\,;$$
$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c_0^2}}\,;\quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \tag{26}$$

notînd

$$F(w^2) = G(z)\,;\quad f(u^2) = g(x) = x \quad \text{(v. 21)} \tag{27}$$

și eliminînd pe M_0, se obține din (24) și (25) relația

$$n_0 (G(z') - yG(z)) = m_0 (xy - x') \tag{28}$$

Folosind acum relația de transformare a vitezelor (3), cu (23), rezultă că

$$z' = zy \quad \text{și} \quad x' = xy \tag{29}$$

Membrul drept al relației (28) e deci identic nul și pentru funcțiunea necunoscută $G(z)$ rezultă ecuația funcțională

$$G(zy) = yG(z) \quad \text{cu} \quad G(1) = 1 \tag{30}$$

cu z și y independente între ele. Derivînd această ecuație în raport cu y și eliminînd, între expresia obținută și cea inițială, pe $G(z)$, se obține pentru $G(zy) = G(z)$ ecuația diferențială $\frac{dG(z')}{dz} = \frac{1}{z'} G(z')$ care integrată condiția inițială $G(1) = 1$, are soluția $G(z) = z$.
Revenind la funcția de viteză a masei, rezultă

$$F(w^2) = G(z) = z = 1/\sqrt{1 - w^2/c_0^2} \tag{31}$$

adică dependența de viteză (22).

4. *Teorema conservării impulsului.* Considerăm acum ciocnirea strict mecanică a unui grup de M de puncte materiale de mase de repaus m_{0k} și de viteze $\bar{u}_k$ (față de S), respectiv $\bar{u}'_k$ (față de S') — cu $k = 1, 2 \ldots M$ — și admitem ca în urma ciocnirii rezultă N puncte materiale de mase de repaus n_{0j} și de viteze $\bar{w}_j$, respectiv $\bar{w}'_j$, — cu $j = 1, 2, \ldots N$.
Admițînd dependența masei de viteză dată de (22) pentru fiecare din punctele materiale menționate, relața (1) de conservare a masei în ciocnirea multiplă considerată se scrie în S

$$\sum_{k=1}^{M} m_{0k} / \sqrt{1 - u_k^2/c_0^2} = \sum_{k=1}^{N} n_{0j} / \sqrt{1 - w_j^2/c_0^2} \tag{32}$$

respectiv în S'

$$\sum_{k=1}^{M} m_{0k} / \sqrt{1 - u_u'^2/c_0^2} = \sum_{j=1}^{N} n_{0j} / \sqrt{1 - w_j'^2/c_0^2} \tag{33}$$

înlocuind în (33) factorii de viteză ai maselor de repaus cu valorile lor care rezultă din (3), înmulțind ecuația astfel obținută cu $\sqrt{1 - v^2/c_0^2} \neq 0$ și scăzînd-o din (32) se obține relația

$$\sum_{k=1}^{M} m_{0k} \bar{u}_k \bar{v} / \sqrt{1 - u_k^2/c_0^2} = \sum_{j=1}^{N} n_{0j} \bar{w}_j \bar{u} / \sqrt{1 - w_j^2/c_0^2}$$

$$\text{sau} \quad \bar{v} \left[\sum_{k=1}^{M} m_k \bar{u}_k - \sum_{j=1}^{N} n_j \bar{w}_j \right] = 0 \tag{34}$$

Cum viteza v a lui S' față de S e arbitrară în direcție și mărime, parantieza trebuie să fie identic nulă și rezultă relația de conservare

$$\sum_{k=1}^{M} m_k u_k = \sum_{j=1}^{N} n_j w_j \tag{35}$$

a mărimii vectoriale definită de produsul dintre masă și viteză, numită *impuls mecanic*.

Catedra de electronică

BIBLIOGRAFIE

[1] *A. Timotin:* La transformation inertiale générale, Bul. I.P.B. XXI/2, 1959.

[2] *W. Pauli:* Relativitätstheorie, Encyklopädie der Math. Wiss. V_2.

[3] *O. Onicescu:* Les axiomes de la mécanique du point material. Analele Univ. C. I. Parhon. seria Acta logica 1, 1960.

О РЕЛАТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

(Резюме)

Выводятся соотношения, выражающие зависимость массы от скорости, а также сохранение количества движения, для системы материальных точек, применением принципа относительности к закону сохранения инертной массы в взаимодействиях чисто механического характера (удары).

ON THE RELATIVISTIC DYNAMICS OF THE SYSTEMS OF PARTICLES

(Summary)

The law of the relativistic variation of mass with velocity and the law of the conservation of momentum for a system of particles are deduced by using the principle of relativity) from the conservation of mass, as characteristic property of the mechanical interactions (the collisions).

SUR LA DYNAMIQUE RELATIVISTE DES SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

(Résumé)

La loi de la variation relativiste de la masse inerte avec la vitesse et la loi de la conservation de la quantité de mouvement d'un système de points matériels sont déduites à l'aide du principe de la relativité restreinte, en admettant que la conservation de la masse inerte est une propriété qui caractérise les interactions purement mécaniques de ces points matériels (c'est-à-dire les collisions).

ÜBER DIE RELATIVISTISCHEN DYNAMIK DER PARTIKELNSYTEME

(Zusammenfassung)

Der Satz der relativistischen Variation der Masse mit der Geschwindigkeit und der Satz der Erhaltung des Impulses eines Partikelnsystems sind mit Hilfe des Relativitätprinzips bewiesen; man nimmt an, dass die Erhaltung der Masse eine charakteristische Eigenschaft der rein mechanischen Wechselwirkungen (Stösse) ist.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

REZISTENȚA MATERIALELOR

UNELE ASPECTE ALE REZISTENȚEI ȚEVILOR

I. ZAMFIRESCU

Introducere

1. *Generalități.* Rezistența tuburilor, atît cu pereți subțiri cît și cu pereți groși, este foarte bine studiată în special în cazul solicitărilor ce permit simetria eforturilor, cum este cazul presiunii uniform distribuite și a întinderii sau compresiunii axiale.

Cu toate acestea, nu se poate spune că problema rezistenței țevilor este epuizată. Aspecte noi ale modului de comportare a țevilor sînt destul de des scoase la iveală în literatura de specialitate.

În cele ce urmează vom considera cazul solicitării unei țevi la presiune interioară și exterioară precum și la un efort axial. Această problemă este cunoscută și tratată. Soluția clasică a problemei conduce la stabilirea eforturilor unitare normale pe direcția razei, a tangentei și a axei, precum și a deformațiilor corespunzătoare.

Ceea ce nu este precizat în această soluție este însă un mijloc prin care să se recunoască de ce natură este efortul unitar normal și deformația specifică corespunzătoare, într-un ansamblu de posibilități de solicitare. Cu alte cuvinte, nu se arată în metoda clasică care este intervalul de solicitare pentru a avea fie numai compresiune, fie numai întindere, fie ambele, precum și o anumită variație a acestora. În problemele practice este însă adesea necesar ca țeava să fie solicitată într-un anumit fel, de exemplu numai la compresiune, din cauza că numai la această solicitare ea poate să reziste cum este cazul țevilor de fontă. Dacă nu se poate obține o solicitare la compresiune, este uneori suficient dacă solicitarea conduce la compresiune măcar pe o parte din grosimea peretelui și la întindere pe cealaltă parte. Determinarea forțelor exterioare, astfel ca să se obțină un anumit fel de solicitare este dificilă cu metoda obișnuită.

Folosind însă ca parametru variabil al solicitării, raportul dintre presiunea interioară și cea exterioară, este posibilă determinarea variației complete a eforturilor unitare normale deci reprezentarea tuturor posibilităților de solicitare la presiune interioară, exterioară și compresiune sau întindere axială.

Scopul prezentei lucrări este tocmai expunerea acestei posibilități de investigație globală la țevile astfel solicitate.

Lucrarea va cuprinde partea referitoare la variația eforturilor unitare normale și a deformațiilor corespunzătoare pe direcția razei, eforturi care apar într-o țeavă solicitată așa cum s-a arătat. După cum se știe, aceste eforturi pe direcția razei nu sînt singurele ci, împreună cu cele pe direcția tangentei și a axei, reprezintă eforturile unitare principale dezvoltate în masa țevii. Despre acestea din urmă nu ne vom ocupa însă deocamdată.

2. *Cazurile de solicitare.* În cele ce urmează vom considera următoarele cazuri:

a — țeava deschisă la capete, solicitată numai la presiune interioară și exterioară, uniform distribuită;

b — țeava deschisă la capete dar supusă și la un efort axial de compresiune sau întindere;

c — țeava închisă la capete, solicitată numai la presiune interioară și exterioară uniform distribuită;

d — țeava închisă la capete dar solicitată și la un efort axial de compresiune sau întindere.

3. *Ipoteze și notații.* Se consideră o țeavă omogenă, izotropă și de lungime oricît de mare; deaceea se folosesc formulele cunoscute de la rezistența tuburilor cu pereți groși în care se presupune presiunea uniform distribuită pe fața interioară și exterioară a țevii iar compresiunea sau întinderea axială uniform repartizată pe toată grosimea peretelui țevii.

Se folosesc următoarele notații: r_i și r_e raza interioară, respectiv exterioară a țevii; p_i și p_e presiunea care solicită fața interioară respectiv exterioară a țevii; σ_r, σ_t, σ_z efortul unitar normal pe direcția razei, respectiv a tangentei și a axei, într-un punct din peretele țevii, avînd distanța r față de axa țevii $(r_i < r < r_e)$ iar ε_r, ε_t, ε_z deformațiile specifice corespunzătoare.

Se mai notează:

$$a = \frac{r_e^2}{r_i^2}; \quad u = \frac{r^2}{r_i^2}$$

unde, evident, există totdeauna relația $a > u > 1$.

I. Considerațiuni asupra eforturilor unitare normale pe direcția razei

1. Expresia acestor eforturi, se știe că este

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p_i - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_i^2} - \frac{r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)}$$

care se mai poate scrie

$$\sigma_r = -\frac{1}{a-1}\left[p_i\left(\frac{a}{u} - 1\right) + p_e a\left(1 - \frac{1}{u}\right)\right] \qquad (1)$$

Primele două derivate în raport cu r sînt

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2ar_i^2}{a-1}(p_i - p_e)\frac{1}{r^3} \tag{2}$$

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = -\frac{6ar_i^2}{a-1}(p_i - p_e)\frac{1}{r^4} \tag{3}$$

2. Din relația (1), ținînd seamă că avem totdeauna $p_i > 0$, $p_e > 0$, $\frac{a}{u} > 1$ și $u > 1$, rezultă că paranteza mare este totdeauna pozitivă, oricare ar fi valorile lui p_i și p_e și deci σ_r *este totdeauna negativă, deci de natura unei compresiuni.*

3. Din relația (2) rezultă că pentru cazul în care $\frac{p_i}{p_e} < 1$ atunci cînd r crește, σ_r descrește.

Din relația (3) rezultă că curba reprezentativă a variației efortului σ_r, atunci cînd r crește, este orientată cu concavitatea către + σ_r (Fig. 1-a).

Dimpotrivă, pentru cazul cînd $\frac{p_i}{p_r} > 1$, atunci cînd r crește, σ_r crește iar concavitatea curbei reprezentative este orientată către $-\sigma_r$ (Fig. 1-c).

Dacă însă $\frac{p_i}{p_e} = 1$, cele două derivate, anulîndu-se, rezultă că σ_r este o constantă negativă, reprezentată printr-o paralelă la axa Or (Fig. 1-b).

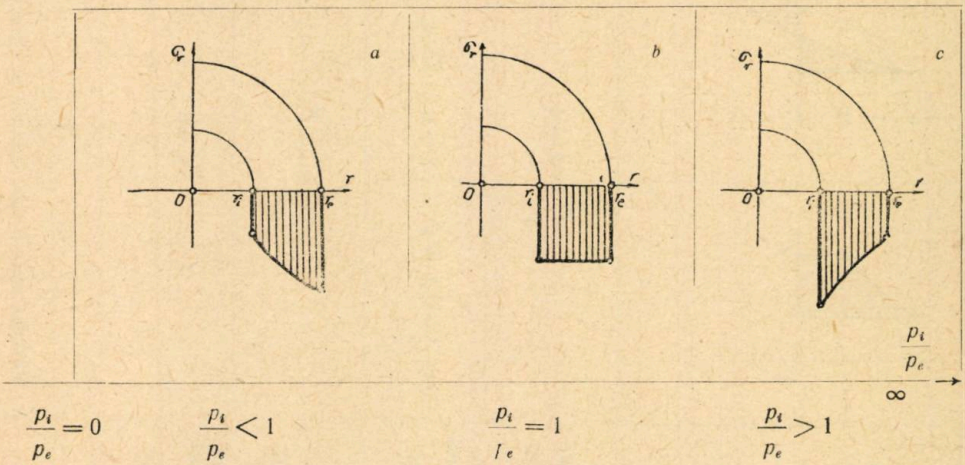


Fig. 1

Variația deformației specifice pe direcția razei, la țeava supusă la presiune interioară

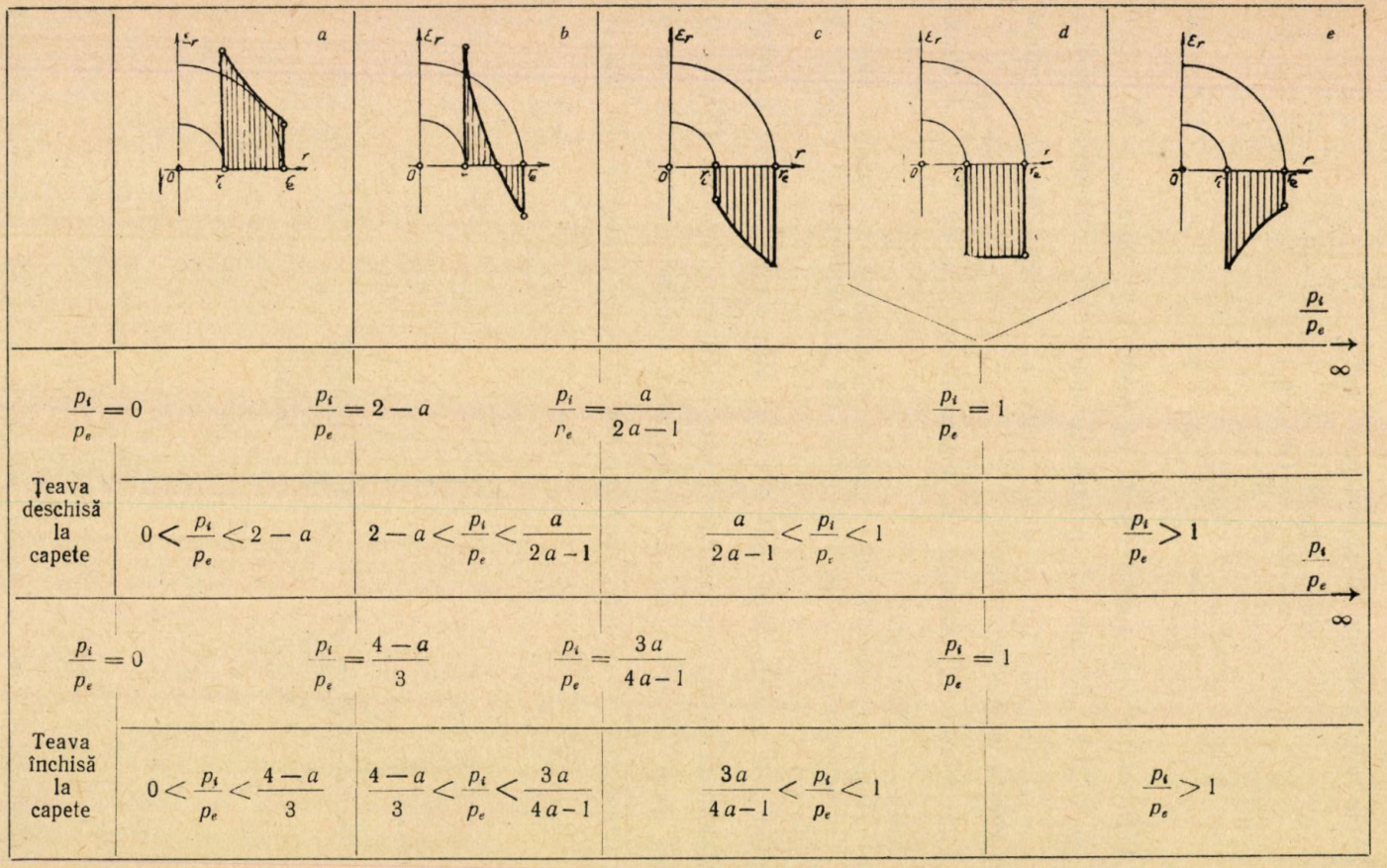


Fig. 2

Variaţia deformaţiei unitare pe direcţia razei la ţeava supusă numai la presiune interioară şi exterioară

Din cele arătate se observă că nu există alte posibilități de variație a eforturilor unitare normale pe direcția razei, deoarece raportul $\frac{p_i}{p_e}$ nu poate varia decît de la 0 la ∞, astfel că reprezentarea din Fig. 1 arată toate cazurile posibile de variație a acestor eforturi.

II. Asupra deformațiilor specifice pe direcția razei

A. *Cazul țevii deschise la capete și solicitate numai la presiune interioară și exterioară uniform distribuite.*

1. Expresia acestei deformații este cunoscută sub forma

$$\varepsilon_r = \frac{2}{3E}\left[\frac{r_i^2 p_i - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_i^2} - \frac{2 r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)}\right]$$

care se mai scrie, ținînd seamă de notațiile stabilite, sub forma

$$\varepsilon_r = -\frac{2}{3E(a-1)}\left[p_i\left(\frac{2a}{u} - 1\right) + p_e a\left(1 - \frac{2}{u}\right)\right] \tag{4}$$

Derivatele în raport de r sînt

$$\frac{d\varepsilon_r}{dr} = \frac{8 a r_i^2}{3E(a-1)}(p_i - p_e)\frac{1}{r^3} \tag{5}$$

$$\frac{d^2\varepsilon_r}{dr^2} = -\frac{8 a r_i^2}{E(a-1)}(p_i - p_e)\frac{1}{r^4} \tag{6}$$

2. Din relațiile (5) și (6), rezultă că pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$, atunci cînd r crește, ε_r descrește iar curba reprezentativă are concavitatea către $+\varepsilon_r$.

Din contră, dacă $\frac{p_i}{p_e} > 1$ atunci cînd r crește. crește și ε_r iar curba are concavitatea către $-\varepsilon_r$.

În cazul cînd $\frac{p_i}{p_e} = 1$, deformația ε_r este o constantă.

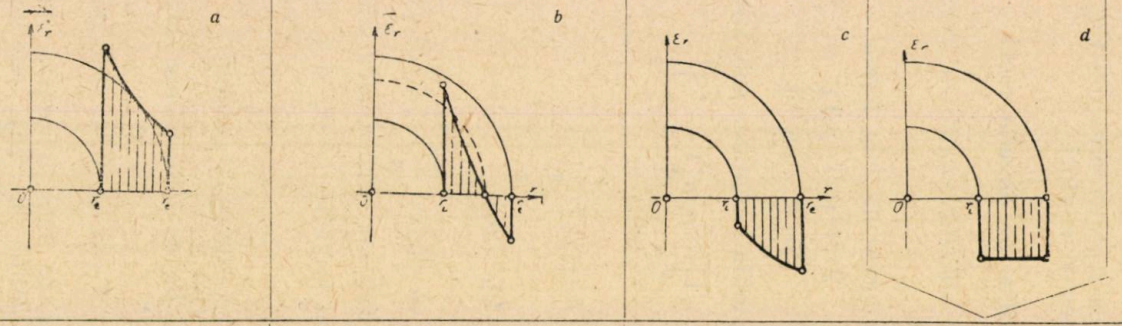
3. *Determinarea condițiilor ca ε_r să fie de natura unei alungiri pe toată grosimea peretelui țevii.* (Fig. 2-a).

Să considerăm cazul $\frac{p_i}{p_e} < 1$. În acest caz, dacă ε_r este pozitivă pe fața exterioară, atunci este pozitivă și pe fața interioară, funcțiunea fiind descrescătoare. Punînd această condiție în (4), rezultă relația

$$\frac{p_i}{p_e} < 2 - a \tag{7}$$

Deoarece $a > 1$, rezultă $2 - a < 1$ și deci este satisfăcută condiția inițială $\frac{p_i}{p_e} < 1$.

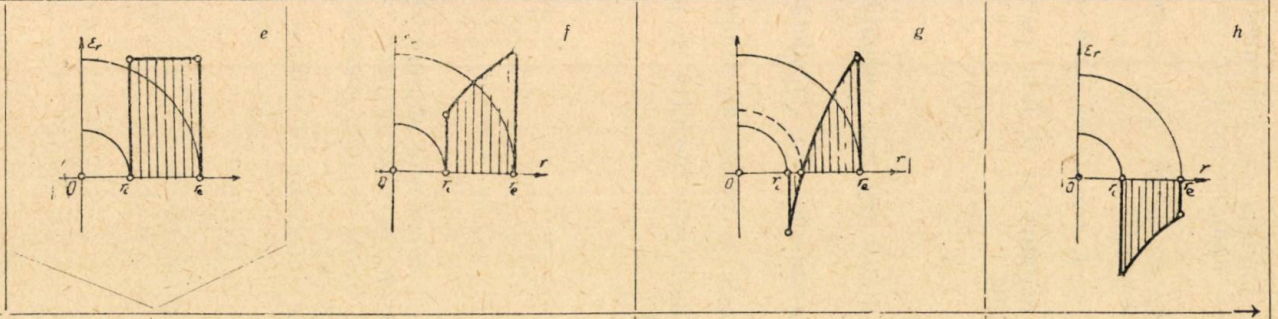
Cazul $p_i / p_e \leqslant 1$



	a	b	c	d
Țeava deschisă la capete	$\frac{p_i}{p_e} = 0$	$\frac{p_i}{p_e} = 2 - a - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2}$	$\frac{p_i}{p_e} = \frac{a}{2a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2 a}\right)$	$\frac{p_i}{p_e} = 1$
	$F \leqslant p_e 2\pi r_i^2 (2-a)$	$p_e 2\pi r_i^2 (1-a) < F$	$F \leqslant p_e 2\pi r_i^2 a$	$F > p\, 2\pi r_i^2 (1-a)$
Țeava închisă la capete	$\frac{p_i}{p_e} = 0$	$\frac{p_i}{p_e} = \frac{4-a}{3} = \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2}$	$\frac{p_i}{p_e} = \frac{3a}{4a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2 a}\right)$	$\frac{p_i}{p_e} = 1$
	$F \leqslant p_e 2\pi r_i^2 (4-a)$	$p_e 2\pi r_i^2 (1-a) < F$	$F \leqslant p\, 6\pi r_i^2\, a$	$F > p\, 2\pi r_i^2 (4-a)$

Fig. 3. a, b, c, d.

Cazul $p_i / p_e \geqslant 1$



Țeava deschisă la capete	$\frac{p_i}{p_e} = 1$	$\frac{p_i}{p_e} = \frac{a}{2a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2 a}\right)$	$\frac{p_i}{p_e} = 2 - a - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2}$	∞
	$F < p_e 2\pi r_i^2 (1-a)$			
Țeava închisă la capete	$\frac{p_i}{p_e} = 1$	$\frac{p_i}{p_e} = \frac{3a}{4a-1}\left(1 - \frac{F}{a_e 6\pi r_i^2 a}\right)$	$\frac{p_i}{p_e} = \frac{4-a}{3} - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2}$	∞
	$F < p_e 2\pi r_i^2 (1-a)$			

Fig. 3. e, f, g, h.
Variația deformației specifice pe direcția razei, la țeava supusă atît la presiune interioară și exterioară, cît și la un efort axial

În consecință, relația (7) reprezintă condiția ca deformația specifică ε_r să fie pozitivă, deci de natura unei alungiri, pe toată grosimea peretelui țevii.

4. *Determinarea condițiilor ca* ε_r *să fie de natura unei scurtări pe toată grosimea peretelui țevii.* (Fig. 2—c—d—e).

Făcînd ca mai sus, presupunerea că $\frac{p_i}{p_e} < 1$, rezultă că dacă ε_r este negativă pe fața interioară, trebuie să fie negativă și pe fața exterioară. Introducînd condiția în relația (4), se obține

$$\frac{p_i}{p_e} > \frac{a}{2a-1} \tag{8}$$

Deoarece $\frac{a}{2a-1} < 1$, rezultă că inegalitatea (8) este compatibilă cu condiția inițială $\frac{p_i}{p_e} < 1$ dar nu o limitează superior. Să considerăm deci și cazul $\frac{p_i}{p_e} > 1$; în acest caz, cînd r crește, ε_r crește de asemenea și deci dacă ε_r este negativă pe fața exterioară este negativă și pe fața interioară. Punînd condiția în (4) rezultă

$$\frac{p_i}{p_e} > 2 - a \tag{9}$$

dar deoarece

$$\frac{a}{2a-1} > 2 - a \tag{10}$$

rezultă că relația (8) include relația (9) și reprezintă singură condiția ca ε_r să fie negativă și de natura unei scurtări pe direcția razei.

5. *Determinarea condițiilor în care* ε_r *poate fi atît pozitivă cît și negativă în grosimea peretelui țevii* (Fig. 2—b).

Punînd în (4) condiția $\varepsilon_r > 0$ pe fața interioară se obține

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{a}{2a-1}$$

iar pentru a avea $\varepsilon_r < 0$ pe fața exterioară se obține

$$\frac{p_i}{p_e} > 2 - a$$

de unde

$$2 - a < \frac{p_i}{p_e} < \frac{a}{2a-1}. \tag{11}$$

Relațiile (11) reprezintă deci condițiile ca ε_r să fie pozitivă pe o porțiune dinspre interior și negativă pe o porțiune dinspre exterior a peretelui țevii.

Să punem acum condiția ca ε_r să fie negativă spre interior și pozitivă spre exterior. În acest caz. ε_r trebuie să fie crescătoare deci impune $\frac{p_i}{p_e} > 1$. Dar din cele arătate la 4 precedent, relația (8) arată că pentru $\frac{p_i}{p_e} > \frac{a}{2a-1}$ deci cu atît mai mult pentru $\frac{p_i}{p_e} > 1$, deformația ε_r este negativă pe toată grosimea țevii, deci nu poate fi și pozitivă.

Rezultă că în peretele unei țevi putem avea deformația ε_r pozitivă spre interior și negativă spre exterior, *dar nu și invers.*

6. *Condiția ca* ε_r *să fie o constantă negativă.* (Fig. 2—d).

Acest caz are loc pentru

$$\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0$$

cînd rezultă

$$\frac{p_i}{p_e} = 1 \tag{12}$$

Introducînd în (4) se găsește

$$\varepsilon_r = -\frac{2p}{3E} \tag{13}$$

unde $p = p_i = p_e$.

7. *Observația 1.* Dacă în relația (7) razele sînt astfel încît $2-a<0$ deoarece $\frac{p_i}{p_e}$ nu poate fi negativ, rezultă că pentru țevi cu asemenea raze nu se pot obține deformații specifice radiale pozitive, oricare ar fi valorile presiunilor. Asemenea tuburi au razele legate prin relația

$$r_e > r_i\sqrt{2} \tag{14}$$

iar grosimea lor este

$$r_e - r_i > r_i(\sqrt{2}-1) \tag{15}$$

8. *Observația 2.* Deoarece pentru $\varepsilon_r < 0$ avem condițiile

$$\frac{a}{2a-1} < \frac{p_i}{p_e} < 1$$

indicate la pct. 4, rezultă că $p_i < p_e$ adică chiar pentru valori ale presiunii exterioare mai mari decît ale presiunii interioare se pot obține deformații specifice radiale negative, ceea ce la prima vedere pare neverosimil.

9. *Observația 3.* În cazul arătat la punctul 5 cînd există atît $\varepsilon_r > 0$ cît și $\varepsilon_r < 0$, rezultă că există și o suprafață neutră în care $\varepsilon_r = 0$; această suprafață este cilindrică avînd aceeași axă ca țeava și are raza

$$r = r_e \sqrt{\frac{2(p_i - p_e)}{p_i - p_e a}} \tag{16}$$

care este reală, ținînd seama că $\frac{p_i}{p_e} < 1$. (Fig. 2—b).

B. *Cazul țevii deschise la capete dar solicitate nu numai la presiune interioară și exterioară dar și la o compresiune sau întindere axială.*

1. Relația generală care dă deformația ε_r este în acest caz dată de expresia cunoscută.

$$\varepsilon_r = \frac{2}{3E}\left[\frac{r_i^2 p_i - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_i^2} - \frac{2 r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)} - \frac{F}{2\pi (r_e^2 - r_i^2)}\right]$$

care se mai poate scrie

$$\varepsilon_r = -\frac{2}{3E(a-1)}\left[p_i\left(\frac{2a}{u} - 1\right) + p_e a\left(1 - \frac{2}{u}\right) + \frac{F}{2\pi r_i^2}\right] \tag{17}$$

unde F are valoare algebrică

Derivatele și aliura generală a curbelor sînt aceleași ca în cazul *A*.

2. *Condițiile ca* ε_r *să fie pozitivă deci de natura unei alungiri pe toată grosimea peretelui țevii.*

a — *Raportul presiunilor este* $\frac{p_i}{p_e} < 1$. (Fig. 3-a).

Procedînd ca la A — 3, se găsește

$$\frac{p_i}{p_e} < 2 - a - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2} \tag{18}$$

De asemenea, trebuind să fie satisfăcută relația $\frac{p_i}{p_e} \geqslant 0$, este necesar să avem

$$2 - a - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2} \geqslant 0$$

de unde

$$F \leqslant p_e 2\pi r_i^2 (2 - a) \tag{20}$$

care, împreună cu (18), sînt condițiile căutate.

b — *Raportul presiunilor este* $\frac{p_i}{p_e} > 1$. (Fig. 3—e—f).

Pentru $\frac{p_i}{p_e}$ se găsește în mod analog, ținînd seamă că ε_r este crescătoare, condiția

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{a}{2a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2 a}\right) \tag{22}$$

Pentru F, condiția se reduce la satisfacerea relației $\frac{p_i}{p_e} > 1$ aplicată membrului al II-lea al relației (22) deoarece relația $\frac{p_i}{p_e} \geqslant 0$ este implicit satisfăcută. Această condiție este

$$F < p_e 2\pi r_i^2 (1-a) \tag{23}$$

care, împreună cu (22), sînt condițiile căutate.

3. *Condițiile ca* ε_r *să fie negativă deci de natura unei scurtări pe toată grosimea peretelui țevii.*

a — *Raportul presiunilor este* $\frac{p_i}{p_e} < 1$. (Fig. 3—c—d).

Procedînd ca la $A-4$, se găsește pentru $\frac{p_i}{p_e}$ condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \frac{a}{2a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2 a}\right) \tag{24}$$

și pentru F, condiția impusă de $\frac{p_i}{p_e} < 1$

$$F > p_e 2\pi r_i^2 (1-a) \tag{25}$$

care, împreună cu (24), sînt condițiile căutate.

b — *Raportul presiunilor este* $\frac{p_i}{p_e} > 1$. (Fig. 3—h).

Pentru $\frac{p_i}{p_e}$ se găsește, ținînd seama ca ε_r este crescătoare

$$\frac{p_i}{p_e} > 2 - a - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2} \tag{28}$$

4. *Condițiile ca* ε_r *să fie pozitivă pe fața interioară și negativă pe fața exterioară* (Fig. 3—b).

Această situație poate avea loc numai pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$ deoarece ε_r trebuie să fie descrescătoare.

Procedînd ca la *A*—5, și punînd condițiile să avem $\varepsilon_r > 0$ pe fața interioară și $\varepsilon_r < 0$ pe fața exterioară în relația (17), se găsește

$$2 - a - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2} < \frac{p_i}{p_e} < \frac{a}{2a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2 a}\right) \tag{30}$$

iar pentru ca șirul de inegalități să fie posibil, este necesar de asemenea să avem

$$2 - a - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2} < \frac{a}{2a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2 a}\right)$$

de unde rezultă

$$F > p_e 2\pi r_i^2 (1 - a) \tag{31}$$

care, împreună cu (30), sînt condițiile căutate.

5. *Condițiile ca* ε_r *să fie negativă pe fața interioară și pozitivă pe fața exterioară.* (Fig. 3—g).

Această situație poate avea loc numai cînd raportul presiunilor este $\frac{p_i}{p_e} > 1$ deoarece ε_r trebuie să fie crescătoare.

Pentru $\frac{p_i}{p_e}$ se găsește condiția

$$\frac{a}{2a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2 a}\right) < \frac{p_i}{p_e} < 2 - a - \frac{F}{p_e 2\pi r_i^2} \tag{32}$$

Pentru F se găsește, raționînd ca în cazul precedent

$$F < p_e 2\pi r_i^2 (1 - a) \tag{33}$$

care, împreună cu (32), sînt condițiile căutate.

6. *Condiția ca* ε_r *să fie o constantă negativă pe toată grosimea țevii.* (Fig. 3—d).

Procedînd ca la *A*—6, se găsește că această situație are loc pentru $\frac{p_i}{p_e} = 1$ iar în ce privește pe F, are loc cînd acesta satisface relația

$$F > p\, 2\pi r_i^2 (1 - a) \tag{34}$$

care rezultă imediat din valoarea corespunzătoare a deformației ε_r :

$$\varepsilon_r = -\frac{2}{3E}\left[p + \frac{F}{2\pi r_i^2 (a-1)}\right] \tag{35}$$

unde $p = p_i = p_e$.

7. *Condiția ca* ε_r *să fie o constantă pozitivă pe toată grosimea țevii.* (Fig. 3—e).

In mod asemănător se găsește pentru $\frac{p_i}{p_e}$ valoarea $\frac{p_i}{p_e} = 1$ iar pentru F condiția dedusă din aceeași relație (35) :

$$F < p\,2\pi r_i^2 (1-a) \tag{36}$$

8. *Observația 1.* Relația (20), în care membrul al II-lea poate fi pozitiv dacă $2 - a > 0$, arată că F poate fi pozitiv dar nu mai mare decît permite această relație, pentru ca să aibă loc deformația pozitivă pe direcția razei ; putem deci afirma că *chiar dacă țeava este supusă la un efort de întindere F, există valori ale acestuia pentru care are loc îngroșarea peretelui țevii.*

9. *Observația 2.* Dacă în relația (20) avem $2-a<0$, rezultă că $F<0$ și deci, chiar dacă țeava este supusă la un efort de compresiune axial F, există valori ale acestuia, pentru care peretele țevii se subțiază în loc să se îngroașe ceea ce pare neverosimil, cu condiția ca grosimea țevii să corespundă relației $2-a<0$

10. *Observația 3.* În cazurile arătate la pct. 4 și 5, rezultă că *există* o suprafață neutră, cilindrică, coaxială țevii, în care $\varepsilon_r = 0$, a cărei rază este

$$r = r_e \sqrt{\frac{2(p_i - p_e)}{p_i - p_e a - \frac{F}{2\pi r_i^2}}} \tag{38}$$

Pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$, condiția ca r să fie reală este

$$F > (p_i - p_e a)\,2\pi r_i^2 \tag{39}$$

iar pentru $\frac{p_i}{p_e} > 1$, această condiție este

$$F < (p_i - p_e a)\,2\pi r_i^2 \tag{40}$$

(Fig. 3—b—g).

C. *Cazul țevii închise la capete și supuse la presiune interioară și exterioară care acționează atît pe fețele cilindrice cît și pe cele plane de la capete.*

1. Relația generală, cunoscută, care dă pe ε_r în acest caz este

$$\varepsilon_r = \frac{1}{3E}\left[\frac{r_i^2 p_i - r_e^2 p_e}{r_e^2 - r_i^2} - \frac{4 r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)}\right]$$

care se mai scrie, ținînd seama de notațiile stabilite

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{2E(a-1)}\left[p_i\left(\frac{4a}{u} - 1\right) + p_e a\left(1 - \frac{4}{u}\right)\right] \tag{41}$$

Derivatele în raport de r sînt aceleași ca și în cazurile A și B și sînt exprimate de formulele (5) și (6). Ca și în aceste cazuri vom avea aceeași corespondență între modul de variație al deformației ε_r și valorile raportului $\frac{p_i}{p_e}$.

2. *Condiția ca* ε_r *să fie pozitivă pe toată grosimea peretelui țevii.* Fig. (2—a).

Procedînd ca la A—3 se obține condiția

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{4-a}{3} \tag{42}$$

Deoarece avem

$$\frac{4-a}{3} < 1 \tag{43}$$

rezultă că (42) este compatibilă cu condiția $\frac{p_i}{p_e} < 1$.

3. *Condiția ca* ε_r *să fie negativă pe toată grosimea peretelui țevii.* (Fig. 2—c—d—e).

Se găsește în mod asemănător

$$\frac{p_i}{p_e} > \frac{3a}{4a-1} \tag{44}$$

și deoarece avem

$$\frac{3a}{4a-1} < 1, \tag{45}$$

relația (44) este compatibilă cu condiția $\frac{p_i}{p_e} < 1$.

4. *Condițiile ca* ε_r *să fie concomitent pozitivă și negativă în peretele țevii și anume pozitivă pe partea interioară și negativă pe partea exterioară.* (Fig. 2—b).

Procedînd ca la *A*—5 se găsește

$$\frac{4-a}{3} < \frac{p_i}{p_e} < \frac{3a}{4a-1} \tag{46}$$

relație posibilă deoarece avem

$$\frac{4-a}{3} < \frac{3a}{4a-1} < 1. \tag{47}$$

De asemenea se demonstrează ca și la *A*—5 că ε_r nu poate fi negativă pe fața interioară și pozitivă pe fața exterioară.

5. *Condiția ca* ε_r *să fie constantă și anume negativă pe toată grosimea peretelui țevii* (Fig. 2—d).

Se găsește ca la *A*—6 condiția

$$\frac{p_i}{p_e} = 1$$

și valoarea negativă a deformației

$$\varepsilon_r = -\frac{p}{3E} \tag{48}$$

unde $p = p_i = p_e$.

6. *Observația 1.* Din relațiile (44) și (45) rezultă că *țeava poate suferi subțieri chiar pentru valori ale presiunii interioare mai mici decît ale presiunii exterioare* însă în limitele indicate de relația (44).

7. *Observația 2.* În cazul de la pct. 4 există o suprafață neutră cilindrică, coaxială țevii, pe care deci $\varepsilon_r = 0$. a cărei rază este

$$r = r_e \sqrt{\frac{p_i - p_e}{p_i - p_e a}} \tag{49}$$

și care este reală pentru $\frac{p_i}{p_e} < a$, relație satisfăcută deoarece avem $\frac{p_i}{p_e} < 1$. (Fig. 2—b).

7. *Observația 3.* — În cazul de la punctul 3 rezultă că *există anumite valori ale razelor țevii pentru care aceasta nu poate suferi îngroșare, oricare ar fi valorile presiunilor.*

Razele acestor țevi sînt legate prin relația

$$4 - a \leqslant 0$$

de unde

$$r_e \geqslant 2\, r_i \tag{50}$$

iar grosimea peretelui este

$$r_e - r_i \geqslant r_i\,. \tag{51}$$

D. *Cazul țevii închise la capete și supusă nu numai la presiune interioară și exterioară ci și la acțiunea unui efort axial care însă nu produce flambaj.*

1. Expresia generală a deformației ε_r este în acest caz

$$\varepsilon_r = \frac{1}{3E}\left[\frac{r_i^2 p_i^2 - r_e^2 p_e^2}{r_e^2 - r_i^2} - \frac{4 r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)} - \frac{F}{2\pi (r_e^2 - r_i^2)}\right]$$

care se mai poate scrie

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{3E(a-1)}\left[p_i\left(\frac{4a}{u} - 1\right) + p_e a\left(1 - \frac{4}{u}\right) + \frac{F}{2\pi r_i^2}\right] \tag{52}$$

Derivatele în raport cu r sînt aceleași ca în cazurile precedente, fiind date de relațiile (5) și (6), iar între modul de variație al deformației ε_r și valoarea raportului $\frac{p_i}{p_e}$ există aceeași corespondență indicată în cazurile anterioare.

2. *Condiția ca* ε_r *să fie pozitivă pe toată grosimea peretelui țevii.*

a) *Raportul presiunilor este* $\frac{p_i}{p_e} < 1$ (Fig. 3—a).

Procedînd ca la *C*-2 se găsește

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{4-a}{3} - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2}\,. \tag{53}$$

Pentru a fi satisfăcută relația $\frac{p_i}{p_e} \geqslant 0$, trebuie să avem

$$\frac{4-a}{3} - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2} \geqslant 0$$

de unde

$$F \leqslant p_e 2\pi r_i^2 (4 - a) \tag{55}$$

care, împreună cu (53) reprezintă condițiile căutate.

b) *Raportul presiunilor este* $\frac{p_i}{p_e} > 1$ (Fig. 3—f).

Pentru $\frac{p_i}{p_e}$ se găsește, ținînd seama că ε_r este crescătoare:

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{3a}{4a - 1}\left(1 - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2 a}\right) \tag{57}$$

Punînd condiția să fie satisfăcută și relația $\frac{p_i}{p_e} > 1$, se obține

$$F < p_e 2\pi r_i^2 (1 - a) \tag{58}$$

care împreună cu (57) reprezintă condițiile căutate.

Relația $\frac{p_i}{p_e} \geqslant 0$ este implicit satisfăcută fiind satisfăcută relația $\frac{p_i}{p_e} > 1$.

3. *Condițiile ca* ε_r *să fie negativă pe toată grosimea peretelui țevii.* (Fig. 3—c—d—h).

a) *Raportul presiunilor este* $\frac{p_i}{p_e} < 1$ (Fig. $2 - c - d$).

Procedînd ca la *C*-3 se găsește

$$\frac{p_i}{p_e} > \frac{3a}{4a - 1}\left(1 - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2 a}\right) \tag{59}$$

iar pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$, se obține

$$F > p_e 2\pi r_i^2 (1 - a) \tag{61}$$

care împreună cu (59) reprezintă condițiile căutate.

b) *Raportul presiunilor este* $\frac{p_i}{p_e} > 1$ (Fig. 3—h).

Pentru $\frac{p_i}{p_e}$ se găsește $\frac{p_i}{p_e} > \frac{4-a}{3} - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2}$ (63)

Condiția $\frac{p_i}{p_e} \geqslant 0$ este implicit satisfăcută deoarece $\frac{p_i}{p_e} > 1$,

4. *Condiția ca* ε_r *să fie pozitivă pe fața interioară și negativă pe fața exterioară* (Fig. 3—b).

Această situație poate avea loc numai cînd raportul presiunilor este $\frac{p_i}{p_e} < 1$ deoarece ε_r trebuie să fie descrescătoare.

Pentru $\frac{p_i}{p_e}$ se găsesc condițiile

$$\frac{4-a}{3} - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2} < \frac{p_i}{p_e} < \frac{3a}{4a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2 a}\right) \tag{65}$$

Pentru F, condiția se găsește ca la B-4 și este

$$F > p_e 2\pi r_i^2 (1-a) \tag{66}$$

care, împreună cu (65) reprezintă condițiile căutate.

5. *Condițiile în care* ε_r *este negativă pe fața interioară și pozitivă pe fața exterioară.* (Fig. 3—g).

Această situație poate avea loc numai pentru cazul cînd $\frac{p_i}{p_e} > 1$ deoarece ε_r trebuie să fie crescătoare.

Pentru $\frac{p_i}{p_e}$ se găsește

$$\frac{3a}{4a-1}\left(1 - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2 a}\right) < \frac{p_i}{p_e} < \frac{4-a}{3} - \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2}. \tag{67}$$

Pentru F condiția se găsește ca la B-5 și este

$$F < {}_e 2\pi r_i^2 (1-a) \tag{68}$$

care, împreună cu (67) sînt condițiile căutate.

6. *Condițiile ca* ε_r *să fie constantă și anume negativă pe toată grosimea peretelui țevii.* (Fig. 3—d).

Se găsește pentru $\frac{p_i}{p_e}$ valoarea

$$\frac{p_i}{p_e} = 1. \tag{69}$$

Deformația are în acest caz valoarea

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{3E}\left[p + \frac{F}{2\pi r_i^2 (a-1)}\right] \tag{70}$$

Condiția pentru F, rezultînd din condiția $\varepsilon_r > 0$, este

$$F > p\, 2\pi r_i^2 (1-a) \tag{71}$$

unde $p = p_i = p_e$.

7. *Condiția ca* ε_r *să fie constantă și anume pozitivă pe toată grosimea peretelui țevii.* (Fig. 3—e).

Pentru $\frac{p_i}{p_e}$ avem aceeași condiție ca în cazul precedent.

Pentru F condiția este

$$F < p\, 2\pi r_i^2 (1-a) \tag{72}$$

8. *Observația 1.* Din relația (55) rezultă că pentru $4-a > 0$, avem $F > 0$ adică *chiar dacă țeava este supusă la eforturi de întindere axială ea poate suferi îngroșarea peretelui,* cu condiția ca valoarea acestor eforturi să satisfacă relația menționată.

9. *Observația 2.* Dacă în relația (55) avem $4-a < 0$ rezultă $F < 0$ și deci, chiar dacă țeava este supusă la un efort de compresiune axial F, există valori ale acestuia, pentru care peretele țevii se subțiază în loc să se îngroașe, cu condiția ca grosimea țevii să corespundă relației $4-a<0$.

10. *Observația 3.* În cazurile de la pct. 4 și 5 există o suprafață neutră, cilindrică, coaxială țevii, în care deci $\varepsilon_r = 0$, a cărei rază este

$$r = 2r_e \sqrt{\frac{p_i - p_e}{p_i - p_e a - \frac{F}{2\pi r_i^2}}} \tag{74}$$

Pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$ condiția ca raza să fie reală este

$$F > (p_i - p_e a)\, 2\pi r_i^2 \tag{75}$$

iar pentru $\frac{p_i}{p_e} > 1$ această condiție devine

$$F < (p_i - p_e a)\, 2\pi r_i^2 \tag{76}$$

(Fig. 3—b—g).

11. *Observația 4.* Efortul axial F poate fi astfel ales, încît deformația ε_r să fie constant nulă pentru $p = p_i = p_e$, pe toată grosimea peretelui țevii. Expresia sa este

$$F = p\, 2\pi r_i^2 (1 - a)$$

și rezultă din relațiile (35) și (70) fiind aceeași pentru țeava deschisă ca și pentru țeava închisă la capete.

E. *Concluzii*

Din cele arătate rezultă cît de numeroase sînt aspectele deformației țevii, deși în prezenta lucrare nu sînt tratate decît efortul unitar și deformația specifică pe direcția razei.

Recapitulăm unele din aceste aspecte:

— introducerea raportului $\frac{p_i}{p_e}$ ca parametru variabil al solicitării permite dezvăluirea gamei complete de aspecte ale distribuției efortului unitar și deformației specifice pe direcția razei;

— presiunea interioară și presiunea exterioară pot fi astfel alese în cadrul anumitor intervale încît țeava să fie supusă numai la compresiune sau numai la întindere sau la ambele concomitent;

— există un interval de valori ale raportului $\frac{p_i}{p_e}$ care conduce la existența unei suprafețe neutre a cărei rază este determinată în funcție de valorile acestor presiuni;

— există un interval de valori în care p_i fiind mai mic decît p_e (cînd s-ar părea că țeava trebuie să aibă deformații pozitive, adică grosimea peretelui să crească), și totuși aceasta se micșorează, ceea ce pare neverosimil la prima vedere;

— există dimensiuni ale țevilor pentru care, oricare ar fi presiunile ce le solicită, aceste țevi nu pot suferi nici o dată creșterea grosimii peretelui;

— există eforturi axiale de întindere pentru care țeava solicitată și la presiune interioară și exterioară suferă deformații radiale pozitive, adică grosimea crește în loc să scadă și invers, există eforturi axiale de compresiune pentru care țeava suferă deformații radiale negative adică grosimea scade în loc să crească;

— în sfîrșit, există valori ale presiunii și efortului axial pentru care țeava nu suferă nici un fel de deformare pe direcția razei.

Rezultatele obținute în prezenta lucrare sînt concretizate în diagramele din Fig. 1, 2 și 3.

Catedra de mecanică

BIBLIOGRAFIE

Beliaev — N. M. — Rezistența materialelor. Trad. din limba rusă Ed. tehnică — 1956.

Buzdugan Gh. și *colab.* — Curs de rezistența materialelor Ed. tehnică 1957.

Buzdugan Gh. și *colab.* — Culegere de probleme de Rezistența materialelor. Ed. tehnică 1955.

Filonenco — Borodici și *colab.* — Curs de Rezistența materialelor Trad. din limba rusă Ed. tehnică 1952.

Larman — E. K. — Proiectarea gurilor de foc. — Trad. din limba rusă I.D.T. 1950.

Ponomarev — K. D. și *colab.* — Bazele metodelor moderne de calcul în construcția de mașini. — Ed. Mașghiz — Moscova 1952.

НЕСКОЛЬКО ФОРМ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОСТОЙ ТРУБЫ

(Резюме)

В данной работе говорится об изучении упругого сопротивления простой трубы, при помощи соотноношения $\frac{p_i}{p_e}$ внутренних давлений к внешним, которые испытывают внутренние и наружные поверхности трубы.

В начале автор излагает только исследование единичных усилий и деформаций в стенке трубы, подвергающейся внутренним и наружным давлениям и осевым, равномерно распределенным усилиям F.

Введение соотношения $\frac{p_i}{p_e}$ в качестве изменяющегося параметра выявляет многочисленные формы распределения единичных усилий и деформаций, например:

— внутренние и наружные давления могут быть выбраны на промежутках таким образом, чтобы труба испытывала только усилия сжатия, или только усилия растяжения, или же оба усилия одновременно;

существуют значения внутренних радиусов r_i и наружных r_e, при которых никогда не происходит радиальных деформаций, при любом значении давлений p_i и p_e.

Приложенные диаграммы указывают на изменения единичных усилий и деформаций и дают возможность установить промежуток изменений элементов p_i, p_e, F для получения положительных или отрицательных усилий и деформаций.

QUELQUES ASPECTS DE LA RÉSISTANCE DES TUBES

(Résumé)

Il s'agit dans cet ouvrage d'étudier la résistance élastique du tube-simple en utilisant le rapport $\frac{p_i}{p_e}$ des pressions intérieures et extérieures qui s'exercent sur les surfaces internes et externes des tubes. Pour le commencement, l'auteur présente seulement l'étude des efforts et des déformations unitaires radiales dans la paroi du tube sollicité par les pressions p_i et p_e et par des efforts axiales, F, uniformément distribués.

L'introduction du rapport $\frac{p_i}{p_e}$ comme paramètre variable met en évidence de nombreux aspects de la distribution des efforts et des déformations unitaires, par exemple :

— les pressions intérieures et extérieures peuvent être choisies dans tels intervalles, que le tube soit sollicité seulement à la compression, ou seulement à la tension, ou enfin, à toutes les deux concomitant ;

— il y a des valeurs pour les rayons intérieurs r_i et extérieurss r_e pour lesquels ou n'a jamais de déformations radiales quelques soient les valeurs des pressions p_i et p_e.

Les diagrammes annexés montrent les variations des efforts et des déformations unitaires et fournissent la possibilité d'établir les intervalles des variations de p_i, p_e, F, pour avoir les efforts et les déformations positives ou négatives.

MANY ASPECTS OF THE TUBE STRENGTH

(Summary)

This article deals with the elastic strength of a thick walled tube, using the ratio $\frac{p_i}{p_e}$ between internal and external pressures working upon the inner and outer surfaces. For the time being, the author presents only the study of the unit stresses and strains on the wall of the tube subjected to internal and external pressures and to uniformly distributed axial forces, F.

The introduction of the ratio $\frac{p_i}{p_e}$ as a variable parameter shows numerous aspects of the distribution of unit stresses and strains such as :

— the internal and external pressures can be selected so that the tube may be subjected either to tension or to compression or to both simultaneously ;

— there are values of the interior r_i and exterior r_e radii for which the positive radial strains never occur whatever the values of the pressures p_i and p_e may be.

The annexed diagrams show the variations of the stresses and give the possibility to establish the variation interval of the p_i, p_e, F elements in order to obtain positive or negative stresses and strains.

EINIGE ASPEKTE DER ROHRFESTIGKEIT

(Zusammenfassung)

In diesem Artikel wird die elastische Festigkeit des dickwandigen Rohrs, mittels des Verhältnisses $\frac{p_i}{p_e}$ der inneren und äusseren Drücke, die auf die innere und äussere Rohroberfläche wirken, behandelt. Der Verfasser führt nämlich nur das Studium der Normalradialenspannungen und-Dehnungen vor im Falle dass auf Rohr die gleichmässig verteilten Längskräfte einwirken.

Die Einführung des Verhältnisses $\frac{p_i}{p_e}$ als Veränderliche erlaubt die Annahme zahlreichen Aspekte der Normalspannungen und-Dehnungen, zum Beispiel:

— innere und äussere Drücke können so gewählt sein dass das Rohr nur Zug-oder nur Druck-oder beide — Beanspruchungen ertragen kann;

— est gibt solche Werte der inneren und äusseren Halbmesser des Rohrs r_i und r_e für welche die radialen Dehnungen niemals positiv sind, wie gross auch die Druckwerte wären.

Die zugehörigen Diagrammen zeigen den Verlauf der Normalspannungen und — Dehnungen und ermöglichen das Gebiet der p_i, p_e, F — elementen festzustellen um positive oder negative Spannungen und Dehnungen zu erhalten.

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXV — 1963, Fascicola 6

SUMMARY OF THE REVIEWS IN 1963

MATHEMATICS

M. Tîrnoveanu. On an algebraic structure with operators defined in E. (1. 1963).

I. Miu. Concerning the adjoint equation of the differential straight equations. (1. 1963).

I. M. Miu. Concerning the particular solutions of the differential straight non — homogenuous equation. (2. 1963).

A. Tănăsescu. The descriptive aspect of interpretation of Lobacevski's geometry on a hyperboloid with two sheets. (2. 1963).

A. Tănăsescu. Principles and schemes for several new types of Perspectographs. (3. 1963).

G. Sudan, C. Bucur. On the diophantine aproximation of a linear ternary form. (4. 1963).

I. M. Miu. A new method for the separation of real roots of equation. (4. 1963).

I. Miu. Contribution upon the theory of the algebraical equation. (5. 1963).

R. Bădescu, E. Dumitrescu, C. Săuleescu. On a differential equation. (5. 1963).

I. M. Miu. On a theorem and a generalisation of the average theorem. (6. 1963).

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

V. Părăușanu. The adsorption of inorganic ions on ionexchangers. (1. 1963).

S. Lică, G. Tudorache. The influience of the supersonnds on the electrode processes in the formation of the oxigenated compounds of the chlorin on the rotary Pt electrode. (2. 1963).

I. Teoreanu. Consideration about the hardening of binding matter. (3. 1963).

I. Blum, Fr. Barca, E. Cernica. A study on the conditions for manufacturing briquettes of Roumanian lignites. (4. 1963).

P. Baltă, V. Velea. Semiconducting properties of some glasses from the system $V_2O_5 - P_2O_5 - As_2O_3$ (4. 1963).

I. Blum, Fr. Barca. The possibility of using bitumen resulting from the distillation of coking and semicoking tars in the manufacture of coal briquettes. (5. 1963).

A. Ianu, Gr. Teodorescu, C. Bejan, F. Popescu, I. Niculescu, A. M. Iancu. Study of obtaining alcaline chlorites from native raw materials. (6. 1963).

T. Ionescu, M. Florea, F. Stoica, G. Tudorache. The recovery of vanadium from used catalysts of the sulfuric acid industry. (6. 1963).

ELECTRICITY

A. Țugulea, S. Mastero. Errors in the presentation of some electrotechnical problems. (1. 1963).

N. Galan. The asyncrhronous torques of the reluctance synchronous motor with massive poles. (1. 1963).

V. Nedelcu. A new method for establishing the synchronous machine equations. (3. 1963).

E. Potolea. An original mathod for the simultaneous determination of the longitudinal and transversal reactance of the synchronous machine with silent poles. (3. 1963).

V. N. Nedelcu. Concerning the definition of apparent power in asymetrical three-phase systems. (4. 1963).

E. Potolea. The reactances of the theory of symetrical components. (5. 1963).

A. Timotin. On the relativistic dynamics of the Systems of particles. (6. 1963).

TRANSPORT

I. Zăgănescu, I. Bîrsan. The functional impovement of the traction gear box for the trucks of the 060DA diesel-electric locomotive, constructed for the Rumanian railway by the Reșița Metalurgical Works. (1. 1963).

ELECTRIC POWERS

Lazăr Hascal. Influence of the arc suppression coil over the recovery voltage on the carthed phase for a single phase earth fault. (2. 1963).

C. Dinculescu, A. Arie, P. Buhus, D. Cristescu. The laboratory of power plants, stations and electrical systems of the Polytechnic Institute of Bucharest. (3. 1963).

D. Pavel. Hydraulic efficiency analysis for modern Kaplan Propeller and bulb turbines. (3. 1963).

P. Militaru. Contribution to the calculation of three phase networks with single-phase loads. (3. 1963).

S. Călin. Correcting circuit synthesis using the method of the equivalent system of the II-nd order. (4. 1963).

MOTORS BRUILDINGS

A. Stambuleanu. The volumetric efficiency of a cylinder of a rapid internal combustion engine. (2. 1963).

M. R. Mustafa. Some experimental consideration concerning the temperature at which appears the breaking of a lubricating film. (2. 1963).

M. D. Cazacu, D. Pop. Influence of the connecting rod finite lengh on the piston delivery. (2. 1963).

PHYSICS

D. Moisil. Spectroscopie study of copper thin layers oxidation. (3. 1963).

G. Moisil. The calculus of the electrical potential produced by the two rails of an electrical railway. (4. 1963).

STRENGHT OF MATERIALS

A. Petre. Torsional buckling of the thin walled beans under axial distributed loads. (1. 1963).

I. A. Radțig. The calculation of the least volume statically undetermined system. (2. 1963).

M. Renert, R. Marcu. On the utilisation of screwextruders as viscometers. (4. 1963).

I. Zamfirescu. Many aspects of the tube strength. (6. 1963).

MECHANICS

N. Manolescu, V. Manafu. On the determination of the degrees of freedom of mechanisms. (5. 1963).

D. Mangeron, A. F. Sestopal. Application of the reflexion method and of Green's function expasions in series of fundamental solutions method in the oscillation theory. (6. 1963).

ELECTRONICS

C. Vasiliu. Problems and aspects of the sampling theorem. (1. 1963).

G. Rulea. Measurement methods of permitivity and permeability in microwaves. (2. 1963).

C. Vasiliu. Contribution to the timeydomain network synthesis. (5. 1963).

G. Bulucea. Negative resistance effect in the inductive transistor. (6. 1963).

A. Spătaru. Voluation of distorsions and bross talk in the transmission of bolour information, by quadrature modulation. (6. 1963).

THERMODYNAMICS

B. Grünwald. An equation of propagating the turbulent flame in a spark ignition engine. (4. 1963).

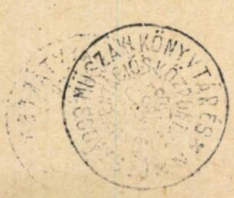
B. Grünwald. On dividing into stages the combustion process in the spark ignition engine. (5. 1963).

CHEMISTRY — PHYSICS

K. Grjotheim, O. Herstad, K. Johansen. The alumino thermic reduction of magnesium compounds.

J. Brynestad, K. Grjotheim, J. L. Holm. Some problems connected with the structure of the bath for the aluminium electroysis.

INTREPRINDEREA POLIGRAFICA „GRAFICA NOUA" II, BUCUREŞTI — c. 7041



INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820